

Grundlagen der linearen Algebra

Vektoren, Matrizen

Bisher: $\mathbb{R}$ eindimensional

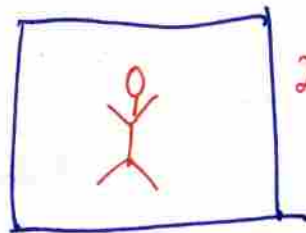
Jetzt: $\mathbb{R}^n$ n -dimensional

$\left\{ \begin{array}{l} n=2 \\ n=3 \\ n>3 \end{array} \right.$

Ebene

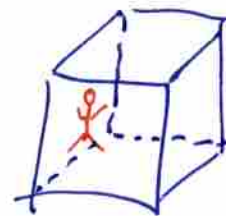
Raum

Können sich nur
Mathematiker vorstellen



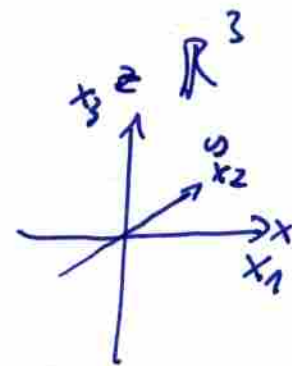
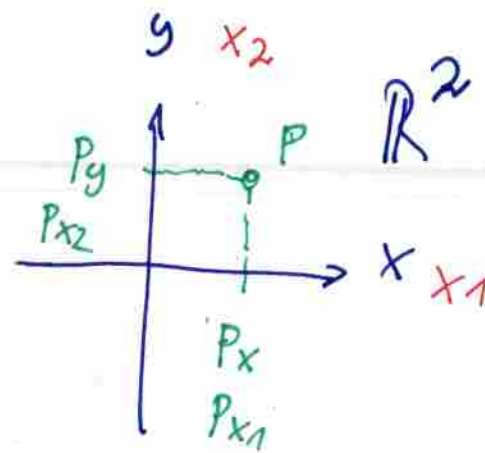
2-dimensional
Gefangener

2-dimensionales
Gefängnis



Koordinatensysteme

① Kartesisches System



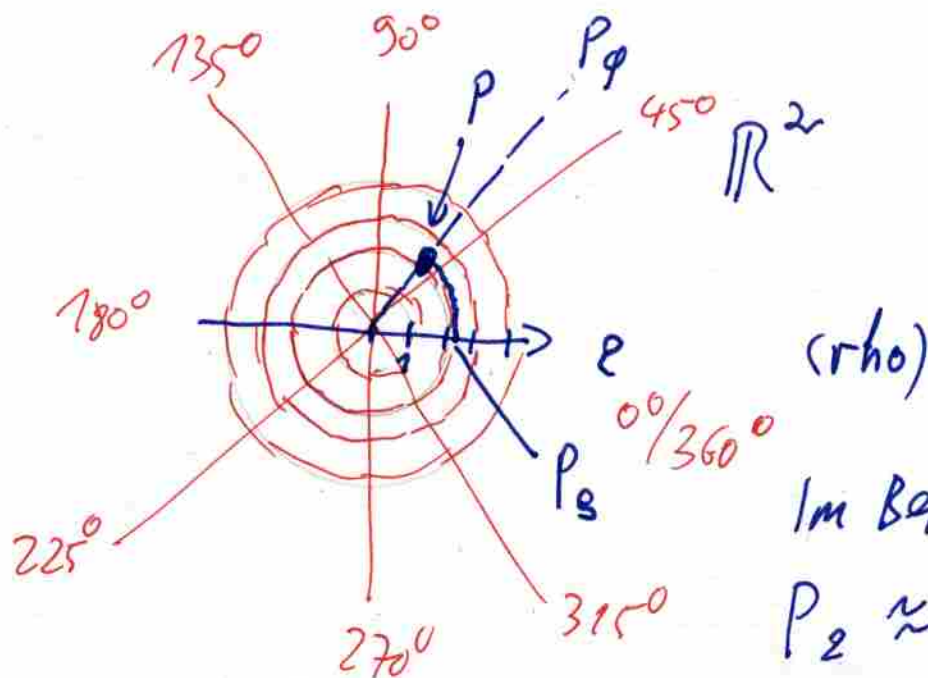
② Polar Koordinaten



$\mathbb{R}^3$ Zylinder-Koordinaten

oder

Kugel-Koordinaten



(rho)

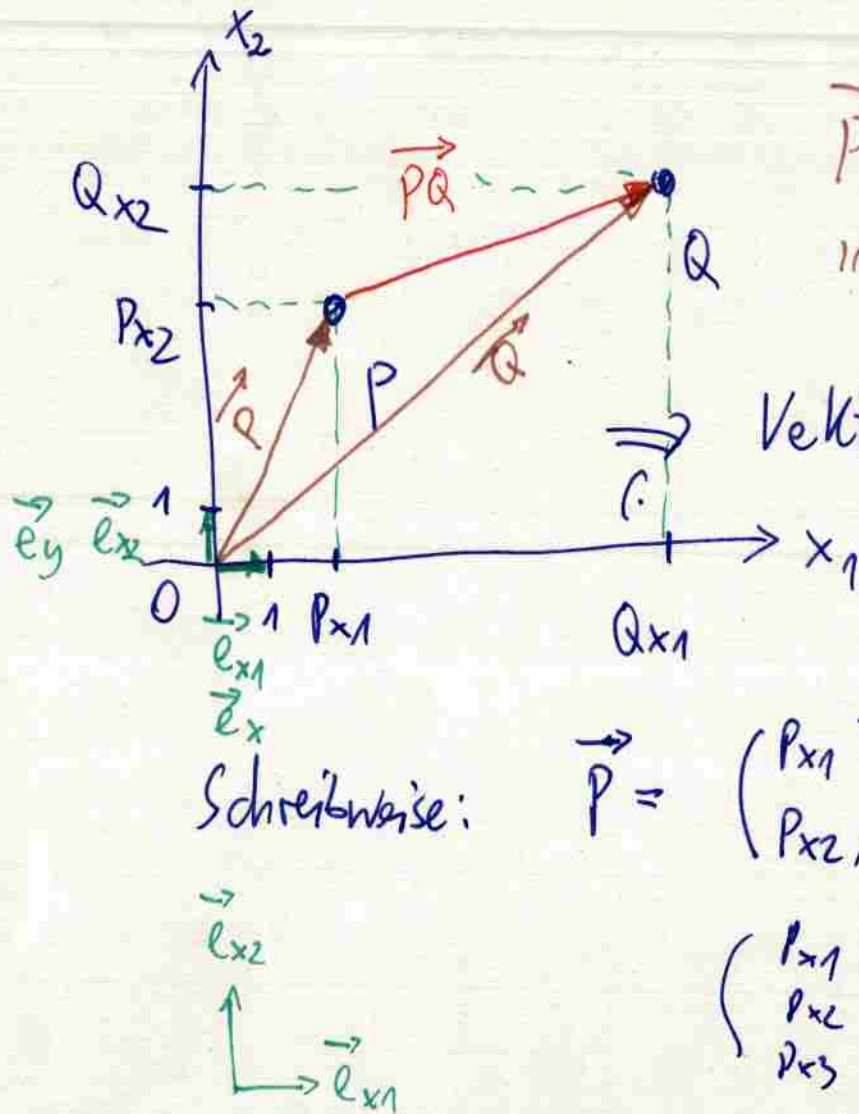
Im Beispiel:

$$\rho \approx 2.1$$

$$\phi \approx 55^\circ$$

Vektor

lat. "Träger"



$\vec{P}, \vec{Q}$
"Ortsvektoren"

Schreibweise:

$\vec{x}$

Ingenieure

x

Physiker

(Fett)

(Entfernung)

Vektor mit Betrag
und Richtung

Schreibweise:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} P_{x1} \\ P_{x2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} Q_{x1} \\ Q_{x2} \end{pmatrix} \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} P_{x1} \\ P_{x2} \\ P_{x3} \end{pmatrix}$$

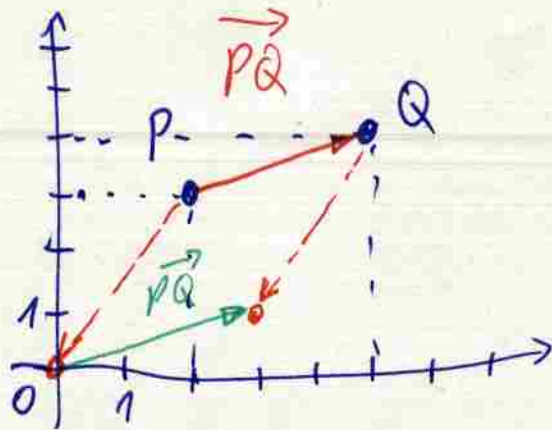
$$\begin{pmatrix} Q_{x1} \\ Q_{x2} \\ Q_{x3} \end{pmatrix} \mathbb{R}^3$$

Schule:
 $P(x|y)$

Länge von 1

"Einheitsvektoren in Richtung

$$\begin{matrix} x1 \\ x2 \end{matrix} \bigg| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$$



$\vec{x}$ eindim. "Skalar"

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

4

Von 0 nach P: 2 nach rechts (x_1)
3 nach oben (x_2)

$$2 \cdot \vec{e}_{x_1} + 3 \cdot \vec{e}_{x_2}$$

Mit $\vec{e}_{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{e}_{x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

lambda

$$\lambda \cdot \vec{P} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} P_{x_1} \\ P_{x_2} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot P_{x_1} \\ \lambda \cdot P_{x_2} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\vec{P} \pm \vec{Q} =$$

$$\begin{pmatrix} P_{x_1} \\ P_{x_2} \\ \vdots \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} Q_{x_1} \\ Q_{x_2} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{x_1} \pm Q_{x_1} \\ P_{x_2} \pm Q_{x_2} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot \vec{e}_{x_1} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot \vec{e}_{x_2} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot \vec{e}_{x_1} + 3 \cdot \vec{e}_{x_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Betrag

$$: \quad \|\vec{x}\| = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \right\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots} \quad |\vec{x}|$$

$\|\cdot\|$ „Euklidische Norm“

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Gegeben: $\vec{p}$ $\vec{q}$ λ

Wir kennen jetzt schon:

$$\vec{p} + \vec{q} \quad \lambda \cdot \vec{p}$$

Aber: $\left[\vec{p} \cdot \vec{q} \right] ?$

$$\left(\frac{\vec{p}}{\vec{q}} \right) ?$$

Multiplikation zweier Vektoren

→ Skalarprodukt

→ Vektor- oder Kreuzprodukt

$$\vec{p} \cdot \vec{q}$$

Ingenieur

$$\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle$$

Physik

Ergebnis:
Skalar

$$\vec{p} \times \vec{q}$$

Ergebnis: Vektor $|\mathbb{R}^3$

Definition: Skalarprodukt $\vec{p} \cdot \vec{q} =$

$$= \begin{pmatrix} p_{x1} \\ p_{x2} \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_{x1} \\ q_{x2} \\ \vdots \end{pmatrix} := \sum_{i=1}^n p_{xi} \cdot q_{xi}$$

$$= p_{x1} \cdot q_{x1} + p_{x2} \cdot q_{x2} + \dots + p_{xn} \cdot q_{xn}$$

z.B. $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 1$
 $= 0 - 4 + 2 = -2$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \pi \\ 3\pi \\ -2\pi \end{pmatrix} = -3\pi + (-5) \cdot 3\pi + 8 \cdot (-2\pi)$$
$$= -3\pi - 15\pi - 16\pi = -34\pi$$

Richtung

$\vec{e}$

Einheitsvektor, d.h. $\|\vec{e}\| = 1$

z.B. $\vec{e}_{x1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\|\vec{e}_{x1}\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$

$\vec{e}_{x2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\|\vec{e}_{x2}\| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$

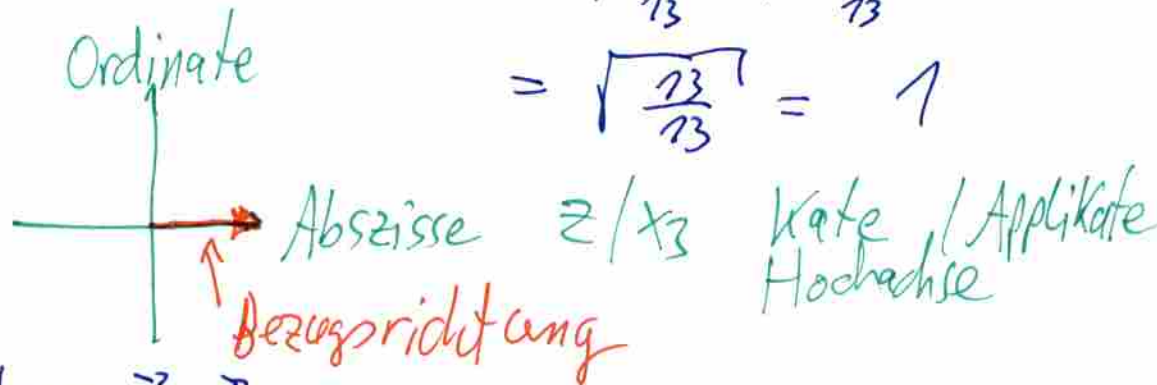
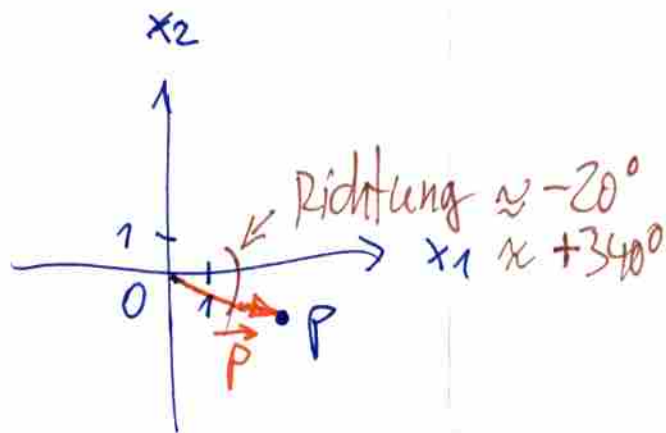
$\parallel$ Vektor e_{x1} $\parallel$

gegeben: $\vec{p}$ gesucht: Richtung
 Einheitsvektor in Richtung $\vec{p}$ $\vec{e}_{\vec{p}} = \frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|} = \frac{1}{\|\vec{p}\|} \cdot \vec{p}$

z.B. $\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\|\vec{p}\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$$\vec{e}_{\vec{p}} = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} \\ -2 \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} \quad \left| \text{Probe: } \sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2 + \left(\frac{-2}{\sqrt{13}}\right)^2} \right.$$

$$= \sqrt{\frac{9}{13} + \frac{4}{13}} = \sqrt{\frac{13}{13}} = 1$$



Es gilt: gegeben Vektoren $\vec{p}, \vec{q}$

Dann: $\vec{p} \cdot \vec{q} = \|\vec{p}\| \cdot \|\vec{q}\| \cdot \cos \angle \vec{p}, \vec{q}$

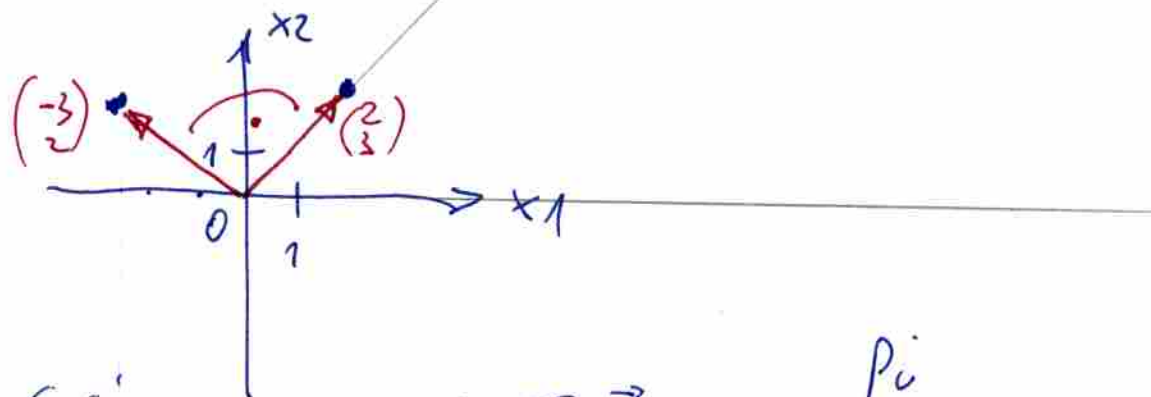
$\Leftrightarrow \angle \vec{p}, \vec{q} = \arccos \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{\|\vec{p}\| \cdot \|\vec{q}\|} \right)$ Richtung von $\vec{p}$ nach $\vec{q}$

Orthogonalitätstest
(senkrecht?)

$$\vec{p} \perp \vec{q} \iff \vec{p} \cdot \vec{q} = 0$$

z.B. $\vec{e}_{x1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{e}_{x2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{e}_{x1} \cdot \vec{e}_{x2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = \underline{\underline{0}}$

z.B. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 = -6 + 6 = 0$



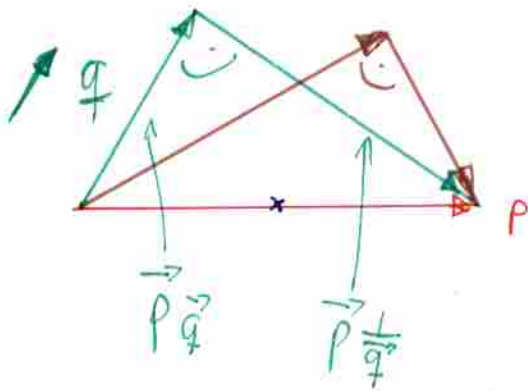
Richtungs cosinus: $\cos \angle \vec{p}, \vec{e}_i = \frac{p_i}{\|\vec{p}\|}$

z.B. Winkel x-Achse zu $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$:

$$\cos \angle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{e}_{x1} = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \approx 0,55$$

$$\angle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{e}_{x1} \approx \arccos(0,55) \approx 56^\circ$$

Orthogonale Zerlegung eines Vektors $\vec{p}$



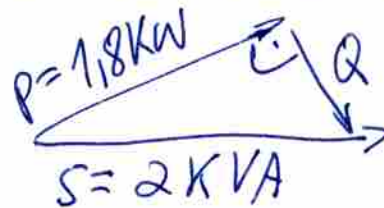
$$\vec{p}_{\vec{q}} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{\|\vec{q}\|^2} \cdot \vec{q}$$

$$\vec{p}_{\perp \vec{q}} = \vec{p} - \vec{p}_{\vec{q}}$$



$$\frac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|} = \vec{e}_q$$

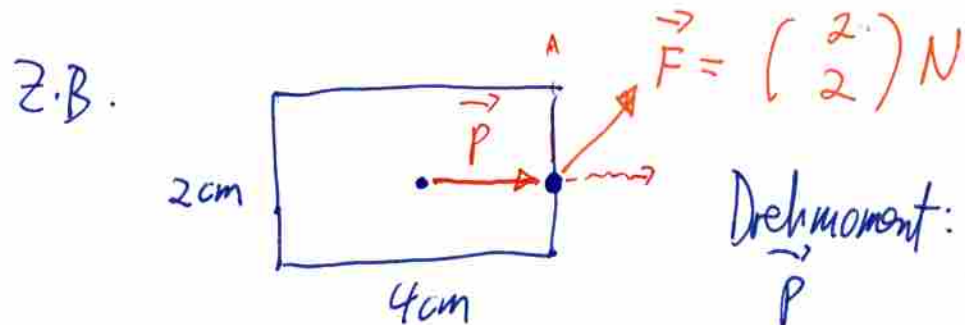
Mechanik: Zerlegung Kraft in Wirkrichtung und $\perp$ dazu
 Elektrotechnik: Wirk- Blind- Scheinkleistung



Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

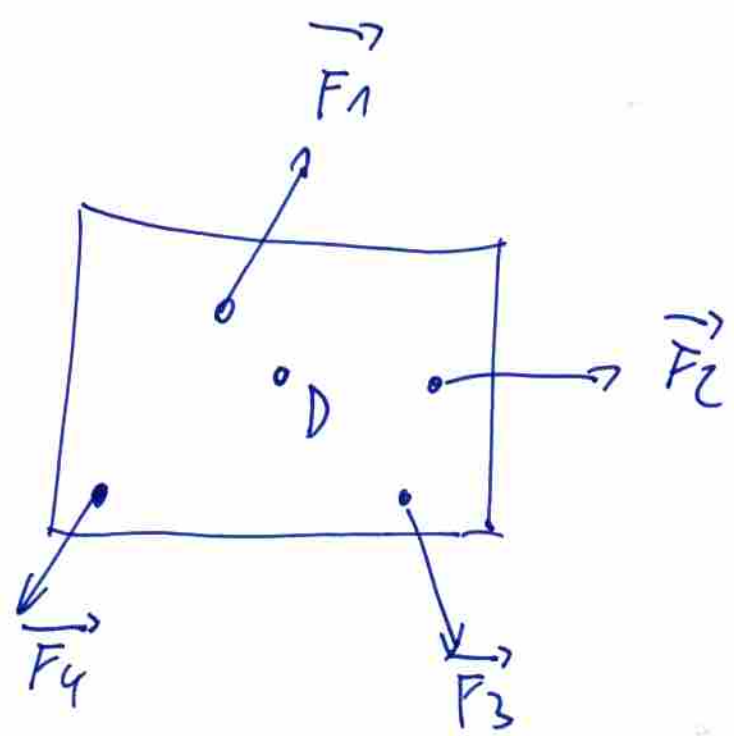
$$\vec{p} \times \vec{q} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} +p_2 \cdot q_3 - p_3 \cdot q_2 \\ -p_1 \cdot q_3 + p_3 \cdot q_1 \\ +p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_1 \end{pmatrix}$$

z.B. $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{p} \times \vec{q} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \\ -1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



Drehmoment: $\vec{p} \times \vec{F} =$

$$\begin{pmatrix} 2 \text{ cm} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \text{ N} \\ 2 \text{ N} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot 2 \\ -2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \\ 2 \text{ cm} \cdot 2 \text{ N} - 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \text{ Ncm} \end{pmatrix}$$

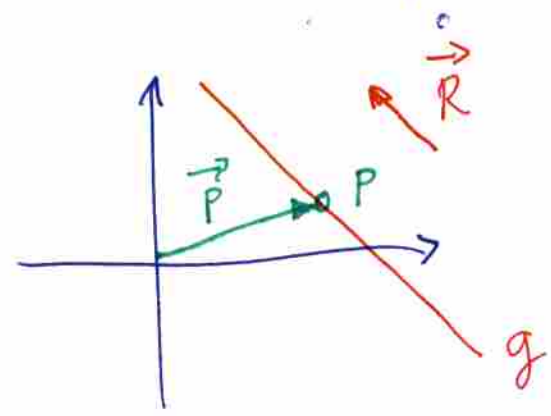


$$\vec{F}_{\text{ges}} = \sum \vec{F}_i$$

Punkt-Richtungsform einer Geraden:

Steigungs/ Abschnittsform

$$g = m \cdot x + b$$



$$g = \vec{P} + \lambda \cdot \vec{R} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Matrix

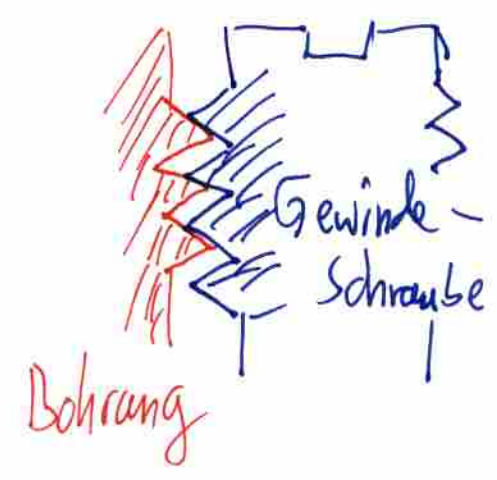
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

n Spalten

m Zeilen

" m x n - Matrix " $\in \mathbb{R}^{m \times n} := \underbrace{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n}_{\text{Kart. Produkt}}$

Merke:
 Zuerst mal Zeile
 Dann Spalte



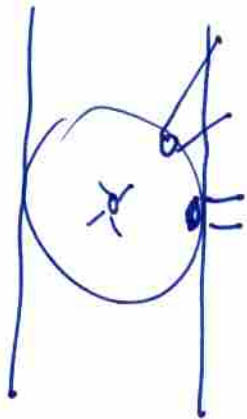
"Allgemeine Pythagoras" :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$



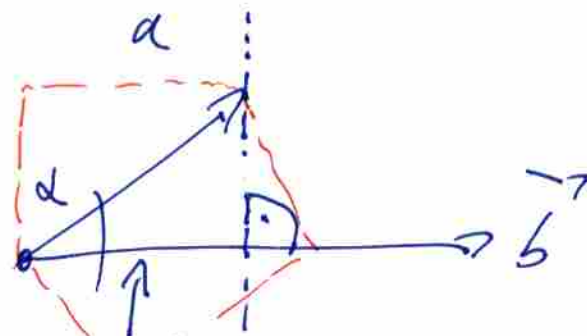
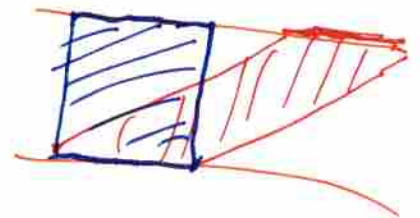
$$\cos \alpha = \frac{\text{Proj.}}{|\vec{a}|}$$



Winkel Alpha



Scherung



Projektion des
Vektors a auf den
Vektor b