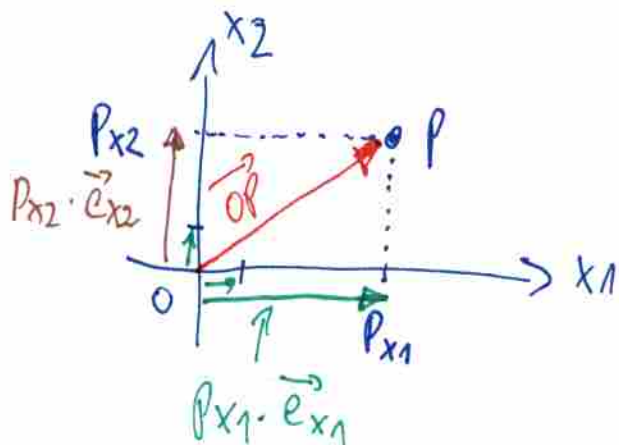
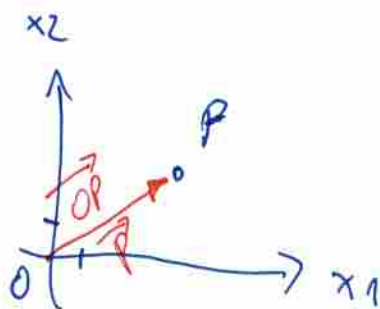


P Ortsvektor $\vec{OP}$ oder kürzer geschrieben $\vec{P}$

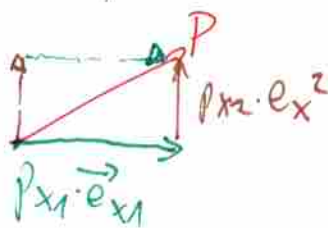
$$\|\vec{OP}\| \quad (\|\vec{P}\|) = \sqrt{\sum_{i=1}^n p_i^2}$$

z.B. $\vec{OP}$ bzw. $\vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\|\vec{P}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|$



$$= \sqrt{1^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{41}$$

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} p_{x1} \\ p_{x2} \end{pmatrix} = p_{x1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_{x2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\boxed{\begin{matrix} \lambda \cdot A \cdot B \cdot A \cdot \vec{v} \\ A \cdot B \cdot A^{-1} \end{matrix}}$$

Matrizen

Addieren

Subtr.

nur definiert für $A \in \{m \times n\text{-Matrizen}\}$

$B \in \{m \times n\text{-Matrizen}\}$

d.h. sowohl A als auch B

müssen m Zeilen n Spalten haben

$$a_{ij} \in A \quad 1 \leq i \leq m \quad 1 \leq j \leq n$$

$$b_{ij} \in B \quad \text{"} \quad \text{"}$$

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{ij} \pm b_{ij} \end{pmatrix}$$

z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m \times n$ - Matrix
m Zeilen
n Spalten

a_{ij} eines dieser Elemente

z.B. $i=1 \quad j=2$

$\rightarrow a_{12}$

$$a_{12} \neq a_{21}$$

m, n Dimensionen

= Formvariable

i, j Indices

= Freie Variablen

Def.: Kartesisches Produkt oder Kreuzmenge zweier Mengen A und B :

Menge aller geordneten Paare a/b mit $a \in A$ und $b \in B$

Schreibweise: $A \times B$

Indexmenge für die Indizierung der Matrixelemente

(„Nummerierung der a_{11} a_{12} ...“) ist eine Teilmenge des $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, nämlich die Menge aller geordneten Paare

$\{ij \mid i, j \in \mathbb{N}; 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n\} \quad \text{IN } \mathbb{N}$

Mult. Skalar mit Matrix:

$$\lambda \cdot A := (\lambda \cdot a_{ij})$$

Lambda

gr. Buchst.
 λ Lambda
 μ mu
0 ng

Beispiel:

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & +6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -15 \\ 0 & 30 \end{pmatrix}$$

Eine 3×5 Matrix ist $\in \mathbb{R}^{3 \times 5} := \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^5$

Zermelo Fränkel

$A \cdot \vec{x}$: Ergebnis $\vec{y}$

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j$$

$$\text{z.B. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{5}$$

$A \cdot B$ ist nur dann definiert, wenn Spaltenzahl A
= Zeilenzahl B

Ergebnis: Matrix mit Zeilenzahl der linken
Spaltenzahl der rechten Matrix

A ist $m \times n$ Matrix

B ist $n \times k$ Matrix

$A \cdot B$ ist $m \times k$ Matrix

$$A \cdot B = C$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} \cdot b_{kj}$$

z.B. 3×2 mit $2 \times 4 \rightarrow 3 \times 4$
 $A \quad B \quad A \cdot B$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{9} & \boxed{16} & \boxed{-2} & \boxed{2} \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{2} \\ \boxed{-3} & \boxed{-5} & \boxed{1} & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

$3 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \quad 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1$
 $\downarrow \quad \downarrow$

Matrix Mult. ist nur definiert für $(m \times n) \cdot (n \times k)$

$(3 \times 2) \cdot (2 \times 4)$ definiert
 $(2 \times 4) \cdot (3 \times 2)$ nicht definiert
 }
 $\Rightarrow$ Matrixmult. ist NICHT kommutativ!

Aber: $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$
 Dann $A \cdot B$ und $B \cdot A$ definiert $\rightarrow$
}
 ist eine 3×3 Matrix
 i.A. $A \cdot B \neq B \cdot A$ ⚡

Zunächst wird das Falksche Schema aufgestellt, indem die Matrizen höhenversetzt nebeneinander geschrieben werden (in der ursprünglichen Ausrichtung, also ohne Kippen oder Drehen).

			Spalte j	
			1	2
			-1	1
Zeile i			1	-2
1	1	4	$1 \cdot (-1) + 4 \cdot 1$	
2	2	5		
3	3	-6	$3 \cdot 1 + (-6) \cdot (-2)$	

Die erste Zeile von A wird elementweise mit der ersten Spalte von B multipliziert: $1 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 = 3$ und ergibt das Element $c_{11} = 3$.

			Spalte j	
			1	2
			-1	1
Zeile i			1	-2
1	1	4	3	
2	2	5		
3	3	-6		

Die erste Zeile von A wird elementweise mit der zweiten Spalte von B multipliziert: $1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 5$ und ergibt das Element $c_{12} = 5$.

			Spalte j	
			1	2
			-1	1
Zeile i			1	-2
1	1	4	3	-7
2	2	5		
3	3	-6		

Gl. Systeme

$$\begin{array}{l} x - y = 1 \quad [1] \\ -2x + y = -4 \quad [2] \end{array}$$

Lineares Gleichungssystem

bestehend aus 2 Gleichungen mit je 2 Unbekannten

Suche ein Paar x, y welches beide Gleichungen erfüllt

① Einsetzungsverfahren

- Eine Gleichung nach einer Variable auflösen
- Dies in alle anderen Gleichn. einsetzen

z.B. [1] nach x : $x - y = 1 \Leftrightarrow x = 1 + y \quad [1']$

in [2] einsetzen: $-2 \cdot (1 + y) + y = -4 \Leftrightarrow -2 - 2y + y = -4$
 $\Leftrightarrow -y = -2 \Leftrightarrow y = 2$

Einsetzen in [1']: $x = 1 + 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 3}}$

② Gleichsetzungsverfahren

- Alle Gl. nach einer Variable auflösen
- Paarweise Gleichsetzen

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \quad [1] \\ -2x + y &= -4 \quad [2] \end{aligned}$$

beide nach x : $[1] \Rightarrow x = 1 + y \quad [1']$

$[2] \Rightarrow -2x = -4 - y \Leftrightarrow x = 2 + y/2 \quad [2']$

$[1'] = [2'] : 1 + y = 2 + y/2 \Leftrightarrow \underline{y = 2} \quad || \cdot 2 \Leftrightarrow 2 + 2y = 4 + y$

jetzt beide nach y : $\rightarrow$ 1 Gl. mit x $|| -y \Leftrightarrow 2 + y = 4$
 $|| -2 \quad \underline{y = 2}$

"Paarweise"

z.B. 3 Gl. 3 Unbek.:

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = y_1 \quad [1]$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = y_2 \quad [2]$$

$$a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = y_3 \quad [3]$$

$[1'] : x_1 = \dots$

$[2'] : x_1 = \dots$

$[3'] : x_1 = \dots$



$[1'] = [2']$

$[1'] = [3']$

~~$[2'] = [3']$~~

③ Additionsverfahren

- Multipliziere beide Seiten der Gleichungen jeweils so, dass "gesuchte" Koeffizienten heraus kommen
- Addiere die Gleichungen links + rechts paarweise

$$x - y = 1 \quad [1]$$

$$-2x + y = -4 \quad [2]$$

$$[1] \parallel 2$$

$$2 \cdot x - 2 \cdot y = 2$$

$$[2]$$

$$-2 \cdot x + y = -4$$

$$\begin{array}{r} 2 \cdot x - 2 \cdot y = 2 \\ -2 \cdot x + y = -4 \\ \hline 2 \cdot x - 2 \cdot x - 2 \cdot y + y = 2 + (-4) \\ \underbrace{}_{0 \cdot x} \quad \underbrace{}_{-y} \quad \underbrace{}_{-2} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 2}}$$

$$[1]$$

$$x - y = 1$$

$$[2]$$

$$-2x + y = -4$$

$$\begin{array}{r} x - 2x - y + y = 1 + (-4) \\ \underbrace{}_{-x} \quad \underbrace{}_{0 \cdot y} \quad \underbrace{}_{-3} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 3}}$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= y_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= y_3 \end{aligned}$$

abgekürzte
Schreibweise
 $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A \cdot \vec{x} = \vec{y}$$

$\nwarrow$ „Koeffizientenmatrix“ $\nwarrow$ „Lösungsvektor“ $\nwarrow$ „Störvektor“
 $\swarrow$ „...“

Bsp.

$$x - y = 1$$

$$-2x + y = -4$$



$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \vec{x} = \vec{y}$$

$$\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \downarrow & \downarrow \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \end{array} \right) \end{array}$$

„Erweiterte Koeffizientenmatrix“

$$A/\vec{y}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot 2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{1.+2.} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} :2 \\ \cdot (-1) \end{array}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{1.+2.} \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right)}_{\substack{x_1 \quad x_2}}$$

④ Gaußsche Eliminationsverfahren
Gauß-Jordan-Verfahren

abgekürzte Schreibweise für:

$$\begin{array}{l} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 3 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{array} \right.$$

Ausblick ⑤ Matrixinversion

$$A \cdot \vec{x} = \vec{y} \quad \text{Auflösen nach } \vec{x} \quad ??$$

Inverse Matrix zu $A = A^{-1}$

$$\Leftrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{y} \Leftrightarrow E \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{y} \quad A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Relation Oberbegriff

Funktion : Relation, linkstotal und rechts eindeutig

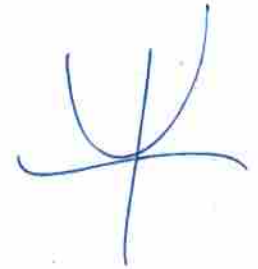
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^2$$

$\uparrow$ Quell- $\uparrow$ Ziel- $\uparrow$ $\in$ Quell- $\uparrow$ $\in$ Ziel-
 Menge Menge
 Menge Menge

„Rechenvorschrift“
 „Zuordnungsvorschrift“

$$y = x^2$$

„pinsele mal“ die Funktion $y = x^2$



① Was ist „pinsele“ $\rightarrow$ Zeichne mal

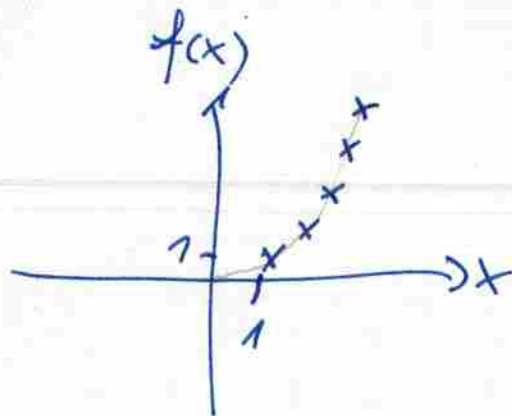
② $\{y \approx x^2\} ? \rightarrow$ Nee den Graphen $:= \{x/f(x)\}$

③ ?? $\rightarrow$ Nee: Interpretiere den Graphen als x/y

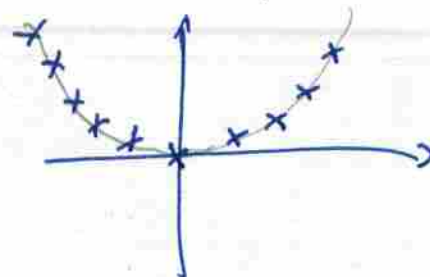
④ Was ist mein Definitionsbereich? Werte paare und zeichne in ein Ko. System

④

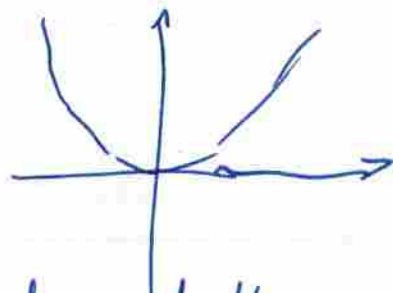
$$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$



$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$



$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$



⑤

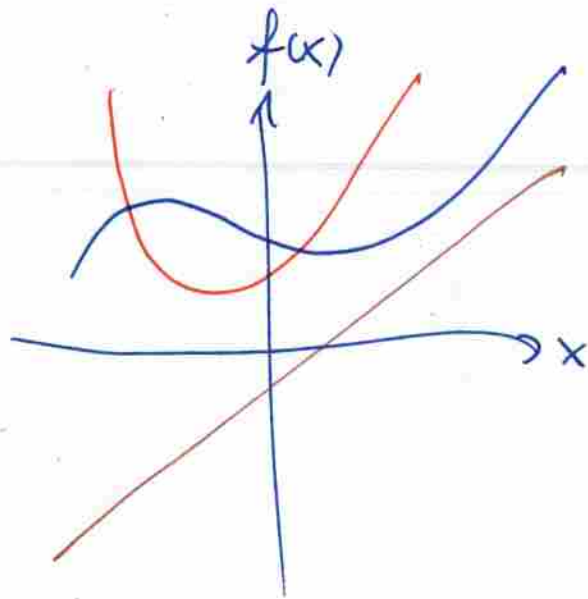
„gib mir dann bitte ∞ viel Papier und ∞ viel Tinte und ∞ viel Zeit)

⑥

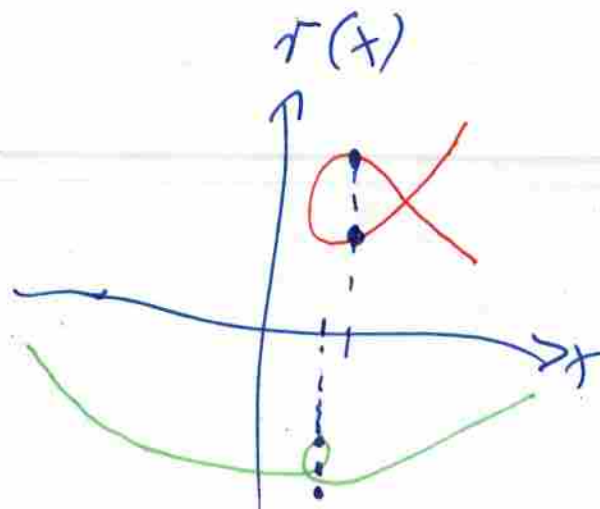
Nein von -5 bis 5 reicht mir



$$f: [-5; 5] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = x^2$$



Funktionen



Keine Funktionen,
sondern nur Relationen
(Kurven)

Beschränktheit

Monotonie

Infimum

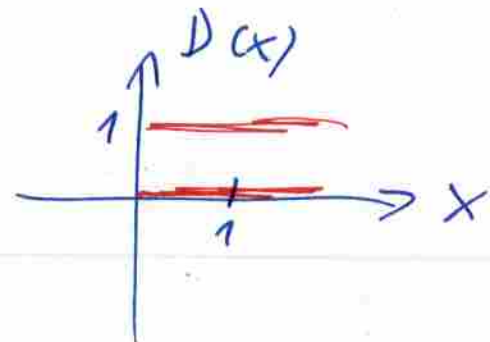
Supremum

Dirichlet-Funktion

:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ irrational} \\ 1 & x \text{ rational} \end{cases}$$

x irrational
 x rational



Folge: $(a_n): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, i \mapsto a_i = \dots$

$\mathbb{N}_0$

$\mathbb{C}$

$\mathbb{Z}$

oder eine
Teilmenge

explizit definiert...

Bildungsgesetz
Bildungsvorschrift

Arithmet. Folge $a_i = i$ 1 2 3 4 5 ...

$$a_{i+1} = a_i + 1; a_1 = 1$$

$a_i = 3 \cdot i$ 3 6 9 12 15 ...

$$a_{i+1} = a_i + 3; a_1 = 3$$

$(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ $a_i = 5i - 3$ 2 7 12 17 22 ...

$$a_{i+1} = a_i + 5; a_1 = 2$$

Arithmetische Folge: $a_{i+1} - a_i = \text{Konstant}$

Geometrische Folge: $\frac{a_{i+1}}{a_i} = \text{Konstant}$

1 2 4 8 16 32

rekursiv definierte
Bildungsvorschrift
der Folgenglieder

Alternierende Folge

z.B. -1 +1 -1 +1

-1 +2 -3 +4 -5 +6

Beschränktheit: Nach oben

$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5}$

$1 \quad -2 \quad 1 \quad -3 \quad 1 \quad -4 \quad 1 \quad -5$

Nach oben beschränkt: $\exists s: s > a_i$

Nach unten beschränkt: $\exists I: I < a_i$

Kleinste obere Schranke $\begin{cases} \text{"Maximum"}, \text{ wenn sie zur Folge gehört} \\ \text{"Supremum"}, \text{ wenn sie nicht zur Folge gehört} \end{cases}$

z.B. Größte untere Schranke $\begin{cases} \text{"Minimum"}, \text{ wenn } \in (a_i) \\ \text{"Infimum"}, \text{ wenn } \notin (a_i) \end{cases}$

$1 \quad 1,1 \quad 1 \quad 1,11 \quad 1 \quad 1,111 \quad 1 \quad 1,1111 \dots$

Max	existiert nicht	$(1, \overline{1})$
Sup	$1, \overline{1}$	
Min	1	$(1, \overline{0} \ 1)$
Inf	existiert nicht	

Monotonie:

$$a_{i+1} \geq a_i$$

"monoton steigend"

$$a_{i+1} > a_i$$

"streng monoton steigend"

$$a_{i+1} \leq a_i$$

"monoton fallend"

$$a_{i+1} < a_i$$

"streng monoton fallend"

$$\pm \infty \notin \mathbb{R}$$

Konvergenz:

Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ "konvergent", falls $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i$ existiert
 "divergent" sonst

$$1 \quad 1,1 \quad 1,11 \quad 1,111$$

konvergent $\lim_{i \rightarrow \infty} = 1, \overline{1}$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \dots$$

konvergent $\lim_{i \rightarrow \infty} = 0$

$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \dots$$

divergent $\lim_{i \rightarrow \infty} = +\infty$

Häufungspunkt:

$$1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1$$

2 Häufungspunkte: $+1 \quad -1$

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{1}{3} \quad 1 \quad \frac{1}{4} \dots \quad 1 \text{ HP: } 1$$

19

$a_i = \sin(i)$ ∞ viele Häufungspunkte im Intervall $[-1; 1]$

Bolzano-Weierstraß (Einer der wichtigsten mathematischen Sätze überhaupt)

Reihe: Folge der Partialsummen einer ~~Grundreihe~~ Folge

Beispiel: Grundfolge $= (a_i) = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$

$$(r_i) = 1 \quad 3 \quad 6 \quad 10 \quad 15 \quad 21 \dots$$

$$\sum_{i=1}^1 a_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^4 a_i = 1+2+3+4 = 10$$

$$\sum_{i=1}^2 a_i = 1+2 = 3$$

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 1+2+3 = 6$$

Summenformel?

"Kleine Gauß"

$$1+2+3 \dots +n = \sum_{i=1}^n i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

$$\begin{array}{rcl} 1 + 100 & = & 101 \\ + 2 + 99 & & +101 \\ + 3 + 98 & & +101 \\ + 4 + 97 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ + 50 + 51 & & \vdots \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} 1 + 100 \\ + 2 + 99 \\ + 3 + 98 \\ + 4 + 97 \\ \vdots \\ + 50 + 51 \end{array}} \right\} 50$$

$$\sum_{i=1}^{100} i = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \quad \text{Konvergent?}$$

$$1+y = 2 + \frac{y}{2} \quad || \cdot 2$$

$$2 \cdot (1+y) = 2 \cdot \left(2 + \frac{y}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 1 + 2 \cdot y = 2 \cdot 2 + 2 \cdot \frac{y}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2y = 4 + y$$

$$2 + \frac{y}{2} \neq \frac{2+y}{2}$$

$$2 + \frac{y}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{y}{2} = \frac{4+y}{2}$$

$$X \cdot (a+b) \\ = X \cdot a + X \cdot b$$

Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$; $a_i = i$

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 2 \quad a_3 = 3$$

→ Natürliche Zahlen

Definition: Die Reihe zur Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit dem Bildungsgesetz $a_i = i$

ist die Folge der Partialsummen $\sum_{i=1}^1 a_i \quad \sum_{i=1}^2 a_i \quad \sum_{i=1}^3 a_i \quad \sum_{i=1}^4 a_i \quad \dots$

z.B. (a_i) : $a_i = i \rightarrow r_i = 1 \quad 3 \quad 6 \quad 10 \quad 15 \quad 28 \quad 36 \quad 45 \quad 55 \quad \dots$

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \dots \quad a_i = \frac{1}{2^{i-1}} = 2^{-i+1} \quad +2$$

$$1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21 \quad \dots$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{i-1}} \quad \text{Konvergent} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{i-1}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} = 2$$

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{1}{8} \quad \dots$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \quad \text{divergent} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = \infty$$

~~+3~~

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 1 & + & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{3} & + & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{5} & + & \frac{1}{6} & + & \frac{1}{7} & + & \frac{1}{8} & + & \frac{1}{9} & \dots & + & \frac{1}{16} & + & \frac{1}{17} & + & \dots & + & \frac{1}{32} & + & \frac{1}{33} & \dots & + & \frac{1}{64} & \dots \\
 & & \downarrow & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & & & \underbrace{\hspace{2.5cm}} & & & & \underbrace{\hspace{2.5cm}} & & & & \underbrace{\hspace{2.5cm}} & & & & \underbrace{\hspace{2.5cm}} & & & & \underbrace{\hspace{2.5cm}} & & & & \underbrace{\hspace{2.5cm}} & & & & \underbrace{\hspace{2.5cm}} \\
 \text{Minorante} & & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2} & + & & & \frac{1}{2} & + & & & & \frac{1}{2} & + & & & & & & \frac{1}{2} & + & & & & & & \frac{1}{2} & + & & & & & \frac{1}{2} & \dots
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{3} + \frac{1}{4} &> \frac{1}{2} \\
 \frac{4+3}{12} &= \frac{7}{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \\
 > \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16} \\
 > \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Verständnis : Aufhören, wenn ich das Prinzip verstanden habe
 Geläufigkeit : Aufhören, wenn mir dreimal hintereinander kein
 „Flüchtigkeit“ Fehler passiert ist

$$42+7 = 49$$

$$-12 - 8 = -20$$