

Big Endian

Dt.
Fourty two

2026/09/15

1
~~thursday~~

Little Endian

zwei und vierzig

15.09.2026
(2026-09-15)

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$$

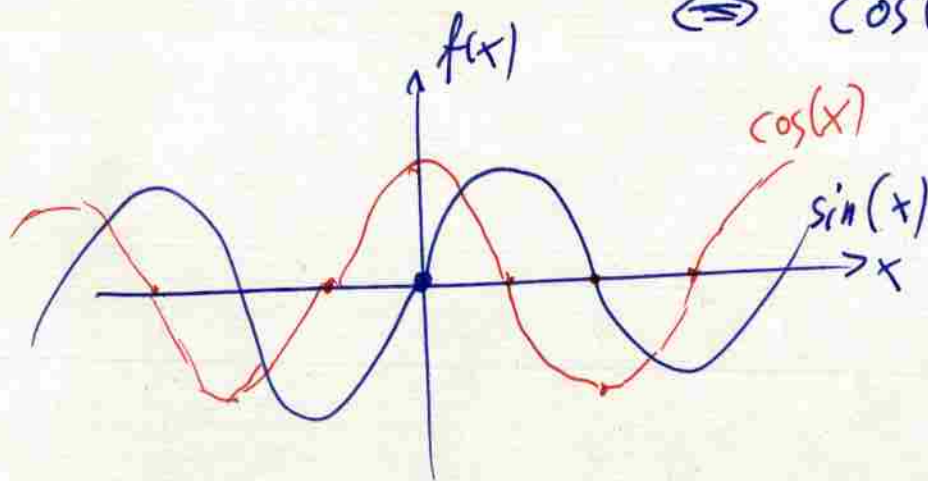
$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$$

$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b} =: \tan(\alpha)$$

Trigonometrische Pythagoras:

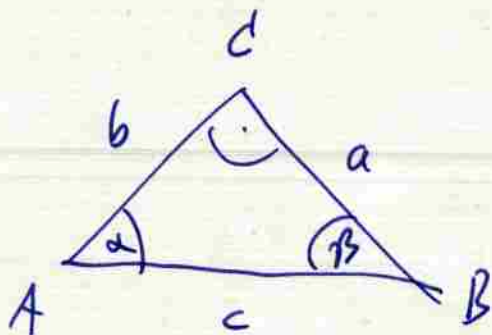
$$\boxed{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1}$$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha) = \pm \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}$$



Prof. Klöcker, Ingo
Dr. em. ~~MB~~/VT

10.4a)

Gegeben: $a = 12,7 \text{ cm}$ $c = 24,9 \text{ cm}$ Ges.: b, α, β

$$\textcircled{1} \text{ Pythagoras: } a^2 + b^2 = c^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 = c^2 - a^2$$

$$\Leftrightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{24,9^2 \text{ cm}^2 - 12,7^2 \text{ cm}^2}$$

$$\approx 21,4 \text{ cm}$$

$$\textcircled{2} \sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{12,7 \text{ cm}}{24,9 \text{ cm}}$$

$$\approx 0,510$$

$$\sin^{-1}(0,510) \approx 30,666^\circ$$

↓
arcsin

$$\rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - 30,66^\circ - 90^\circ \approx 59,33^\circ$$

$$\textcircled{3} \cos(\beta) = \frac{a}{c} = \frac{12,7 \text{ cm}}{24,9 \text{ cm}} \approx 0,510$$

↓
arccos

$$(0,510) \approx 59,333^\circ$$

⚡ Periodizität ⚡

Arcus-Funktionen sind nicht eindeutig

$$\sin(30^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0,5 \quad \left| \quad \arcsin(0,5) = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi \quad k \in \mathbb{Z}\right.$$

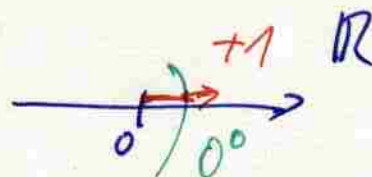
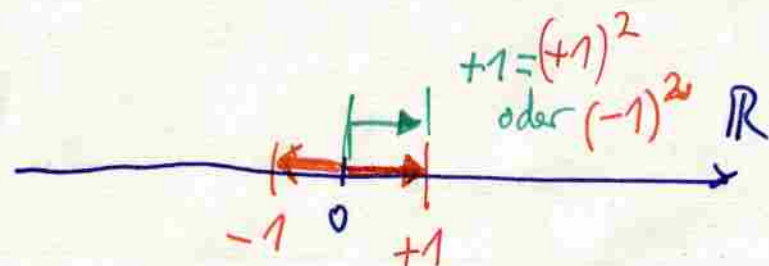
Für $k=0$: „Hauptwert“

Komplexe Zahlen

3

Carl Friedrich Gauß

$$\mathbb{R}: \quad \sqrt[2]{1} = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \quad \text{weil} \quad \begin{aligned} (+1) \cdot (+1) &= 1 \\ (-1) \cdot (-1) &= 1 \end{aligned}$$



→ Potenzgesetze: $a^x \cdot a^y = (a)^{x+y}$ im Besonderen gilt: $a \cdot a = a^1 \cdot a^1 = a^{1+1} = a^2$

$$\sqrt[2]{a^2} = a$$

Richtung: Verdoppeln:

$$2 \cdot 0^\circ = 0^\circ$$

$$2 \cdot 180^\circ = 360^\circ = 0^\circ$$

$$\sqrt{-1} = ???$$

z.B. Cardano 15. JH

Cardano'sche Formeln für Nullstellen
Polynom 3. Ordnung

$\sqrt{-1}$:

Zahl, die mit sich selber multipliziert

a) -1 ergibt, also $|dieser\ Zahl| = 1$

b) die so dargestellt ist, dass $2 \cdot (\text{Winkel zum positiven Zahlenstrahl}) = 180^\circ$ ergibt

Welche Winkel? (2 verschiedene
wg. Hauptsatz der Algebra)

$\rightarrow 90^\circ \quad 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$

$270^\circ \quad 2 \cdot 270^\circ = 540^\circ = 180^\circ$

Definiert:

$i := \sqrt{-1}$

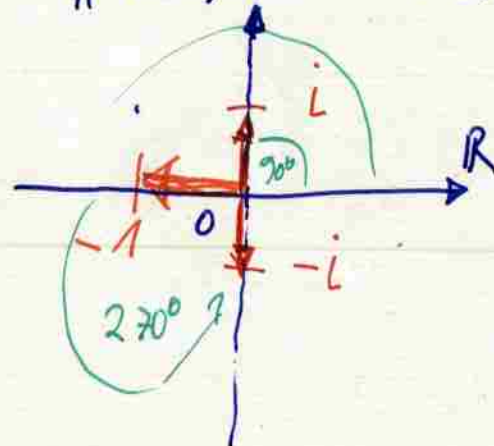
$j :=$

(positive)

i Mathematiker / Physiker
(Maschinenbauer)

j Elektriker (Maschinenbauer)

"imaginäre Einheit"



Gaußsche Zahlenebene

$\rightarrow$ Realteil

$\uparrow$ Imaginärteil

Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C} := \{\sigma + j \cdot \omega \mid \sigma, \omega \in \mathbb{R}; j = +\sqrt{-1}\}$ $\checkmark$

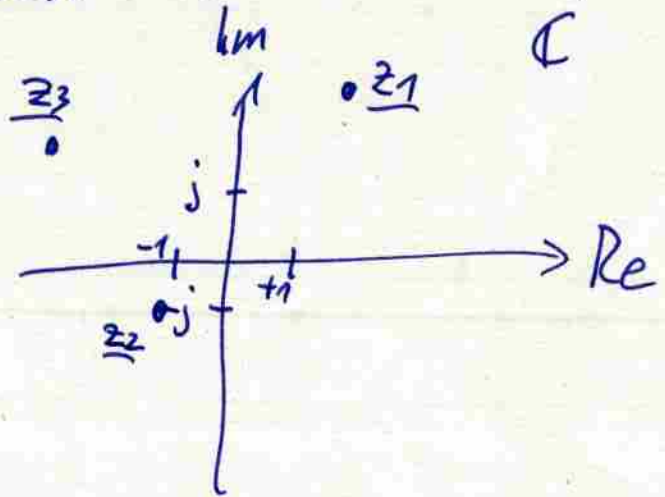
Beispiel: (Konvention insb. in der Elektrotechnik:
Komplexwertige Variablen werden unterstrichen)

$$\underline{z} \in \mathbb{C}$$

$$\underline{z}_1 = 2 + 3 \cdot j$$

$$\underline{z}_2 = -1 - j$$

$$\underline{z}_3 = -3 + 2 \cdot j$$



a) Real- und Imaginärteil

$$\Re(\underline{z}_1)$$

$$\Re(\underline{z}_1) = 2$$

$$\Im(\underline{z}_1)$$

$$\Im(\underline{z}_1) = 3 \quad \text{NICHT } 3j$$

b) Addition und Subtraktion

$$(a + j \cdot b) \pm (c + j \cdot d) = a \pm c + j(b \pm d)$$

$$\text{z.B. } \underline{z}_2 - \underline{z}_3 = -1 - j - (-3 + 2j) = -1 + 3 - j - 2j = 2 - 3j$$

c) Multiplikation

$$\begin{aligned} (a+bj) \cdot (c+dj) &= a \cdot c + b \cdot j \cdot c + a \cdot d \cdot j + b \cdot d \cdot j^2 \\ &= a \cdot c + j(b \cdot c + a \cdot d) - b \cdot d \\ &= a \cdot c - b \cdot d + j(b \cdot c + a \cdot d) \end{aligned}$$

$$| j^2 = -1$$

$$\begin{aligned} \underline{z_1} \cdot \underline{z_3} &= (2+3j) \cdot (-3+2j) = 2 \cdot (-3) + 3j \cdot (-3) + 2 \cdot 2j + 3j \cdot 2j \\ &= -6 - 9j + 4j + 6j^2 \\ &= -6 - 5j - 6 \\ &= -12 - 5j \end{aligned}$$

d) Division

$$\frac{a+bj}{c+dj}$$

① Reell machen des Nenners:

Erweitern mit dem zum Nenner konjugiert komplexen

② Ausrechnen.

$$= \frac{a+bj}{c+dj} \cdot \frac{c-dj}{c-dj} = \frac{a \cdot c - b \cdot d + j(a \cdot d + b \cdot c)}{c^2 + d^2}$$

Konjugieren: $a+bj \rightarrow a-bj$
 $a+bj$ und $a-bj$ sind „konjugiert komplex“

7

3. Bin. Formel: $(x+y) \cdot (x-y) = x^2 - y^2$

$$(a+bj)(a-bj) = (a)^2 - (bj)^2 = a^2 - b^2 j^2 \\ = a^2 + b^2 \quad \text{⚡}$$

$$\| j^2 = -1$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = (x+jy)(x-jy)}$$

Beispiel:

$$\frac{z_2}{z_3} = \frac{-1-j}{-3+2j} = \frac{(-1-j) \cdot (-3-2j)}{(-3+2j) \cdot (-3-2j)} \\ = \frac{(-1)(-3) + (-j)(-3) + (-1)(-2j) + (-j)(-2j)}{9 + 4} \\ = \frac{3 + 3j + 2j - 2}{13} = \frac{1}{13} \cdot (1+5j)$$

Konjugiert komplex

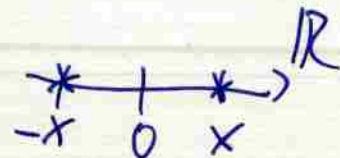
$$\underline{z}^*$$

$$\underline{z} = a + b \cdot j$$

$$\underline{z}^* := a - b \cdot j$$

$$\overline{z} := a - b \cdot j$$

mandmal

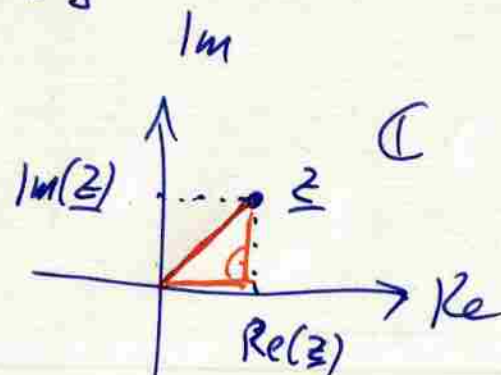


Betrag

Pythagoras

z.B. $|3 - 4 \cdot j| = 5$

Weil $\sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{5^2} = 5$



$$|z| := +\sqrt{\text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2}$$

Rechnen mit komplexen Zahlen:

- ① Betrachten Sie „i“ bzw. „j“ als „normale Variable“
- ② Führen Sie die Term-Äquivalenzumformungen durch
- ③ ersetzen Sie j^2 durch $\cdot(-1)$ j^3 durch $\cdot(-j)$...

Merke: $\frac{1}{j} = -j$ $|| \cdot j \Leftrightarrow \frac{j}{j} = -j \cdot j \Leftrightarrow 1 = 1$ 2

Alternativ-Definition der imaginären Einheit: $\frac{1}{j} = -j$

$$j^1 = j$$

$$j^5 = j^1 = j$$

$$j^{-1} = -j$$

$$j^2 = -1$$

$$j^6 = j^2 = -1$$

$$j^{-2} = -1$$

$$j^3 = -j$$

$$j^7 = j^3 = -j$$

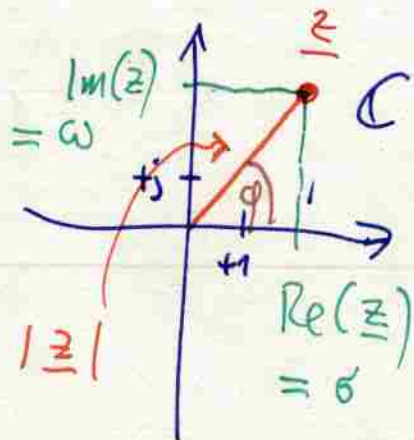
⋮

$$j^4 = +1$$

$$j^8 = j^4 = +1$$

⋮

Alternativdarstellung: Winkel-Betrag-Darstellung



Trigon. Darstellung

Euler-Darstellung $e^{j\varphi}$

$$z = \sigma + j\omega = |z| \cdot (\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi))$$

$$\operatorname{Re}(z) = \sigma = |z| \cdot \cos(\varphi) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Folgerung aus Def.} \\ \sin(\varphi) = \frac{\omega}{|z|} \\ \cos(\varphi) = \frac{\sigma}{|z|} \end{array} \right.$$

$$\operatorname{Im}(z) = \omega = |z| \cdot \sin(\varphi)$$

$$\underline{z} = \sigma + j\omega = |\underline{z}| \cdot (\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi))$$

10

$$|\underline{z}| = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$$

$$\varphi: \tan \varphi = \frac{\omega}{\sigma} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)$$

$$\underline{z} = \sigma + j\omega = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} \cdot \left(\cos\left(\arctan\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)\right) + j \cdot \sin\left(\arctan\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)\right) \right)$$

Euler-Formel:

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$$

Bevorzugt in E-Technik

$$\underline{z} = \sigma + j\omega = |\underline{z}| \cdot e^{j \arctan \omega / \sigma}$$

Exponentialschreibweise

In Expo-Schreibweise

$$\underline{z}_1 = |\underline{z}_1| \cdot e^{j\varphi_1}$$

$$\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = |\underline{z}_1| \cdot |\underline{z}_2| \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

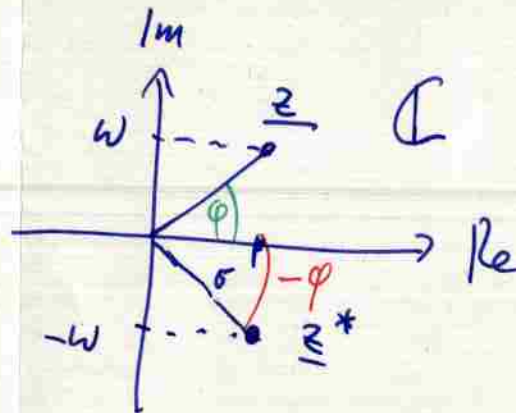
$$\underline{z}_2 = |\underline{z}_2| \cdot e^{j\varphi_2}$$

$$\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{|\underline{z}_1|}{|\underline{z}_2|} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Konjugieren in Expo.-Form

$$\underline{z} = \sigma + j \cdot \omega$$

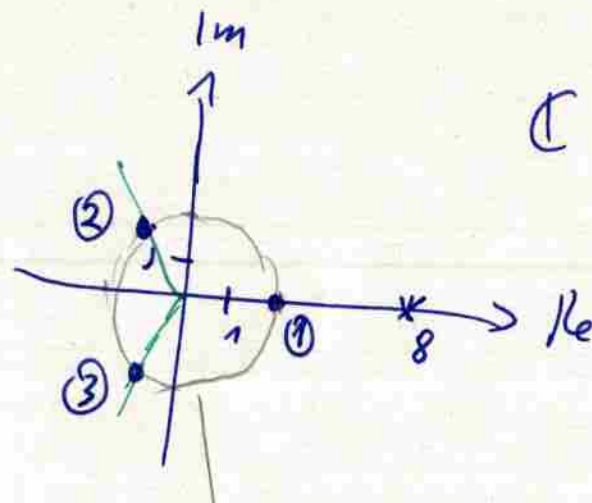
$$\underline{z}^* = \sigma - j \cdot \omega$$



Komplexe Wurzeln / Potenzen

$$\sqrt[2]{4} = \begin{cases} -2 \\ +2 \end{cases}$$

$$\sqrt[3]{8} = \begin{cases} 2 \\ 2 \cdot e^{j120^\circ} \\ 2 \cdot e^{j240^\circ} \end{cases}$$



Kreis mit Radius 2

? : Betrag 2

Winkel
360
720
1080

: 3 → 1200
2400

$$3 \cdot 1200 = 3600 = 00$$

$$3 \cdot 2400 = 7200 = 00$$

$$x^3 = x \cdot x \cdot x = x^1 \cdot x^1 \cdot x^1 = x^{1+1+1} = x^3$$

$$\begin{aligned} e^{j1200} \cdot e^{j1200} \cdot e^{j1200} &= e^{(j1200 + j1200 + j1200)} = e^{j3600} = e^{j00} = +1 \\ (2 \cdot e^{j1200})^3 &= 2^3 \cdot (e^{j1200})^3 = 8 \cdot e^{j1200 \cdot 3} = 8 \cdot e^{j3600} = 8 \cdot e^{j00} = 8 = +1 \end{aligned}$$

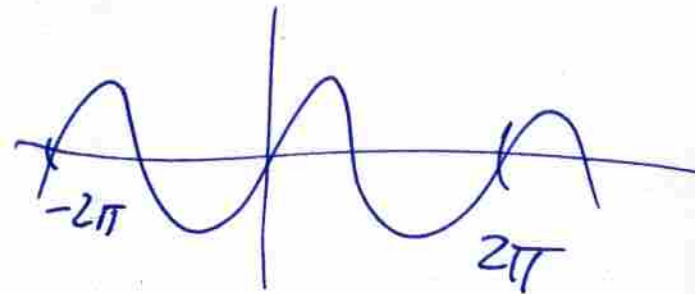
$$\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \approx 0,62832 \quad || \cdot^{-1}$$

$$\arcsin(\sin(x)) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) \approx \arcsin(\sin(0,62832)) =$$

$$\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \quad || \cdot^{-1}$$

$$\arcsin(\sin(x)) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)$$

$$x = \frac{\pi}{5} + 2 \cdot k \cdot \pi \quad k \in \mathbb{Z}$$



$$\log(x) = \log(42) \Leftrightarrow x = 42$$

Komplexwertige Funktionen

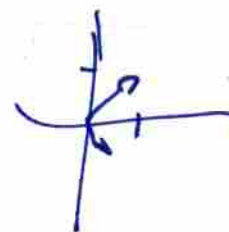
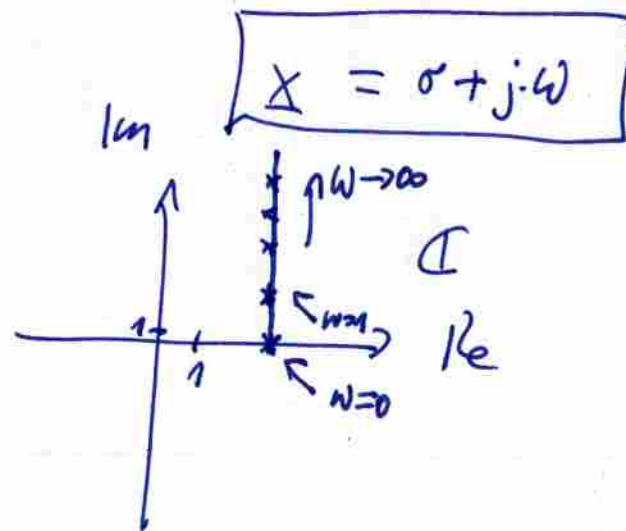
+2

$\mathbb{R}: f(x) = x^2$

$\mathbb{C}: f(x) = 3 + j \cdot 4 \cdot 4$

$\hookrightarrow \operatorname{Re} x = 3$

$\operatorname{Im} x = 4 \cdot 4$



x			
$\operatorname{Re}(x)$	$\operatorname{Im}(x)$	σ	ω
3	0	3	0
3	4	3	1
3	8	3	2
3	12	3	3
3	16	3	4
3	20	3	5

$\frac{1}{1 + j \cdot \omega}$

Fkt. Wert	Argument
Re	Im
1	0
$\approx 0,7$	$\approx -0,7$
$\approx 0,5$	$\approx -0,6$
...	...
0	0
	ω
	0
	1
	2
	3
	4
	∞

