Technische Hochschule Nürnberg



Brückenkurs Mathematik für technische Fachrichtungen

Arbeitsmappe/Übungsskript

Sommersemester 2026 V. 1
Stand 13. September 2026

Dipl.-Ing. Rolf B. Drescher / Dr.-Ing. Knuth Götz

Vorwort zum Brückenkurs

Hinweise zum Gebrauch dieses Übungsskripts:

Dieses Übungsskript soll Sie dabei unterstützen, die Inhalte des Brückenkurses Mathematik zu erarbeiten.

Die Übungsaufgaben sind anklickbare Links. Diese führen zum Lösungsvorschlag; Klick auf den Buchstaben der Teilaufgabe führt wieder zurück. Außerdem sind einige externe Links in das Internet eingebaut. Die Funktionalität dieser Links wurde mit den Adobe©-Produkten, mit dem Sumatra-PDF-Betrachter, und mit dem Foxit-Reader geprüft; falls es bei Ihnen nicht funktionieren sollte, müssen Sie ggf. an den Berechtigungen weitere Einstellungen vornehmen.

Bei vielen Kapiteln finden Sie eingangs eine kurze Zusammenfassung der wichtigsten „Rechenregeln“ (mathematischen Grundlagen) des betreffenden Kapitels. Anschließend finden Sie in der Regel eine Anzahl Aufgaben (die sich im Schwierigkeitsgrad steigern). Am Ende des Kapitels finden Sie dann meistens (anklickbare) Links zu weiteren Aufgaben und ggf. vertiefendem Material.

Insbesondere zum Anfang eines Kapitels finden Sie vermehrt „Drillaufgaben“: Das sind Aufgaben, die vielfach ähnliche Inhalte haben. Diese Aufgaben sind insbesondere für diejenigen gedacht, deren mathematischen Schulkenntnisse etwas länger zurück liegen, und die Übungen zur Wiedererlangung der „Geläufigkeit“ benötigen.

Wenn Sie bei der Durcharbeit dieses Übungsbuches bereits einige dieser „Drillaufgaben“ fehlerfrei selbständig lösen konnten, dann bringt Ihnen die weitere Bearbeitung dieser restlichen (Teil)aufgaben nicht mehr viel. Gehen Sie dann über zur nächsten Aufgabe. Wenn Sie sich andererseits auch nach der Bearbeitung der letzten derartigen (Teil)Aufgabe noch nicht sicher fühlen, dann holen Sie sich Hilfe.

Aus Zeitgründen haben wir uns in der Aufbereitung und auch im Übungsumfang und -komplexität beschränkt. An allen Punkten kann es Sonderfragen geben, wesentlich komplexer werden. Viele in der Praxis wichtige Themengebiete werden im Brückenkurs nicht angesprochen. Hier soll Ihnen nur der Einstieg in das Studium erleichtert werden.

Empfehlung:

- Falls Sie am Brückenkurs teilnehmen:

  Bearbeiten Sie die Aufgaben zeitnah nach der Behandlung des jeweiligen Kapitels im Seminar. Wenn Sie nicht weiter kommen, holen Sie sich Hilfe.

- Falls Sie sich die Inhalte im Selbststudium erarbeiten:

  – Erstellen Sie sich Ihren persönlichen Zeitplan.

  – Bearbeiten Sie die Aufgaben entsprechend Ihres Zeitplanes.

  – Falls notwendig, revidieren Sie Ihren persönlichen Zeitplan und holen sich Hilfe.

Auch wir sind nicht fehlerfrei und so sehr wir uns bemühten, kann es vorkommen, dass sich Tipp- und/oder Compilerfehler erhalten haben. Wir bitten Sie bei solchen Punkten um Hinweis. Zum Wintersemester 2024/25 hatten wir den Übungsumfang nochmals ausgebaut und dies zum Wintersemester 2025/26 weiter geführt – und somit die Möglichkeiten, Fehler zu machen. Erstmalig wurde dabei KI eingesetzt (siehe Seite v).

Das Skript und die Übungen werden von uns auch in Abhängigkeit von Ihrem Feedback weiterentwickelt. Daher sind Änderungen nicht nur vorbehalten, sondern Teil des Kurses. Geben Sie uns gerne Feedback zur Aufbereitung oder zum Übungsumfang – sowohl während und nach dem Kurs als auch später im Studium.

Entsprechend werden Sie während und zum Abschluss des Kurses Updates der Unterlagen erhalten.

13. September 2026 / Rolf B. Drescher / Dr.-Ing. Knuth Götz

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Benutzung des Übungsbuches

Im wesentlichen gelten die Hinweise zur Nutzung des Skripts.

Das PDF enthält viele Funktionen zum Navigieren (anklickbare Links), z. B. zwischen Aufgaben und Lösungen, zu Querverweisen etc. Die Druckversion enthält diese natürlich nicht. Arbeiten Sie daher bevorzugt mit dem PDF.

- Klick auf die Logos oben rechts führt Sie ins Inhaltsverzeichnis.
- Klick auf einen Eintrag im Inhaltsverzeichnis führt Sie zum entsprechenden Kapitel bzw. Abschnitt.
- Das gilt auch für einen Klick auf Einträge in den anderen Verzeichnissen (Abbildungen, Tabellen, Erläuterungen, Beispiele, ...).
- Bei Aufgaben:
  - Bei Aufgaben mit Unteraufgaben a), b), ... führt Sie ein Klick irgendwo in der Aufgabe zum Lösungsvorschlag.
  - „Hier geht es zur Lösungshinweisen.“ und „Hier geht es zur Musterlösung.“ bringt Sie bei Klick genau dorthin.
- Bei Lösungen:
  - Bei Aufgaben mit Unteraufgaben a), b), ... führt Sie ein Klick auf den Buchstaben a), b) ... zurück zur Aufgabe.
  - „Hier geht es zurück zur Aufgabe.“ bringt Sie bei Klick genau dorthin.

Die Bedeutung der farbigen „Kästen“ ist:

Erläuterung 0.1: Lehrinhalte

In den *Erläuterungen* finden Sie in geraffter Form den mathematischen Hintergrund. Tiefergehende Ausführungen finden Sie im Skript.

Beispiel 0.1: Beispiel

In den *Beispielen* finden Sie ausführlich durchgerechnete Beispiele zum jeweiligen Themengebiet.

Hinweis 0.1: Hinweis

In den *Hinweisen* finden Sie z. B. weiterführende Links ins Internet, besonders zu beachtende Dinge, u. dgl. mehr.

Übungsaufgabe 0.1: Übungsaufgaben

Selbsterklärend.

Hier geht es zur Musterlösung.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 0.1: Aufgabentext

Selbsterklärend.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Disclaimer

Alle Rechte vorbehalten. Weiteres siehe Impressum.

Alle Angaben sind ohne Gewähr. Es handelt sich um Schulungsmaterial, unterliegt keinem Änderungsdienst, sondern dient ausschließlich zur Unterstützung der Lehre. Die Unterlagen stellen kein eigenes Werk dar, sondern dienen als Arbeitsunterlagen und Anschauungsbeispiele. Das eigentliche Werk ist der Kommentar dazu.

Rechtliche Aspekte: Diese Unterlage enthält gelegentlich Aussagen und Verweise auf rechtliche Themen. Sie stellt in keiner Weise eine Rechtsberatung dar.

Wikipedia-Lizenz: Sofern Inhalte von Wikipedia Gegenstand, Inhalt oder Referenz sind, und nicht als freie Werke gelten, gilt die Lizenz nach Wikipedia:

Gemäß den Nutzungsbedingungen der Wikimedia Foundation unterstehen alle Texte in der deutschsprachigen Wikipedia der Creative-Commons-Lizenz Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 sowie aus Kompatibilitätsgründen weiterhin auch der GNU-Lizenz für freie Dokumentation (siehe Wikipedia:Lizenzbestimmungen/alt GFDL).

Weiternutzer dürfen aus den genannten Lizenzen eine wählen, unter der sie Wikipedia-Text weiterverwenden. Diese Lizenzen gestatten auch die kommerzielle Nutzung, solange sie mit den Lizenzbestimmungen in Einklang steht.

Für Mediendateien (z. B. Bilder, Videos, Tonaufnahmen) können abweichende Lizenzbestimmungen gelten. Diese sind auf der jeweiligen Beschreibungsseite zu finden.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Nutzung KI

Erstmalig probieren wir zum Generieren von Aufgabenstellungen KI aus, konkret ChatGPT, ohne dafür Werbung machen zu wollen.

Wir verfolgen damit auch das Ziel, Ihnen, so Sie KI nutzen wollen, gleich die Grundlagen des korrekten Zitierens nahezubringen. Ein weiteres Ziel ist, dass Sie sich mit den hinterlegten Fragestellungen selbst Übungsaufgaben generieren können.[**OpenAI2024x**]

KI kann übrigens weder sicher rechnen, noch korrekt zitieren. Auch Zusammenfassungen sind mit großer Vorsicht zu bewerten. In ChatGPT u. a. wurden daher einfache Rechner eingebaut, die Rechenaufgaben abfangen - aber nicht sicher. Für komplexere Rechnungen empfehlen wir daher dezidierte Programme. Oder den Kopf.....

Erläuterung 0.1: Künstliche Intelligenz

Auch für Ihre späteren Arbeiten, Hoffnungen und Erwartungen:

KI hat selbst mit den gewaltigen Rechenkapazitäten von Google und Microsoft nur die Intelligenz von vierjährigen Kindern. Dies ist zwar viel im Vergleich zu den 90ern - dort war man bei der Intelligenz einer Küchenschabe. KI kann aber nur lernen, womit sie gefüttert wird; das ist das Netz, und die Dummheit des Netzes findet sich in der Künstlichen Intelligenz aufgrund der Gewichtungsalgorithmen verstärkt wieder.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Wochenplan der Ohm / Curriculum

Woche 1

1. Mengen, Zahlen und Symbole, grundlegende Rechenregeln, Bruchrechnen
2. Prozentrechnen
3. Binomische Formeln
4. Potenzrechnen
5. Wurzelziehen aus einfachen und komplizierten Ausdrücken
6. Logarithmen
7. Lösen von quadratischen Gleichungen, Exponentialgleichungen, logarithmischen Gleichungen, Ungleichungen
8. Funktionen
   - Definitionsbereich und Wertebereich
   - Graphische Darstellung einer Funktion
   - Grenzwert, Stetigkeit, Monotonie, Umkehrbarkeit
9. Elementare Funktionen
   - Potenzfunktionen, Wurzelfunktionen, Polynome
   - gebrochen rationale Funktionen, trigonometrische Funktionen
   - Exponentialfunktion, natürliche Logarithmusfunktion
   - Betragsfunktion
   - einfache Kurven in Polarkoordinaten

Woche 2

1. Ableitung einer Funktion
   - Differenzen- und Differentialquotient
   - Ableitungsregeln
   - höhere Ableitungen
2. Einführung in die Integralrechnung
   - Stammfunktion, Integrationsregeln
   - unbestimmte und bestimmte Integrale
3. Rechnen mit Vektoren und Matrizen
   - Vektordefinition, Addition und Subtraktion von Vektoren,Skalarprodukt und Vektorprodukt
   - Matrixdefinition, Addition und Subtraktion von Matrizen, Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar, Matrizenmultiplikation
4. Lineare Gleichungssysteme
   Lösungsverfahren, Gaußsches Eliminationsverfahren
5. Kegelschnitte
   Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel

Dem Curriculum wird aus didaktischen Gründen in abweichender Form entsprochen.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort zum Brückenkurs ii

Benutzung des Übungsbuches iii

Disclaimer iv

Nutzung KI v

Wochenplan der Ohm / Curriculum vi

Abbildungsverzeichnis xi

Tabellenverzeichnis xiv

I. Themen der ersten Woche *Elementares Rechnen* bis *Funktionen* 1

1. Elementares Rechnen 3
- 1.1. Grundrechenarten . . . 3
  - 1.1.1. Addition und Subtraktion . . . 3
  - 1.1.2. Multiplikation und Division . . . 4
  - 1.1.3. Primzahlen . . . 6
    - 1.1.3.1. Teilbarkeitsregeln . . . 6
    - 1.1.3.2. Primzahlen . . . 7
    - 1.1.3.3. Faktorisieren . . . 8
    - 1.1.3.4. ggT und kgV . . . 9
  - 1.1.4. Punkt- vor Strichrechnung . . . 11
  - 1.1.5. Klammern . . . 12
- 1.2. Höhere Rechenarten . . . 13
  - 1.2.1. Potenzen . . . 13
  - 1.2.2. Wurzeln . . . 16
  - 1.2.3. Logarithmen . . . 18
  - 1.2.4. Gemischte Aufgaben . . . 20
- 1.3. Variablen und Terme . . . 23
  - 1.3.1. Variable . . . 23
  - 1.3.2. Terme . . . 23
  - 1.3.3. Grundlegende Rechengesetze der Algebra . . . 25

2. Logische Grundbegriffe 27
- 2.1. Aussagen und Aussageformen . . . 27
- 2.2. Tautologien . . . 29
- 2.3. Kontradiktionen . . . 29
- 2.4. Symbole und Gesetze der Aussagenlogik . . . 30
- 2.5. Wahrheitstabellen . . . 32
- 2.6. Prädikatenlogik 1. Stufe . . . 34
- 2.7. Mathematisches Beweisen . . . 36
  - 2.7.1. Direktes Beweisen . . . 36
  - 2.7.2. Indirektes Beweisen . . . 37
  - 2.7.3. Die vollständige Induktion . . . 38

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

3. Mengenlehre **45**
3.1. Grundlegendes . . . 45
3.2. Übungen . . . 46
3.3. Anwendungsbeispiele . . . 48

4. Zahlenbereiche **50**
4.1. Grundlegendes . . . 50

5. Zahlenbereich-Wandlungen **54**
5.1. Grundlegendes . . . 54
5.2. Übungen . . . 54

6. Ganze Zahlen: Zahlensysteme **56**
6.1. Unser gewohntes Dezimalsystem (Zehner-System) . . . 56
6.2. Modulo – Rest einer Division . . . 58
6.3. Wandlung vom Zehnersystem . . . 60
6.4. Wandlung zum Zehnersystem . . . 62
6.5. Wandlungen zwischen Dual-, Oktal-, und Hexadezimal-System . . . 64
6.6. Hilfestellung: Das Horner-Schema . . . 66
6.7. Begrenzte Stellenzahl . . . 67
6.8. Addition in verschiedenen Zahlensystemen . . . 69
6.9. Subtraktion in verschiedenen Zahlensystemen . . . 71
6.9.1. Rechenschieber zum selber Basteln . . . 72
6.10. Multiplikation in verschiedenen Zahlensystemen . . . 74
6.11. Division in verschiedenen Zahlensystemen . . . 76

7. Komplexe Zahlen **77**
7.1. Grundlegendes . . . 77
7.2. Übungen . . . 78
7.3. Grundrechenarten . . . 78
7.4. Übungen . . . 78

8. Termumformungen – Der Gleichungskalkül **80**
8.1. Gleichungen . . . 80
8.1.1. Gleichungen mit linearen Termen . . . 81
8.1.2. Summenoperator . . . 82
8.1.3. Produktoperator . . . 86
8.1.3.1. Fakultäten . . . 87
8.1.4. Gleichungen mit quadratischen Termen . . . 87
8.1.4.1. Binomische Formeln . . . 87
8.1.4.2. Der binomische Lehrsatz . . . 89
8.1.4.3. Allgemeine quadratische Gleichung . . . 90
8.1.5. Bruchrechnung und Gleichungen mit Brüchen . . . 91
8.1.5.1. Gemeine Brüche . . . 91
8.1.5.2. Dezimalbrüche . . . 93
8.1.5.3. Kettenbrüche . . . 94
8.1.5.4. Anwendung: Dreisatz und Verhältnisrechnung . . . 97
8.1.6. Gleichungen mit höheren Rechenarten . . . 99
8.1.6.1. Gleichungen mit Hochzahlen . . . 99
8.1.6.2. Logarithmus . . . 100
8.1.7. Potenzen und Wurzeln . . . 101
8.1.8. Weitere Äquivalenzumformungen . . . 105
8.1.8.1. Polynomdivision . . . 105
8.1.8.2. Partialbruchzerlegung . . . 106
8.2. Grundzüge der Kombinatorik . . . 107

9. Ungleichungen **110**
9.1. Lineare Ungleichungen . . . 110

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

10. Trigonometrie **113**
10.1. Winkel . . . 113
10.2. Die Strahlensätze . . . 114
10.3. Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck . . . 118
10.3.1. Winkelfunktionen . . . 118
10.3.2. Arcusfunktionen . . . 120
10.4. Goniometrische Gleichungen . . . 122
10.4.1. Zusammenstellung der goniometrischen Gleichungen . . . 123
10.4.1.1. Sinussatz . . . 123
10.4.1.2. Cosinussatz . . . 123
10.4.1.3. Halbwinkel . . . 123
10.4.1.4. Doppelwinkel . . . 124
10.4.1.5. Additionssatz . . . 124
10.4.1.6. Tangens . . . 124
10.4.1.7. Cotangens . . . 124
10.4.1.8. Arcusfunktionen . . . 125

11. Lineare Algebra **127**
11.1. Vektoren . . . 128
11.2. Koordinatensysteme . . . 129
11.3. Matrizen . . . 135
11.4. Anwendung: Lösen von LGS mit Gauß- und Gauß-Jordan-Verfahren . . . 137
11.5. Anwendung: Grundzüge der analytischen Geometrie . . . 137

II. Themen der zweiten Woche - *Funktionen* bis *Kegelschnitte* **141**

12. Lineare Gleichungssysteme **143**
12.1. Grundlegende Aufgabenstellungen . . . 143

13. Folgen und Reihen **151**
13.1. Folgen . . . 151
13.2. Reihen . . . 155

14. Funktionen **156**
14.1. Typische Fragestellungen . . . 156

15. Grundzüge der Differentialrechnung **160**

16. Grundzüge der Integralrechnung **167**

17. Kegelschnitte **174**

III. Anhang **177**

Literatur **178**

A. Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben **178**

B. Lösungsvorschläge (Alle) **182**

C. Lösungsvorschläge (Teil 1) **320**

D. Quellen **323**

E. Erläuterungsverzeichnis **327**

F. Beispielsverzeichnis **330**

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

G. Übungsverzeichnis **332**

H. Hinweisverzeichnis **338**

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Abbildungsverzeichnis

3.1. Auswahl der Volumenoperatoren bei Freecad . . . 48
3.2. Kugel K, Zylinder Z und Würfel W . . . 48

4.1. Zahlenhierarchie . . . 50

6.1. Gaußklammer-Funktion: Verdeutlichung des „Abrunden“ am Zahlenstrahl . . . 58

8.1. Entscheidungsbaum Kombinatorik . . . 107
8.2. Wegekarte Kain und Abel . . . 109

10.1. Skizze Strahlensatz . . . 114
10.2. Nutzung eines Kompass mit Fadenkreuz und Entfernungsmesser . . . 117

11.1. Polarkoordinaten . . . 130
11.2. Zylinderkoordinaten . . . 132
11.3. Kugelkoordinaten . . . 133

13.1. hoher Puls, 2-Kanal-Aufnahme, 2 s Dauer, gespreizte Darstellung . . . 155

14.1. Ein Polarkoordinaten-Netz mit zwei eingezeichneten Punkten . . . 158
14.2. Ein kartesisches Koordinaten-Netz mit zwei eingezeichneten Punkten . . . 158
14.3. Vier Funktionen in Polarkoordinaten . . . 159
14.4. Vier Funktionen in kartesischen Koordinaten . . . 159

15.1. Zur Stetigkeit . . . 160

17.1. Kegelschnitte: (1) liefert die Parabel, (2) Kreis und Ellipse, (3) die Hyperbel . . . 174

B.1. Wegekarte Kain und Abel . . . 247
B.2. Graph zu $x^3, x^2, x^3 > x^2$ . . . 249
B.3. Graph zu $\frac{x-1}{x-2} > 1$ . . . 249
B.4. hoher Puls, 2-Kanal-Aufnahme, 2 s Dauer, gespreizte Darstellung . . . 283
B.5. Frequenzbereich, Symmetriebetrachtungen werden Ihnen später im Studium weitere Informationen liefern. . . . 284
B.6. Plot der Funktion $f(x) = x^{7/3}$ auf $\mathbb{R}$ . . . 285
B.7. Plot der Umkehrfunktion $g(x)$ . . . 285
B.8. Plot der Funktion $f(x) = x^{7/3}$ mit komplexen Anteilen . . . 285
B.9. Plot der Funktion $f(x) = 7x^7 + 14x^5$ . . . 286
B.10. Plot der 1. Ableitung $f'(x) = 7x^4(10 + 7x^2)$ . . . 286
B.11. Plot der 2. Ableitung $f''(x) = 14x^3(20 + 21x^2)$ . . . 286
B.12. Plot der Umkehrfunktion zu $f(x) = 7x^7 + 14x^5$ . . . 286
B.13. Plot der Funktion $f(x) = x^x$ auf $\mathbb{R}$ . . . 287
B.14. Plot der Funktion $f(x) = x^x$ mit imaginären Anteilen . . . 287

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

B.15. Plot der Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4x$ . . . 288
B.16. Plot der 1. Ableitung $f'(x) = 3x^2 - 12x + 4$ . . . 288
B.17. Plot der 2. Ableitung $f''(x) = 6x - 12$ . . . 288
B.18. Plot der Funktion $f(x) = x^4 - 50x^2 + 625$ . . . 289
B.19. Plot der 1. Ableitung $f'(x) = 4x(-25 + x^2)$ . . . 289
B.20. Plot der 2. Ableitung $f''(x) = 4(-25 + 3x^2)$ . . . 289
B.21. Plot der Funktion $f(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$ . . . 290
B.22. Plot der 1. Ableitung $f'(x) = 5(x-1)^4$ . . . 290
B.23. Plot der 2. Ableitung $f''(x) = 20(x-1)^3$ . . . 290
B.24. Plot der Funktion $f(x) = 64x^3 - 1344x + 1280$ . . . 291
B.25. Plot der 1. Ableitung $f'(x) = 192(x^2 + 7)$ . . . 291
B.26. Plot der 2. Ableitung $f''(x) = 384x$ . . . 291
B.27. Plot der Funktion $f(x) = x^7 + 9x^6 - 94x^5 - 724x^4 + 3432x^3 + 14272x^2 - 53760x + 36864$ . . . 292
B.28. Plot der 1. Ableitung $f'(x) = (x+8)^2(7x^4 - 58x^3 + 10x^2 + 656x - 840)$ . . . 292
B.29. Plot der 2. Ableitung $f''(x) = 42x^5 + 270x^4 - 1880x^3 - 8688x^2 + 20592x + 28544$ . . . 292
B.30. Plot der Funktion $f(x) = \dfrac{(x+5)^4}{(x-5)(x+1)}$ . . . 293
B.31. Plot der 1. Ableitung $f'(x) = \dfrac{(2(x-11)x(x+5)^3)}{((x-5)^2(x+1)^2)}$ . . . 293
B.32. Plot der Funktion mit unterschiedlichen Wertebereichen $f(x) = \dfrac{(x^2-1)}{(x^2+1)}$ . . . 294
B.33. Plot der 1. Ableitung $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ . . . 294
B.34. Plot der 2. Ableitung $f''(x) = \dfrac{4 - 12x^2}{(x^2+1)^3}$ . . . 294
B.35. Plot der Funktion $f(x) = \dfrac{((x+1)^2+3)^2}{((x+1)^7+4)}$ . . . 295
B.36. Plot der Funktion $f(x) = \dfrac{((x+1)^2+3)^2}{((x+1)^7+4)}$, anderer Ausschnitt . . . 295
B.37. Plot der 1. Ableitung $f'(x)$ . . . 295
B.38. Plot der 1. Ableitung $f'(x)$, anderer Ausschnitt . . . 295
B.39. Plot der Funktion $f(x) = e^{(x^2-2x+1)}$ . . . 296
B.40. Plot der 1. Ableitung $f'(x) = 2e^(x-1)^2)(x-1)$ . . . 296
B.41. Plot der Funktion $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 1)$ . . . 297
B.42. Plot der 1. Ableitung $f'(x) = \dfrac{2}{x-1}$ . . . 297
B.43. Plot der Funktion $f(x) = \dfrac{1}{\ln x^2}$ . . . 297
B.44. Plot der 1. Ableitung $f'(x) = \dfrac{-2}{(x \ln^2(x^2))}$ . . . 297
B.45. Plot der Funktion $f(x) = \sin^2(x^2)$ . . . 298
B.46. Plot der Funktion $f(x) = \sin^2(x^2)$ (anderer Ausschnitt) . . . 298
B.47. Plot der 1. Ableitung $f'(x) = 4 \cdot x \cdot \cos(x^2) \cdot \sin(x^2)$ . . . 298
B.48. Plot der 1. Ableitung $f'(x) = 4 \cdot x \cdot \cos(x^2) \cdot \sin(x^2)$ (anderer Ausschnitt) . . . 298
B.49. Plot der Funktion $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$ . . . 299
B.50. Plot der Funktion $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$, anderer Abschnitt . . . 299
B.51. Plot der Funktion $f(x) = f(x) = \cos^5(x)$ . . . 299
B.52. Plot der 1. Ableitung $f'(x) = -5\cos^4(x)\sin(x)$ . . . 299
B.53. Plot der 2. Ableitung $-5\cos^3(x)(\cos^2(x) - 4\sin^2(x))$ . . . 299
B.54. Plot der Funktion $f(x) = |x^3 - 5|$ . . . 300

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

B.55. Plot der 1. Ableitung $\frac{(3x^2(-5+x^3))}{|-5+x^3|}$ . . . 300
B.56. $f(x) = x^2$, kartesisch . . . 301
B.57. $f(\varphi) = \varphi^2$, polar . . . 301
B.58. $f(\varphi) = \varphi^2$, polar, anderer Ausschnitt . . . 301
B.59. $f'(x) = 2 \cdot x$, kartesisch . . . 301
B.60. $f'(\varphi) = 2 \cdot \varphi$, polar . . . 301
B.61. $f'(\varphi) = 2 \cdot \varphi$, polar, anderer Ausschnitt . . . 301
B.62. $f(x) = (x+5)^4$, kartesisch . . . 302
B.63. $f(\varphi) = (\varphi+5)^4$, polar . . . 302
B.64. $f(\varphi) = (\varphi+5)^4$, polar, anderer Ausschnitt . . . 302
B.65. $f'(x) = 4 \cdot (5+x)^3$, kartesisch . . . 303
B.66. $f'(\varphi) = 4 \cdot (5+\varphi)^3$, polar . . . 303
B.67. $f'(\varphi) = 4 \cdot (5+\varphi)^3$, polar, anderer Ausschnitt . . . 303
B.68. $f(x) = \ln(x^x)$, kartesisch . . . 304
B.69. $f(\varphi) = \ln(\varphi^\varphi)$, polar . . . 304
B.70. $f(\varphi) = \ln(\varphi^\varphi)$, polar, anderer Ausschnitt . . . 304
B.71. $f'(x) = \ln x + 1$, kartesisch . . . 304
B.72. $f'(\varphi) = \ln \varphi + 1$, polar . . . 304
B.73. $f'(\varphi) = \ln \varphi + 1$, polar, anderer Ausschnitt . . . 304
B.74. $p : y = 4x^2 + 5$, $h(x) = 0{,}5x + 4{,}984\,375$ . . . 316
B.75. $e : \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$, $p : y = 6x^2$ . . . 317
B.76. $e : 256x^2 + 625y^2 = 256 \cdot 625$, $h : 256x^2 - 625y^2 = 256 \cdot 625$ . . . 317

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Tabellenverzeichnis

B.1. Fahrdaten zur Übung 272

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Teil I.

Themen der ersten Woche *Elementares Rechnen* bis *Funktionen*

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Woche 1

1. Mengen, Zahlen und Symbole, grundlegende Rechenregeln, Bruchrechnen
2. Prozentrechnen
3. Binomische Formeln
4. Potenzrechnen
5. Wurzelziehen aus einfachen und komplizierten Ausdrücken
6. Logarithmen
7. Lösen von quadratischen Gleichungen, Exponentialgleichungen, logarithmischen Gleichungen, Ungleichungen
8. Funktionen
   - Definitionsbereich und Wertebereich
   - Graphische Darstellung einer Funktion
   - Grenzwert, Stetigkeit, Monotonie, Umkehrbarkeit
9. Elementare Funktionen
   - Potenzfunktionen, Wurzelfunktionen, Polynome
   - gebrochen rationale Funktionen, trigonometrische Funktionen
   - Exponentialfunktion, natürliche Logarithmusfunktion
   - Betragsfunktion
   - einfache Kurven in Polarkoordinaten

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

1. Elementares Rechnen

1.1. Grundrechenarten

1.1.1. Addition und Subtraktion

Erläuterung 1.1: Addition und Subtraktion v1

Von links nach rechts rechnen! Beispiel: $7 + 5 - 8 + 2 = ?$

$$\underbrace{7+5}_{12} - 8 + 2 = \underbrace{12-8}_{4} + 2 = 6$$

Vorzeichen und Rechenoperator sauber trennen!
Niemals zwei Symbole unmittelbar hintereinander → mit Klammern trennen.

FALSCH: $3 - -4 + -5 + +6$ Richtig: $3 - (-4) + (-5) + (+6)$

Positiv sind $+(+\ldots)$ und $-(-\ldots)$; negativ sind $+(-\ldots)$ und $-(+\ldots)$:

$$\underbrace{3}_{+3}\ \underbrace{-(-4)}_{+4}\ \underbrace{+(-5)}_{-5}\ \underbrace{+(+6)}_{+6}\ \underbrace{= 8}_{+8}$$

Übungsaufgabe 1.1: Addition und Subtraktion (1) v1

Berechnen Sie im Kopf (also **ohne Verwendung eines Taschenrechners**):

a) $16 + (-12) = ??$
b) $(-24) - (-13) = ??$
c) $(-18) + 16 = ??$
d) $17 + (-14) = ??$
e) $27 - (-12) = ??$
f) $(-34) + 18 = ??$
g) $(-12) - 24 = ??$
h) $18 - (-12) = ??$
i) $(-19) - (-15) = ??$
j) $12 + (-16) = ??$
k) $(-4) - 7 = ??$
l) $(-14) - (-7) = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Übungsaufgabe 1.2: Addition und Subtraktion (2) v1

Berechnen Sie im Kopf (also **ohne Verwendung eines Taschenrechners**):

a) $2+6-5-2+3-2-1=??$

b) $3+4+(-5)+(-2)=??$

c) $3+(-8)-(-5)=??$

d) $\big((1+6)-(2+3)\big)+4=??$

e) $7-(-3)-4=??$

f) $10-4+7-3+2-1=??$

g) $8+9-6-3+2=??$

h) $15-7+4-2+3-1=??$

i) $-2+6-(-4)=??$

j) $20+5-3-1+4-2-1=??$

k) $12-3+6-4+5-2+1=??$

l) $9-(-2)+7=??$

m) $25+3-8+2-5+4-1=??$

n) $18-5+7-2+6-3-1=??$

o) $-10+(-5)-(-3)=??$

p) $15-(-7)-8=??$

q) $-12+3-(-6)=??$

r) $30+4-7-2+3-1=??$

s) $22-6+8-3+5-2+1=??$

t) $18-(-5)-(-9)=??$

Hier geht es zur Musterlösung.

1.1.2. Multiplikation und Division

Erläuterung 1.2: Multiplikation und Division v1

Von links nach rechts rechnen! Beispiel: $3\cdot 4\div 2\cdot 5=?$

$$\underbrace{3\cdot 4}_{=12}\div 2\cdot 5=\underbrace{12\div 2}_{6}\cdot 5=30$$

Terme mit Vorzeichen klammern!

FALSCH: $3\cdot -4$ Richtig: $3\cdot(-4)$

Positiv sind $(+\ldots)\cdot(+\ldots)$, $(-\ldots)\cdot(-\ldots)$, $(+\ldots)\div(+\ldots)$ und $(-\ldots)\div(-\ldots)$;
negativ sind $(+\ldots)\cdot(-\ldots)$, $(-\ldots)\cdot(+\ldots)$, $(+\ldots)\div(-\ldots)$ und $(-\ldots)\div(+\ldots)$:

$$\underbrace{(-3)\cdot(+4)}_{-12}\div(-2)\cdot 5=\underbrace{(-12)\div(-2)}_{+6}\cdot 5=+30$$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Übungsaufgabe 1.3: Multiplikation v1

Berechnen Sie im Kopf (also **ohne Verwendung eines Taschenrechners**):

a) $7 \cdot (-4) \cdot (-2) = ??$

b) $(-4) \cdot 2 \cdot 6 = ??$

c) $5 \cdot (-3) \cdot (-6) = ??$

d) $(-3) \cdot (-4) \cdot (-5) = ??$

e) $(-8) \cdot 5 \cdot 3 = ??$

f) $12 \cdot (-3) \cdot (-4) = ??$

g) $(-3) \cdot 12 \cdot (-5) = ??$

h) $15 \cdot (-4) \cdot 7 = ??$

i) $(-5) \cdot (-16) \cdot 3 = ??$

j) $(-4) \cdot (-8) \cdot (-3) = ??$

k) $20 \cdot 5 \cdot (-9) = ??$

l) $14 \cdot (-5) \cdot (-8) = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 1.4: Division v1

Berechnen Sie im Kopf (also **ohne Verwendung eines Taschenrechners**):

a) $(-5) \div (-1) = ??$

b) $(+6) \div (+2) = ??$

c) $12 \div (-4) = ??$

d) $(-35) \div (-7) = ??$

e) $21 \div (-3) = ??$

f) $(-49) \div 7 = ??$

g) $56 \div (-8) = ??$

h) $108 \div (-12) = ??$

i) $(-75) \div (-15) = ??$

j) $72 \div (-9) = ??$

k) $(-78) \div (-6) = ??$

l) $(-144) \div 12 = ??$

m) $(-128) \div (-8) = ??$

n) $132 \div (-11) = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

1.1.3. Primzahlen

1.1.3.1. Teilbarkeitsregeln

Erläuterung 1.3: Teilbarkeitsregeln v1

Teilbarkeitsregeln:

- **Durch 2 teilbar**
  Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn sie mit einer geraden Zahl endet.
  So ist die Zahl 56 114 durch 2 teilbar, da sie auf die gerade Zahl 4 endet.
  365 921 endet hingegen mit einer ungeraden Zahl und ist nicht durch 2 teilbar.
- **Durch 3 teilbar**
  Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn die Summe ihrer Ziffern (Quersumme) durch 3 teilbar ist.
  Beispiel: $21\,553 \Rightarrow 2+1+5+5+3=16$; $1+6=7 \rightarrow$ weder 16 noch 7 sind durch 3 teilbar, also ist auch 21 553 nicht durch 3 teilbar
  Beispiel: $11\,856 \Rightarrow 1+1+8+5+6=21$; $2+1=3 \rightarrow$ sowohl 21 als auch 3 sind durch 3 teilbar, also ist auch 11 856 durch 3 teilbar
- **Durch 4 teilbar**
  Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn die letzten beiden Ziffern durch 4 teilbar sind.
  Beispiel: $56\,1\mathbf{14} \Rightarrow$ 14 ist nicht durch 4 teilbar
  Beispiel: $56\,1\mathbf{12} \Rightarrow$ 12 ist durch 4 teilbar
- **Durch 5 teilbar**
  Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn sie mit 0 oder 5 endet.
- **Durch 7 teilbar**
  Eine Zahl ist durch 7 teilbar, wenn diejenige Zahl durch 7 teilbar ist, die man erhält, wenn man das Doppelte der letzten Ziffer vom Rest der Zahl abziehst.
  Beispiel: Bei 161 das Doppelte der letzten Ziffer 2, und $16-2=14$. Da 14 durch 7 teilbar ist, ist auch 161 durch 7 teilbar.
- **Durch 8 teilbar**
  Die Teilbarkeit einer natürlichen Zahl durch 8 überprüfst man an ihren letzten drei Stellen, den Hundertern, Zehnern und Einern. Wenn diese Ziffern eine durch 8 teilbare Zahl bilden, dann ist die ursprüngliche Zahl durch 8 teilbar.
- **Durch 9 teilbar**
  Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn die Summe ihrer Ziffern (Quersumme) durch 9 teilbar ist.
  Beispiel: $31\,122 \Rightarrow 3+1+1+2+2=9$; 31 122 ist durch 9 teilbar
  Beispiel: $11\,856 \Rightarrow 1+1+8+5+6=21$; $2+1=3 \rightarrow$ 11 856 ist nicht durch 9 teilbar.
- **Durch 10 teilbar**
  Eine Zahl ist durch 10 teilbar, wenn sie mit 0 endet.

Weitere Teilbarkeitsregeln finden sich in der Vorlesung und im Internet.

Übungsaufgabe 1.5: Teilbarkeitsregeln (1) v1

Ist ... durch ... teilbar?

a) $235 \div 3$ $\rightarrow$??

b) $5\,517 \div 9$ $\rightarrow$??

c) $35\,122 \div 4$ $\rightarrow$??

d) $3\,002 \div 4$ $\rightarrow$??

e) $3\,111 \div 3$ $\rightarrow$??

f) $3\,102 \div 6$ $\rightarrow$??

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

g) $3\,016 \div 8$ $\rightarrow$??
h) $3\,192 \div 7$ $\rightarrow$??
i) $441 \div 63$ $\rightarrow$??

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 1.6: Teilbarkeitsregeln (2) v1

a) Überprüfe, ob die Zahl 425 durch 5 teilbar ist. ??
b) Überprüfe, ob die Zahl 625 durch 25 teilbar ist. ??
c) Überprüfe, ob die Zahl 784 durch 7 teilbar ist. ??
d) Überprüfe, ob die Zahl 864 durch 3 teilbar ist. ??
e) Überprüfe, ob die Zahl 738 durch 6 teilbar ist. ??
f) Überprüfe, ob die Zahl 312 durch 4 teilbar ist. ??
g) Überprüfe, ob die Zahl 572 durch 2 teilbar ist. ??
h) Überprüfe, ob die Zahl 243 durch 9 teilbar ist. ??
i) Überprüfe, ob die Zahl 876 durch 4 teilbar ist. ??
j) Überprüfe, ob die Zahl 542 durch 6 teilbar ist. ??
k) Überprüfe, ob die Zahl 285 durch 3 teilbar ist. ??
l) Überprüfe, ob die Zahl 150 durch 2 teilbar ist. ??
m) Überprüfe, ob die Zahl 672 durch 5 teilbar ist. ??
n) Überprüfe, ob die Zahl 462 durch 9 teilbar ist. ??
o) Überprüfe, ob die Zahl 840 durch 4 teilbar ist. ??
p) Überprüfe, ob die Zahl 189 durch 2 teilbar ist. ??
q) Überprüfe, ob die Zahl 936 durch 3 teilbar ist. ??

Hier geht es zur Musterlösung.

1.1.3.2. Primzahlen

Erläuterung 1.4: Grundlegendes zu Primzahlen v1

- Eine **Primzahl** ist eine natürliche Zahl ≥ 2, die – außer durch 1 oder durch sich selber – durch keine andere natürliche Zahl teilbar ist.
- Unter **Faktorisieren** oder **Primzahlzerlegung** einer natürlichen Zahl versteht man das *Berechnen aller Faktoren*, die Primzahlen sind und deren Produkt die natürliche Ausgangszahl ergibt.

  Beispiel: $29\,700 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11^1$

Übungsaufgabe 1.7: Die Zahl Null v1

Welche Aussage zur Zahl 0 stimmt?

a) Keine Primzahl, da man nicht durch 1 teilen kann
b) Ist eine Primzahl, da durch Null teilbar
c) Ist eine Primzahl, da eine natürliche Zahl

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

d) Keine Primzahl, da man nicht durch Null teilen darf

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 1.8: Primzahlen v1

Welche der folgenden Zahlen sind Primzahlen?

a) 221 → ??
b) 247 → ??
c) 331 → ??
d) 439 → ??
e) 473 → ??
f) 569 → ??
g) 588 → ??
h) 637 → ??
i) 653 → ??
j) 739 → ??
k) 787 → ??
l) 879 → ??
m) 883 → ??
n) 893 → ??
o) 941 → ??
p) 961 → ??

Hier geht es zur Musterlösung.

1.1.3.3. Faktorisieren

Übungsaufgabe 1.9: Faktorisieren v1

Man faktorisiere die nachfolgenden Zahlen vollständig in Primfaktoren:

a) 108 537 → ??
b) 170 170 → ??
c) 181 203 → ??
d) 339.570 → ??
e) 341.887 → ??
f) 456.533 → ??
g) 485.100 → ??
h) 582.750 → ??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

1.1.3.4. ggT und kgV

Erläuterung 1.5: ggT und kgV v1

- Unter dem **größtem gemeinsamen Teiler** (ggT) zweier natürlicher Zahlen versteht man die *größte natürliche Zahl*, durch die sich die beiden Ausgangszahlen jeweils ohne Rest teilen lassen.

Beispiel:

Zahl 1	29 700	=	$2 \cdot 2$	$\cdot$	$3 \cdot 3 \cdot 3$	$\cdot$	$5 \cdot 5$	$\cdot$			11	
Zahl 2	147 000	=	$2 \cdot 2 \cdot 2$	$\cdot$	3	$\cdot$	$5 \cdot 5 \cdot 5$	$\cdot$	$7 \cdot 7$			
ggT	300	=	$2 \cdot 2$	$\cdot$	3	$\cdot$	$5 \cdot 5$					

$\frac{29\,700}{300} = 99$ $\frac{147\,000}{300} = 490$ 99 und 490 sind teilerfremd.

- Unter dem **kleinsten gemeinsamen Vielfachen** (kgV) zweier natürlicher Zahlen versteht man die *kleinste natürliche Zahl*, die Vielfaches jeder der beiden Ausgangszahlen ist.

Beispiel:

Zahl 1	29 700	=	$2 \cdot 2$	$\cdot$	$3 \cdot 3 \cdot 3$	$\cdot$	$5 \cdot 5$	$\cdot$			11	
Zahl 2	147 000	=	$2 \cdot 2 \cdot 2$	$\cdot$	3	$\cdot$	$5 \cdot 5 \cdot 5$	$\cdot$	$7 \cdot 7$			
kgV	14 553 000	=	$2 \cdot 2 \cdot 2$	$\cdot$	$3 \cdot 3 \cdot 3$	$\cdot$	$5 \cdot 5 \cdot 5$	$\cdot$	$7 \cdot 7$	$\cdot$	11	

$\frac{14\,553\,000}{29\,700} = 490$ $\frac{14\,553\,000}{147\,000} = 99$ 490 und 99 sind teilerfremd.

Übungsaufgabe 1.10: ggT und kgV v1

Bestimmen Sie jeweils ggT und kgV:

a) $9; 21$ $\rightarrow$??
b) $8; 12$ $\rightarrow$??
c) $13; 26$ $\rightarrow$??
d) $32; 12$ $\rightarrow$??
e) $16; 64$ $\rightarrow$??
f) $8; 12$ $\rightarrow$??
g) $5; 7$ $\rightarrow$??
h) $121; 77$ $\rightarrow$??
i) $256; 1024$ $\rightarrow$??
j) $42; 77$ $\rightarrow$??
k) $81; 49$ $\rightarrow$??
l) $342; 63$ $\rightarrow$??

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 1.11: Teilbarkeitsregeln (3) v1

a) Ermittle eine zweistellige Zahl, die sowohl durch 7 als auch durch 11 teilbar ist.
b) Ermittle eine zweistellige Zahl, die sowohl durch 18 als auch durch 27 teilbar ist.
c) Ermittle eine zweistellige Zahl, die sowohl durch 9 als auch durch 16 teilbar ist.
d) Ermittle eine zweistellige Zahl, die sowohl durch 16 als auch durch 24 teilbar ist.
e) Finde die kleinste natürliche Zahl, die sowohl durch 14, 21 und 28 teilbar ist.
f) Finde die kleinste natürliche Zahl, die sowohl durch 20, 25 und 30 teilbar ist.
g) Finde die kleinste natürliche Zahl, die sowohl durch 12, 15 und 18 teilbar ist.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

h) Finde die kleinste natürliche Zahl, die sowohl durch 22, 33 und 44 teilbar ist.

i) Finde eine dreistellige Zahl, die sowohl durch 6 als auch durch 9 teilbar ist.

j) Bestimme eine vierstellige Zahl, die durch 8 teilbar ist, aber nicht durch 10.

k) Finde eine dreistellige Zahl, die sowohl durch 7 als auch durch 13 teilbar ist.

l) Bestimme eine vierstellige Zahl, die durch 11 teilbar ist, aber nicht durch 9.

m) Finde eine dreistellige Zahl, die sowohl durch 12 als auch durch 18 teilbar ist.

n) Bestimme eine vierstellige Zahl, die durch 13 teilbar ist, aber nicht durch 15.

o) Finde eine dreistellige Zahl, die sowohl durch 15 als auch durch 20 teilbar ist.

p) Bestimme eine vierstellige Zahl, die durch 14 teilbar ist, aber nicht durch 16.

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 1.12: Tischplatte v1

Sie wollen eine 92 cm lange und 68 cm breite Tischplatte mit möglichst großen, quadratischen Mosaikplättchen bekleben.

a) Welche Seitenlänge muss ein solches Plättchen haben?

b) Wie viele brauchen Sie davon?

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 1.13: Neubau v1

Bei einem Neubau ist jedes Stockwerk 2,55 m hoch, der Keller dagegen 2,89 m. Es sollen überall Treppen mit gleichhohen Stufen eingebaut werden.

a) Wie hoch kann man eine Stufe höchstens machen?

b) Wie viele Stufen sind es dann im Keller?

Hier geht es zur Musterlösung.

Hinweis 1.1: Weitere Übungsaufgaben

Suchen Sie auch selber nach weiteren Übungsaufgaben. Hier eine kleine Auswahl (alle Links zuletzt geprüft am 2025-08-25):

https://www.mathe-in-smarties.de/grundschule/primzahlen/

https://www.uebungskoenig.de/mathe/5-klasse/primzahlen-primfaktorzerlegung/

https://www.matheaufgaben.net/arbeitsblaetter/primfaktorzerlegung-kgv-ggt/

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

1.1.4. Punkt- vor Strichrechnung

Erläuterung 1.6: Punktrechnung vor Strichrechnung v1

Zuerst …·… und …÷… (incl. Vorzeichen) von links nach rechts ausrechnen;
erst danach + und −.

Beispiel: $3 \cdot 4 + (-2) - (+6) \div (-2) = ?$

$$\underbrace{3 \cdot 4}_{12} + (-2) - \underbrace{(+6) \div (-2)}_{-3} = 12 - 2 - 3 = 7$$

Terme mit Vorzeichen klammern!

FALSCH: $3 \cdot -4$ Richtig: $3 \cdot (-4)$

Positiv sind $(+\ldots) \cdot (+\ldots)$, $(-\ldots) \cdot (-\ldots)$, $(+\ldots) \div (+\ldots)$ und $(-\ldots) \div (-\ldots)$;
negativ sind $(+\ldots) \cdot (-\ldots)$, $(-\ldots) \cdot (+\ldots)$, $(+\ldots) \div (-\ldots)$ und $(-\ldots) \div (+\ldots)$:

$$\underbrace{(-3) \cdot (+4)}_{-12} \div (-2) \cdot 5 = \underbrace{(-12) \div (-2)}_{+6} \cdot 5 = +30$$

Übungsaufgabe 1.14: Punktrechnung vor Strichrechnung v1

Berechnen Sie im Kopf (also **ohne Verwendung eines Taschenrechners**):

a) $5 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = ??$

b) $10 + 4 \div 2 \cdot 3 = ??$

c) $12 \cdot 2 - 8 \div 4 = ??$

d) $24 \cdot 2 - 12 \div 3 = ??$

e) $2 + 3 - 4 \cdot 2 = ??$

f) $5 \cdot 4 - 3 \div 2 + 6 = ??$

g) $8 - 3 \cdot 2 + 4 = ??$

h) $10 + 4 \div 2 - 3 \cdot 2 = ??$

i) $12 \cdot 2 - 8 + 4 \div 2 = ??$

j) $15 - 6 \div 2 + 3 \cdot 4 = ??$

k) $20 + 4 \div 2 - 3 \cdot 2 = ??$

l) $24 \div 3 - 2 + 4 \cdot 2 = ??$

m) $10 - 4 \div 2 + 3 \cdot 2 = ??$

n) $7 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 - 2 \cdot 8 + 12 \div 3 = ??$

o) $2 + 3 - 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 - 6 \cdot 2 + 7 \cdot 4 - 8 \cdot 3 + 9 \cdot 2 = ??$

p) $5 \cdot 4 - 3 \div 2 + 6 \cdot 3 - 7 \cdot 2 + 8 \cdot 4 - 9 \cdot 3 + 10 \cdot 2 = ??$

q) $8 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 - 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 - 7 \cdot 3 + 9 \cdot 2 - 10 \cdot 4 = ??$

r) $10 + 4 \div 2 - 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 - 6 \cdot 2 + 7 \cdot 4 - 8 \cdot 3 + 9 \cdot 2 - 10 \cdot 4 = ??$

s) $12 \cdot 2 - 8 + 4 \div 2 - 5 \cdot 3 + 6 \cdot 2 - 7 \cdot 4 + 9 \cdot 3 - 10 \cdot 2 + 11 \cdot 4 = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

1.1.5. Klammern

Erläuterung 1.7: Klammern ändern die Reihenfolge v1

Normalerweise wird von links nach rechts gerechnet. Klammern ändern die Reihenfolge. Terme in Klammern werden zuerst ausgerechnet (bei geschachtelten Klammern von innen nach außen) – danach gilt dann wieder „von links nach rechts“.

Klammern sind (u. a.):

$$\Big(\big(\big((\,)\big)\big)\Big) \quad \Big[\Big[\big[[\,]\big]\Big]\Big] \quad \Big\{\Big\{\big\{\{\,\}\big\}\Big\}\Big\} \quad \Big\langle\Big\langle\big\langle\langle\,\rangle\big\rangle\Big\rangle\Big\rangle \quad \Big\lfloor\big(\big(\,\big)\big)\Big\rfloor$$

Beispiele: $3-(4-2)+5=?$

$$3-\underbrace{(4-2)}_{2}+5=\underbrace{3-2}_{1}+5=6$$

$55\div\big(2+3\cdot(1+2)\big)=?$

$$55\div\big(2+3\cdot\underbrace{(1+2)}_{3}\big)=55\div\underbrace{(2+3\cdot3)}_{11}=5$$

$10-(4+3)-(4-2)=?$

$$10-\underbrace{(4+3)}_{7}-\underbrace{(4-2)}_{2}=10-7-2=1$$

$1-\big[20-(3+4+25)-(4-15)\big]=?$

$$1-\big[20-\underbrace{(3+4+25)}_{32}-\underbrace{(4-15)}_{-11}\big]=1-\big[20-32\underbrace{-(-11)}_{+11}\big]=1-\underbrace{\big[20-32+11\big]}_{-1}=2$$

Übungsaufgabe 1.15: Klammern verändern die Berechnungs-Reihenfolge v1

Berechnen Sie im Kopf (also **ohne Verwendung eines Taschenrechners**):

a) $8-3\cdot(4+2)=??$

b) $15-(6+2)\cdot3=??$

c) $20+4\div(2\cdot3)=??$

d) $(5+3)\cdot(7-2)=??$

e) $6\cdot(4+2)-8=??$

f) $12\div3+2\cdot(4-1)=??$

g) $(2+3)\cdot(4+2)-8=??$

h) $5\cdot(6-2)+8\div4=??$

i) $7+2\cdot(5-3)\cdot4=??$

j) $(20-8)\cdot2+12\div3=??$

k) $8\div4\cdot(6-3)+2=??$

l) $(10-6)\cdot(4+2)+8=??$

m) $12-4\div(2\cdot3)+5\cdot2=??$

n) $15\div3+4\cdot(6-2)=??$

o) $2-3\cdot(2+1)\cdot3-10\cdot(4-14)\div4=??$

p) $(5-3)\cdot\big[\{3-2\cdot2\}\cdot3-2+3\cdot2\big]=??$

q) $2-\big((6+4)\div5\cdot(2-3)-5+2\cdot3\big)=??$

r) $\big((2-8)\div(5-2)\cdot3+8\big)\cdot4-7=??$

s) $(6-9)\div(9-6)\div(9-6)\cdot(6-9)=??$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

t) $(6-9) \div \big[(9-6) \div (9-6)\big] \cdot (6-9) = ??$

u) $2+3 \cdot (4 \cdot 5+6-8) - (-8)(-7) = ??$

v) $4-2 \cdot \big(-3 \cdot (5-4) \cdot (-4) \cdot (-1)\big) + (2-7)(7-2) = ??$

w) $4-2 \cdot \big(-3 \cdot 5-4 \cdot (-4) \cdot (-1)\big) + (2-7)(7-2) = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

1.2. Höhere Rechenarten

1.2.1. Potenzen

Erläuterung 1.8: Potenzen v1

Ähnlich so, wie Multiplikationen wiederholte Additionen sind: ...

$$\underbrace{2+2+2+2+2}_{5 \text{ Stück}} = 2 \cdot 5 = 10$$

... sind Potenzen (Hochzahlen) wiederholte Multiplikationen:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5 \text{ Stück}} = 2^5 = 32$$

Man nennt den Vorgang des „Hochnehmens“ *Potenzieren*, die „hochzunehmende Zahl“ *Basis*, die „Hochzahl“ *Exponent*, und das Ergebnis der Rechnung *Potenz*.

Exponent

$$2^5 = 32 \leftarrow \text{Potenz}$$

Basis

Erläuterung 1.9: Potenzregeln v1

Multiplikation mit gleicher Basis $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$

Division mit gleicher Basis $x^a \div x^b = \dfrac{x^a}{x^b} = x^{a-b} \parallel x \neq 0$

Potenzen potenzieren $(x^a)^b = x^{a \cdot b} \neq x^{a^b}$

Beispiel $(2^3)^2 = 8^2 = 64 \neq 2^{3^2} = 2^9 = 512$

Multiplikation mit gleichem Exponenten $x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$

Division mit gleichem Exponenten $x^n \div y^n = \dfrac{x^n}{y^n} = (\dfrac{x}{y})^n \parallel x, y \neq 0$

Negative Zahlen potenzieren

- Ist der Exponent gerade, verschwindet das negative Vorzeichen.
- Ist der Exponent ungerade, bleibt das negative Vorzeichen.

Exponent Null $x^0 = 1$

Negativer Exponent $x^{-a} = \dfrac{1}{x^a}$

Bruch als Exponent $x^{\frac{1}{a}} = \sqrt[a]{x}$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Übungsaufgabe 1.16: Potenzen v1

Berechnen Sie im Kopf (also **ohne Verwendung eines Taschenrechners**):

a) $3^2 = ??$

b) $5^3 = ??$

c) $2^8 = ??$

d) $10^3 = ??$

e) $12^2 = ??$

Berechnen Sie mit dem Taschenrechner:

f) $3{,}14^2 = ??$

g) $12{,}5^4 = ??$

h) $42{,}125^3 = ??$

i) $6^7 = ??$

j) $7{,}5^4 = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

Erläuterung 1.10: Potenz- vor Punkt- vor Strichrechnung v1

Potenz- (Hochzahlen) vor Punkt- (Multiplizieren und Dividieren) vor Strichrechnung (addieren, subtrahieren):

Zuerst Potenzausdrücke, dann Multiplikation und Division, und dann Strichrechnung, d. h. um die entsprechenden Ausdrücke kann man sich eine Klammer denken.

Beispiel: $2 + 12 \div 2^2 + 3 \cdot 5 - 10^3 \div 50 = ?$

$$2 + 12 \div \underbrace{2^2}_{4} + 3 \cdot 5 - \underbrace{10^3}_{1000} \div 50 = 2 + \underbrace{12 \div 4}_{3} + \underbrace{3 \cdot 5}_{15} - \underbrace{1000 \div 50}_{20} = 2 + 3 + 15 - 20 = 0$$

Übungsaufgabe 1.17: Potenz- vor Punkt- vor Strichrechnung v1

a) $2 + \big(4 - 2 \cdot (3^2 - 2^2)\big) + 4 = ??$

b) $((2+2)^2)^2 - 4^4 = ??$

c) $(2^3)^{3+1/3} = ??$

d) $2 + 3 \cdot 4^5 = ??$

e) $\dfrac{3 \cdot 4^5}{\left(\dfrac{2^{20}}{1024}\right)} - 3 = ??$

f) $3 + \dfrac{3}{64} \cdot 2^6 - 6 = ??$

g) $\dfrac{1\dfrac{3}{64} \cdot 2^6 - 4}{7} = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Übungsaufgabe 1.18: Gemischte Potenzaufgaben (1) v1

Berechnen Sie im Kopf (also **ohne Verwendung eines Taschenrechners**):

a) $6^2 \div 9 - (3^3 - 2) \div 5 + 3^2 - 2^2 \cdot 3 + 4 = ??$

b) $3^2 - 2^2 + (-2)^2 - 3^2 - (-3)^3 - 3^3 = ??$

c) $2^2 - 2^4 - (-2)^2 - 2^3 - (-2)^5 - 2^3 = ??$

d) $2^3 \cdot 3^2 \div \big((2+3)^2 - (2^2 + 3^2)\big) - 2^2 = ??$

e) $2557 \cdot 43 \div (-7) \div 2557 \cdot 7 \div (-43) = ??$

f) $-5 + 2 \cdot 2 - 5 + (-5 + 2) \cdot (2 - 5) = ??$

g) $2 - 4^2 + (-4)^2 + 4 \cdot 2 - (-4) \cdot (-2) = ??$

h) $\big(1 \cdot (-2) - 3 \cdot (-4) + 5 \cdot (-6)\big) \div (-10) = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 1.19: Gemischte Potenzaufgaben (2) v1

Berechnen Sie im Kopf (also **ohne Verwendung eines Taschenrechners**):

a) $\big(3 \cdot (-3)^2 - 5^2\big) \cdot \big[\{7 \cdot 6 - 5 \cdot 8\} \cdot 3 - 3 \cdot 2\big] = ??$

b) $2 \cdot (-3) \cdot 4 \cdot (-5) \div (-4) \cdot (-2) \div (3) \div (5) = ??$

c) $\big((2-3) - (4-5) - (6-7)\big) \cdot (-8) \div (-4) = ??$

d) $(3 - 4 \cdot 2 - (2 - 9)) \cdot (4 - 6) = ??$

e) $\big((56 \div 8 \cdot 9) + 9\big) \div (-9) \div (-8) = ??$

f) $\Big(\big((7 \cdot (2-9)\big) + 4\Big) \div (-3)^2 - 4) \div (-3) = ??$

g) $9 \cdot 8 - 7 \cdot 6 - 5 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = ??$

h) $\big((2 - 20 + 4) \div (-7) - 5\big) \cdot (-2) = ??$

i) $3^3 \div (-3)^3 \cdot 2^5 \div (-2)^5 = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

1.2.2. Wurzeln

Erläuterung 1.11: Wurzeln v1

Addieren und Subtrahieren sind umgekehrte Operationen, sie heben sich gegensätzlich auf:

$3 + 5 - 5 = 3$

Genauso sind Multiplizieren und Dividieren zueinander umgekehrt:

$3 \cdot 5 \div 5 = 3$

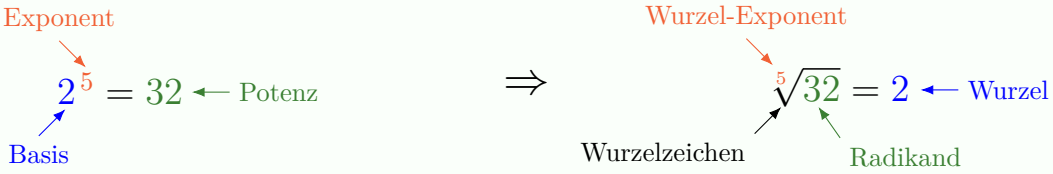
Beim Potenzieren sind Basis und Exponent gegeben, man sucht das Ergebnis (die Potenz). Das Potenzieren hat – anders als die Addition und die Multiplikation – zwei Umkehrungen:

a) Gegeben sind Potenz und Exponent, gesucht ist die Basis. Diese Operation nennt man Wurzelziehen oder *Radizieren*.

b) Gegeben sind Potenz und Basis; gesucht ist der Exponent. Diese Operation nennt man *Logarithmieren*.

Die Potenz nennt man beim Radizieren *Radikand*, den Exponent *Wurzelexponent*.

Beim Radizieren sucht man also nach der Lösung der Frage „Welche Zahl muss man *Exponent*-mal mit sich selber malnehmen, damit sich der *Radikand* ergibt?“



Die häufigsten Wurzeln sind solche mit Wurzelexponent $= 2$, die sog. *Quadratwurzeln*. Bei diesen läßt man den Wurzelexponenten i. A. weg:

$\sqrt{4} := \sqrt[2]{4} = +2$ oder -2

Übungsaufgabe 1.20: Wurzeln (1) v1

Berechnen Sie im Kopf (also **ohne Verwendung eines Taschenrechners**):

a) $\sqrt[3]{-27} = ??$

b) $\sqrt[4]{16} = ??$

c) $\sqrt[5]{-32} = ??$

d) $\sqrt[6]{64} = ??$

e) $\sqrt[4]{256} = ??$

f) $\sqrt[3]{-125} = ??$

g) $\sqrt[2]{144} = ??$

h) $\sqrt[2]{625} = ??$

i) $\sqrt[2]{361} = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 1.21: Wurzeln (2) v1

Berechnen Sie mit dem Taschenrechner:

a) $\sqrt[3]{45} \approx ??$

b) $\sqrt[3]{10} \approx ??$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

c) $\sqrt[4]{20} \approx ??$
d) $\sqrt[3]{8} \approx ??$
e) $\sqrt[2]{9} \approx ??$
f) $\sqrt[1,5]{5} \approx ??$
g) $\sqrt[11]{11} \approx ??$
h) $\sqrt[365]{1,1} \approx ??$
i) $\sqrt[12]{5,5} \approx ??$
j) $\sqrt[30]{2} \approx ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

Bitte beachten Sie, dass Taschenrechner in der Regel nur eine Lösung angeben, wie zuvor gezeigt, oft aber zwei betragsgleiche Lösungen mit unterschiedlichen Vorzeichen existieren, die physikalisch wichtig sind.

Beachten Sie auch, dass Taschenrechner aufgrund der Numerik ungenau sind, die Rundung dies nicht besser macht. Es kann sinnvoll sein, beim schriftlichen Rechnen, Wurzeln lange als solche stehen zu lassen.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

1.2.3. Logarithmen

Erläuterung 1.12: Logarithmen v1

Addieren und Subtrahieren sind umgekehrte Operationen, sie heben sich gegensätzlich auf:

$3 + 5 - 5 = 3$

Genauso sind Multiplizieren und Dividieren zueinander umgekehrt:

$3 \cdot 5 \div 5 = 3$

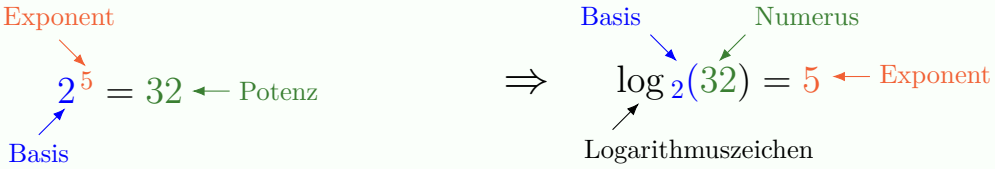
Beim Potenzieren sind Basis und Exponent gegeben, man sucht das Ergebnis (die Potenz). Das Potenzieren hat – anders als die Addition und die Multiplikation – zwei Umkehrungen:

a) Gegeben sind Potenz und Exponent, gesucht ist die Basis. Diese Operation nennt man Wurzelziehen oder *Radizieren.*

b) Gegeben sind Potenz und Basis; gesucht ist der Exponent. Diese Operation nennt man *Logarithmieren.*

Die Potenz nennt man beim Logarithmieren *Numerus.*

Beim Logarithmieren sucht man also nach der Lösung der Frage „Mit welche Zahl muss man die *Basis* hochnehmen, damit sich der *Numerus* ergibt?“



Die Klammern um den Numerus werden häufig weg gelassen.

Häufige Logarithmen sind solche mit Basis = 10, e, oder 2 ($e \approx 2{,}718\,28$ ist die *Eulersche Zahl*). Für diese gibt es abgekürzte Schreibweisen:

$\lg := \log_{10}$

$\ln := \log_e$

$\mathrm{lb} = \mathrm{ld} := \log_2$

Anmerkung: Vorgenannte Notation findet sich im deutschen und nicht-angelsächsischen Bereich. Im angelsächsischen Bereich bezeichnet log *zumeist den natürlichen Logarithmus* ln. *Dies sollten Sie z. B. bei der Verwendung von Wolfram Alpha beachten.*

Übungsaufgabe 1.22: Logarithmen (1) v1

Berechnen Sie im Kopf (also **ohne Verwendung eines Taschenrechners**):

a) $\log_{10} 10 = ??$

b) $\log_2(8) = ??$

c) $\mathrm{ld}(32) = ??$

d) $\ln(e) = ??$

e) $\log_{10}(1) = ??$

f) $\log_2(4^4) = ??$

g) $\log_3(1/9) = ??$

h) $\ln(1/e) = ??$

i) $\mathrm{ld}(32 \cdot 256) = ??$

j) $\mathrm{ld}(x \cdot 4) = ??$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 1.23: Logarithmen (2) v1

Verwandeln Sie folgende Potenzgleichungen in Logarithmengleichungen:
(Beispiel: $3^2 = 9 \;\rightarrow\; \log_3 9 = 2$)

a) $2^6 = 64$ $\rightarrow$??

b) $3^3 = 27$ $\rightarrow$??

c) $4^4 = 256$ $\rightarrow$??

d) $9^0 = 1$ $\rightarrow$??

e) $8^1 = 8$ $\rightarrow$??

f) $3^{-1} = 1/3$ $\rightarrow$??

g) $10^{-3} = 0{,}001$ $\rightarrow$??

h) $2^{-5} = 1/32$ $\rightarrow$??

i) $36^{0,5} = 6$ $\rightarrow$??

j) $243^{0,2} = 3$ $\rightarrow$??

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 1.24: Logarithmen (3) v1

Verwandeln Sie folgende Logarithmengleichungen in Potenzgleichungen:

a) $\log_3 81 = 4$ $\rightarrow$??

b) $\log_4 64 = 3$ $\rightarrow$??

c) $\log_6 36 = 2$ $\rightarrow$??

d) $\log_2 64 = 6$ $\rightarrow$??

e) $\log_8 1 = 0$ $\rightarrow$??

f) $\log_5 5 = 1$ $\rightarrow$??

g) $\log_3 9 = 2$ $\rightarrow$??

h) $\log_7 49 = 2$ $\rightarrow$??

i) $\log_9 3 = 0{,}5$ $\rightarrow$??

j) $\log_{64} 2 = 1/6$ $\rightarrow$??

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 1.25: Logarithmen (4) v1

Berechnen Sie **ohne Taschenrechner** und machen Sie die Probe:

a) $\log_2 8 =$ $\rightarrow$??

b) $\log_{10} 100 =$ $\rightarrow$??

c) $\log_3 81 =$ $\rightarrow$??

d) $\log_5 \dfrac{1}{25} =$ $\rightarrow$??

e) $\log_6 1 =$ $\rightarrow$??

f) $\log_2 \sqrt[3]{16} =$ $\rightarrow$??

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

g) $\log_2 16 =$ $\rightarrow$??
h) $\log_3 27 =$ $\rightarrow$??
i) $\log_{10} 10000 =$ $\rightarrow$??
j) $\log_{10} 0{,}1 =$ $\rightarrow$??
k) $\log_{10} 0{,}001 =$ $\rightarrow$??
l) $\log_5 0{,}2 =$ $\rightarrow$??
m) $\log_2 0{,}5 =$ $\rightarrow$??
n) $\log_2 0{,}125 =$ $\rightarrow$??
o) $\log_3 {}^1\!/_{27} =$ $\rightarrow$??
p) $\log_2 {}^1\!/_{256} =$ $\rightarrow$??

Hier geht es zur Musterlösung.

1.2.4. Gemischte Aufgaben

Übungsaufgabe 1.26: Gemischte Aufgaben v1

a) $2 \cdot \mathrm{ld}(1024) - 8 = ??$

b) $\dfrac{e^{\ln(\pi)}}{33^{\log_{33}\pi}} = ??$

c) $\dfrac{2^3}{9-4} \cdot e^{\ln 5/8} = ??$

d) $\pi + \ln \dfrac{e^5}{e^\pi} - \dfrac{2^3+7}{3} = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Erläuterung 1.13: Fertigungstechnik (Bereich Umformung) v1

Sie werden im Modul Fertigungstechnik später noch Hintergründe und Herleitung erfahren, aber soviel sei vorweggenommen:

Eine wichtige Beschreibungsgröße beim Umformen von Werkstücken ist der Umformgrad $\varphi = \ln(x_n/x_v)$, mit x als dem jeweiligen Maß und den Indizes $n = nachher$, $v = vorher$.

Ein Dickdraht, der von 1 m auf 120 m gezogen wird, erfährt in Längsrichtung L den Umformgrad $\varphi_l = \ln(120/1) = \ln(120) \approx 4{,}78749$. In erster Näherung – die Einschränkungen lernen Sie noch – gilt die Inkompressibilität der üblichen Werkstoffe. Daher muss der Querschnitt A (wie auch immer der war) auf $\frac{1}{120}$ reduziert sein. Für den Querschnitt gilt $\varphi_A = \ln\left(\frac{1}{120}\right) = -\ln(120) \approx -4{,}78749$.

Wie Sie sehen, summieren sich die Umformgrade zu Null. Dies liegt an der postulierten Inkompressiblität $V_n = V_v$, die zu einem $\varphi_V = ln(1/1) = 0$ führt.

Was, wenn ich aber nicht den Querschnitt, sondern dessen Tiefe und Breite betrachte?

O. B. d. A. nehmen wir (Draht) einen Kreis als Querschnitt an. Der Durchmesser D geht somit $D \sim \sqrt{A}$ aus $A \sim D^2$. Die Quadratwurzel entspricht der Potenz $^1/_2$. Somit ergibt sich

$$\varphi_D = \ln\left(\frac{1^{1/2}}{120^{1/2}}\right) = \ln\left(1^{1/2}\right) - \ln\left(120^{1/2}\right) = \ln(1) - \ln\left(120^{1/2}\right)$$
$$= 0 - \ln\left(120^{1/2}\right) = -\ln\left(120^{1/2}\right) = -\ln(120) \cdot {}^1/_2$$

Daraus ergibt sich $\Sigma_{\text{Umformrichtungen}} = \varphi_l + \varphi_D + \varphi_D = 0$ qed.

Übungsaufgabe 1.27: Rechnen mit Logarithmen v1

a) Bestimme $\log_{10}(100)$. ??

b) Bestimme $\log_2(16)$. ??

c) Bestimme $\log_3(27)$. ??

d) Bestimme $\log_5(125)$. ??

e) Bestimme $\log_2(32)$. ??

f) Bestimme $\log_{10}(1000)$. ??

g) Bestimme $\log_4(64)$. ??

h) Bestimme $\log_2(8)$. ??

i) Bestimme $\log_{10}(1)$. ??

j) Bestimme $\log_7(49)$. ??

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 1.28: Textbeispiele aus der Umformung v1

Nachfolgend geht es auch darum, die relevanten Informationen zu entdecken! Auch geht es darum, mit dem Logarithmus zu rechnen, nicht darum, den Taschenrechner zu nutzen.

In Prüfungen bitte die Wünsche des Prüfers beachten!

a) Ein Stahlblock wird von 7 m auf 140 m zu einer Schiene gewalzt. Wie sind die Umformgrade in der Länge und im mittleren Querschnitt? ??

b) Eine Bramme wird in einer Walzanlage über 24 Stufen von 80 cm auf 20 cm reduziert. Es findet keine Breitung statt. Wie sind die Umformgrade in Länge, Breite und Höhe, wie viel länger ist das Stück nach dem Walzen? ??

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

c) Ein Alu-Blech wird in 54 Schritten von 50 mm auf 0,05 mm heruntergewalzt. Breitung wird vernachlässigt. Es wird mit 1 m/s eingezogen. Wie schnell kommt es heraus? Berechnen Sie die Umformgrade. ??

d) Ein Alu-Block wird in einem Schritten zum Profil eines Fußballtores strangepresst. Der Durchmesser des Blocks sind 270 mm. Die Querschnittsfläche des Profils beträgt ca. 573 mm^2.
Er wird mit 1 m/s Vorschub eingepresst. Wie schnell kommt es heraus? Berechnen Sie die Umformgrade. ??

e) Für einen Werkstoff ist als maximaler Umformgrad 1 angegeben. Danach muss er zwischengeglüht werden, um wieder umformbar zu sein.
Sie wollen einen Stab auf die 6-fache Länge ziehen. Sie beginnen im geglühten Zustand. Wie oft müssen Sie zwischenglühen? ??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

1.3. Variablen und Terme

1.3.1. Variable

Erläuterung 1.14: Variablen v1

Eine Variable in mathematischen Ausdrücken ist ein Platzhalter, für den beliebige Zahlen oder andere Ausdrücke (z. B. Vektoren oder Matrizen) eingesetzt werden können.

Die Variable wird meistens durch einen Buchstaben (z. B. x oder y, a, b, …) dargestellt.

Für den gleichen Buchstaben müssen auch immer die gleichen Zahlen eingesetzt werden.

Beispiele: $x + x + x = 3 \cdot x = 3x$
$x \cdot x \cdot x + 3 \cdot x^3 = x^3 + 3 \cdot x^3 = 4 \cdot x^3 = 4x^3$

Das Multiplikationszeichen $\cdot$ (Punkt) kann weggelassen werden: z. B. $3 \cdot x = 3x$.

Übungsaufgabe 1.29: Variable v1

Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie so weit wie möglich zusammen:

a) $-(-x) - 2x + x = ??$

b) $x \cdot x^3 + 2x^2x^2 - 5x^4 = ??$

c) $(-x)(-y) = ??$

d) $(a^b)^{(c+d)} = ??$

e) $(a + b)^2 = ??$

f) $(e^{\ln(x^2)} - 2x^2) \cdot x + x^3 = ??$

g) $(x - y)^2 - y^2 + 2xy = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

1.3.2. Terme

Erläuterung 1.15: Terme v1

Ein *Term* eine sinnvolle Kombination aus Zahlen, Variablen, Symbolen für mathematische Verknüpfungen und Klammern.

In der Praxis wird der Begriff häufig benutzt, um über einzelne Bestandteile einer Formel oder eines größeren Terms zu reden. So kann man bspw. für die lineare Funktion $f(x) = m \cdot x + b$ von einem linearen Term $m \cdot x$ und einem konstanten Term b reden[1.1].

Terme können benannt werden, z. B. $T_1 = 25 + 3 \cdot 12$ oder $T_2 = 2 \cdot x$; optional können Terme mit Variablen gekennzeichnet werden, z. b. $T(x) = 12 \cdot x + 17$ oder $T_5(a, b) = a^2 + 4 \cdot b$.

Übungsaufgabe 1.30: Terme v2

Gegeben sind die Terme $T_1 = 2 + 7$, $T_2 = 4 \cdot x - 1$, $T_3 = 8 \cdot y + 5$, $T_4 = -2 \cdot x - 3 \cdot y + 25$.

Fassen Sie so weit wie möglich zusammen:

a) $T_1 - T_2 + T_3 = ??$

[1.1] https://de.wikipedia.org/wiki/Term; Abruf 2023-06-07.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

b) $-T_2 + T_4 = ??$

c) $T_2 + T_3 - T_4 = ??$

d) $T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = ??$

e) $T_1 \cdot T_2 + T_3 \cdot T_4 = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 1.31: Rechnen mit Termen (1) v1

[**OpenAI2024f**] a) Vereinfache den Term: $3x + 4x - 2x + 5$. ??

b) Berechne den Term für $x = 2$: $2x^2 + 3x - 5$. ??

c) Vereinfache den Term: $5a - 3b + 2a + 7b$. ??

d) Multipliziere aus: $(x + 2)(x - 3)$. ??

e) Faktorisieren Sie den Term: $x^2 - 9$. ??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

1.3.3. Grundlegende Rechengesetze der Algebra

Erläuterung 1.16: Algebraische Rechenregeln v1

Kommutativgesetz: $a+b=b+a$ und $a\cdot b=b\cdot a$

Assoziativgesetz: $(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c$ und $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)=a\cdot b\cdot c$.

Beispiele: $x+3+x+3=x+x+3+3=2x+6$
$x\cdot 4\cdot x\cdot 2\cdot x\cdot 5=40x^3$

Distributivgesetz: $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$ und $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

Beispiele: $2\cdot(x+3)=2\cdot x+6$
$(x^2+4)\cdot 6=6\cdot x^2+24$
$(a+b)\cdot(a+b)=(a+b)\cdot a+(a+b)\cdot b=a^2+a\cdot b+b\cdot a+b^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$
(1. Binomische Formel)

Übungsaufgabe 1.32: Rechnen mit Termen (2) v1

Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie so weit wie möglich zusammen:

a) $-(-x)-2x+x=??$

b) $(-x)(-y)=??$

c) $\sqrt{25}-\sqrt{9}-\sqrt{4}=??$

d) $(s+t)(s+t)+(s-t)(s-t)+2(s+t)(s-t)=??$

e) $(2s-3t)(3s-2t)-6(s-t)(s+t)-12t(t-s)+st=??$

f) $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)+\beta^2=??$

g) $64x^{12}y+128x^{11}y-32x^{10}y=??$

h) $2\cos(a)\cos(b)+\cos(a)^2+\cos(b)^2=??$

i) $\ln(1)\cdot\left[\cosh\big(\ln(e^y)\big)\cdot\sin(e^{\ln y})+\dfrac{1}{\cosh\big(\ln(e^y)\big)\cdot\sin\big(e^{\ln y}\big)}\right]=??$

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 1.33: Zins und Zinseszins v1

[**OpenAI2024a**] a) Ein Anleger investiert 1.000 Euro zu einem Zinssatz von 5% pro Jahr. Wie hoch ist das Kapital nach 3 Jahren bei jährlicher Verzinsung? ??

b) Ein Betrag von 5.000 Euro wird für 4 Jahre zu einem Zinssatz von 3% pro Jahr angelegt. Wie hoch ist das Endkapital? ??

c) Ein Kredit von 10.000 Euro wird mit 7% verzinst. Wie viel Zinsen fallen nach 2 Jahren an? ??

d) Ein Betrag von 8.000 Euro wird für 5 Jahre bei einem Zinssatz von 4% pro Jahr angelegt. Berechne das Endkapital bei jährlicher Verzinsung. ??

e) Ein Anleger möchte nach 6 Jahren 15.000 Euro erhalten. Zu welchem Zinssatz muss er einen Betrag von 12.000 Euro anlegen? ??

f) Ein Kredit über 20.000 Euro wird mit 5% verzinst. Wie hoch ist das Kapital nach 3 Jahren bei Zinseszinsberechnung? ??

g) Ein Anleger investiert 15.000 Euro für 7 Jahre zu einem Zinssatz von 4%. Wie hoch ist der Zinsertrag nach 7 Jahren? ??

h) Ein Betrag von 25.000 Euro wird für 8 Jahre zu einem Zinssatz von 3% angelegt. Welcher Betrag muss nach 8 Jahren zurückgezahlt werden? ??

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

i) Ein Darlehen von 30.000 Euro wird für 5 Jahre zu 6% verzinst. Wie hoch ist der Endbetrag bei jährlicher Verzinsung? ??

j) Ein Investor legt 50.000 Euro für 10 Jahre zu einem Zinssatz von 4% pro Jahr an. Wie hoch ist das Kapital nach 10 Jahren? ??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

2. Logische Grundbegriffe

2.1. Aussagen und Aussageformen

Erläuterung 2.1: Logische Aussagen v1

Eine **Aussage** ist ein sprachliches Gebilde, von dem es sinnvoll ist, zu fragen, ob es *wahr* oder *falsch* ist.

Eine **Aussageform** ist eine Aussage mit Platzhaltern.

Eine **Tautologie** ist eine stets wahre Aussage oder eine Aussageform, die bei beliebiger Belegung der Platzhalter stets eine wahre Aussage ergibt.

Eine **Kontradiktion** ist eine stets falsche Aussage oder eine Aussageform, die bei beliebiger Belegung der Platzhalter stets eine falsche Aussage ergibt.

Übungsaufgabe 2.1: Logische Aussagen v1

Welche der folgenden sprachlichen Sätze sind **Aussagen**?

a) Prost! → ??

b) Wie viel Uhr ist es? → ??

c) Gustav liebt Hilda. → ??

d) $5 \cdot 10 + x^2$. → ??

e) Morgen ist Sonntag. → ??

f) Mach doch bitte die Tür hinter Dir zu. → ??

g) Mein Name ist Hase. → ??

h) Zu Fuß ist es weiter als über den Berg. → ??

i) Gute Nacht, Freunde! → ??

j) Es gibt keine gerade Primzahl. → ??

k) Wie spät ist es? → ??

l) Das Auto ist 3 Jahre alt. → ??

m) Alle Menschen sind verheiratet. → ??

n) $5 + 4 = 9$. → ??

o) Das Regal wiegt 80 kg. → ??

p) Nachts ist es kälter als draußen. → ??

q) Alle Tappel sind Deppel. → ??

r) 5+7+8+9+10. → ??

s) Morgen wird die Sonne wieder scheinen. → ??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Übungsaufgabe 2.2: Wahrheitsgehalt logischer Aussagen v1

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

a) Paris ist eine Hauptstadt. → ??

b) Alle Primzahlen sind gerade. → ??

c) 1970 ist eine ganze Zahl. → ??

d) $10 > 100$. → ??

e) $6 < 7 < 5$. → ??

f) $\sqrt{7} = 3$. → ??

g) Berlin liegt in Bayern. → ??

h) Frankfurt liegt am Rhein. → ??

i) Alle Menschen sind gesund. → ??

j) Alle Rechtecke sind Parallelogramme. → ??

k) Die Quadratur des Kreises ist mit Zirkel und Lineal möglich. → ??

l) Brüssel ist die Hauptstadt von Belgien. → ??

m) Manche Menschen sind größer als andere. → ??

n) Der Februar hat mehr Tage als der Januar. → ??

o) $5 + 7 + 8 = 20$. → ??

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 2.3: Aussageformen v1

Für welche Belegung der Platzhalter werden die folgenden Aussageformen wahre Aussagen? Je ein Beispiel reicht aus.

a) X ist eine Hauptstadt. → ??

b) Z hat mehr Tage als der Februar. → ??

c) A ist eine Primzahl. → ??

d) Y ist eine ganze Zahl. → ??

e) Z liegt am Rhein. → ??

f) D ist die Hauptstadt von Italien. → ??

g) x ist kleiner als 25. → ??

h) V war deutscher Bundeskanzler. → ??

i) X und Y sind Module im ersten Semester. → ??

j) X ist doppelt so groß wie Y. → ??

k) a ist durch x teilbar. → ??

l) Wenn eine Zahl durch $a \cdot b$ teilbar ist, dann ist sie auch durch a und b teilbar. → ??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

2.2. Tautologien

Übungsaufgabe 2.4: Tautologien (1) v1

Welche der nachfolgenden Aussagen bzw. Aussageformen sind Tautologien?

a) Tautologien sind Tautologien. → ??

b) Wenn x eine Primzahl ist, dann ist x nicht durch 2 teilbar. → ??

c) $a + b = b + a$. → ??

d) Wenn der Hahn kräht auf dem Mist, ändert sich das Wetter – oder es bleibt, wie es ist. → ??

e) Wenn es regnet, dann regnet es. → ??

f) $\sqrt{4} = 2$. → ??

g) Wenn eine Zahl durch $a \cdot b$ teilbar ist, dann ist sie auch durch a und b teilbar. → ??

h) Heute ist Montag oder ein anderer Wochentag. → ??

Hier geht es zur Musterlösung.

2.3. Kontradiktionen

Übungsaufgabe 2.5: Kontradiktionen v1

Welche der nachfolgenden Aussagen bzw. Aussageformen sind Kontradiktionen?

a) Äpfel sind Birnen. → ??

b) Äpfel sind Rosengewächse. → ??

c) Granatäpfel sind Äpfel. → ??

d) Ich bin ein Gelbfuß - Gelbfüße lügen immer. → ??

e) Ich bin ein Schwarzfuß - Schwarzfüße sagen immer die Wahrheit. → ??

f) 1 ist 0. → ??

g) Wahr ist Falsch. → ??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

2.4. Symbole und Gesetze der Aussagenlogik

Erläuterung 2.2: Symbole und Gesetze der Aussagenlogik v1

Symbole der Aussagenlogik:

$\neg$ Verneinung (Negation)

$\neg A$ ist genau dann wahr, wenn A falsch ist, und umgekehrt.

$\wedge$ UND-Junktor (Konjunktion)

$A \wedge B$ ist dann und nur dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr sind.

$\vee$ ODER-Junktor (Disjunktion)

$A \vee B$ ist dann wahr, wenn A oder B oder beide wahr sind.

$\rightarrow$ Folgerung (Implikation)

$A \rightarrow B$ ist dann wahr, wenn A falsch ist oder wenn A und B wahr sind.

$\leftrightarrow$ Gleichwertigkeit (Äquivalenz)

$A \leftrightarrow B$ ist dann wahr, wenn A und B denselben Wahrheitsgehalt haben.

Rechenregeln der Aussagenlogik

Kommutativgesetze:

$$A \wedge B \quad \leftrightarrow \quad B \wedge A \qquad\qquad A \vee B \quad \leftrightarrow \quad B \vee A$$

Assoziativgesetze:

$$\begin{array}{lllll} (A \wedge B) \wedge C & \leftrightarrow & A \wedge (B \wedge C) & \leftrightarrow & A \wedge B \wedge C \\ (A \vee B) \vee C & \leftrightarrow & A \vee (B \vee C) & \leftrightarrow & A \vee B \vee C \end{array}$$

Distributivgesetze:

$$\begin{array}{lll} A \wedge (B \vee C) & \leftrightarrow & (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\ A \vee (B \wedge C) & \leftrightarrow & (A \vee B) \wedge (A \vee C) \end{array}$$

Übungsaufgabe 2.6: Korrekte Syntax v1

Welche der folgenden Ausdrücke sind syntaktisch korrekte Formeln über den atomaren Formeln A, B und C?
Achtung! Es geht um syntaktische Korrektheit, nicht um logische Sinnhaftigkeit.

a) $\big(C \wedge (A \neg B)\big)$ $\rightarrow$??

b) $\Big(\big((\neg A) \vee B\big) \wedge \big((C \wedge A) \vee (C \vee D)\big)\Big)$ $\rightarrow$??

c) $\Big(\Big(\neg\big((\neg B) \vee (\neg B)\big)\Big) \wedge \Big(\big(\neg\,(C \vee A)\big)\Big)$ $\rightarrow$??

d) $\big(\neg(A \vee B \vee C)\big)$??

e) $\big(\neg(A \vee B \vee C)\big) \wedge \big((A \vee B \vee C)\big)$??

f) $\big(\neg(A \vee (\neg B) \vee (\neg C))\big) \wedge \big(((\neg A) \vee B \vee C)\big)$??

g) $\big(\neg(A \vee (\neg B) \vee (\neg C))\big) \wedge \big(((\neg A) \vee E \vee C)\big)$??

h) $\big(\neg(A \vee (\neg B) \vee (\neg C))\big) \leftrightarrow \big(((\neg A) \vee B \vee C)\big)$??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Übungsaufgabe 2.7: Aussagenlogische Formeln v1

Gegeben seien die falsche Aussage A und die wahre Aussage B:

A: Die Schweiz ist Mitglied der Europäischen Union.
B: Deutschland ist Mitglied der Europäischen Union.

Sind die folgenden aussagenlogischen Formeln wahr oder falsch?

a) $A \vee B$ $\rightarrow$??

b) $A \wedge B$ $\rightarrow$??

c) $(\neg A) \vee B$ $\rightarrow$??

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 2.8: Formalisieren sprachlicher Aussagen v1

Formalisieren Sie die folgende Aussage:

> „Wenn ein hartgekochtes Ei nicht mit kaltem Wasser abgeschreckt wird, dann klebt die Schale am Eiweiß und das Ei lässt sich nicht gut schälen."

Hier geht es zur Musterlösung.

Erläuterung 2.3: Anwendung CAD-Systeme v1

CAD-Systeme basieren auf Körpermodellen. Vergleichsweise einfache Grundkörper werden durch die Methoden der Aussagenlogik und Mengenlehre kombiniert, um komplexe Bauteile zu erzeugen. In der Anwendung ist zu beachten, dass die Aussagenlogik immanent ist und z. B. bei weiterführenden Anwendungen auf Basis des CAD-Modells wie FEM oder BEM sehr relevant sind.

Weiteres finden Sie unter **??**.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

2.5. Wahrheitstabellen

Erläuterung 2.4: Wahrheitstabellen v1

Mit *Wahrheitstabellen* kann man logische Aussagen darstellen und logische Aussagen beweisen.

Eine Wahrheitstabelle beinhaltet sämtliche Möglichkeiten. Den Wahrheitsgehalt kann man – je nach Vorliebe – bsp. mit 0 und 1, oder mit F und W, oder ... bezeichnen.

Beispiele:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

Übungsaufgabe 2.9: Wahrheitstafel v1

Zeigen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel den Wahrheitswert folgender Aussage:

$A \wedge (B \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge B) \wedge (A \wedge C)$

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 2.10: Tautologien (2) v1

Sind die folgenden Aussageformen Tautologien? Begründen Sie Ihre Antwort!

a) $A \vee (A \wedge B) \quad \rightarrow \quad A \qquad \rightarrow$??

b) $A \wedge \big((\neg A) \vee B\big) \quad \rightarrow \quad A \wedge B \qquad \rightarrow$??

c) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \quad \rightarrow \quad A \wedge (B \vee C) \qquad \rightarrow$??

d) $(A \wedge B) \vee (C \wedge D) \quad \rightarrow \quad (A \vee C) \wedge (B \vee C) \wedge (A \vee D) \wedge (B \vee D) \qquad \rightarrow$??

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 2.11: äquivalente Formeln v1

Zeigen Sie, dass sich zu jeder aussagenlogischen Formel eine semantisch äquivalente Formel finden lässt, die nur aus den Konstruktionselementen „*falsch*“ und Implikationspfeilen „$\rightarrow$“ besteht.

Hinweis: Wie kann man für zwei beliebige Formeln F und G die Formeln $\neg F$, $F \wedge G$, $F \vee G$ in ausschließlich „*falsch*“ und „$\rightarrow$“ darstellen? Warum reicht dies?

Hinweis: Falls Sie „*wahr*“ benötigen: Denken Sie z. B. an $(\mathit{falsch} \rightarrow \mathit{falsch})$.Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Übungsaufgabe 2.12: Bedienungsanleitung v1

In einem technischen Dokument stehen die folgenden Aussagen:

1. If the file system is not locked, then
   a) new messages will be queued;
   b) new messages will be sent to the message buffer;
   c) the system is functioning normally, and conversely.
2. If new messages are not queued, then they will be sent to the message buffer.
3. New messages will not be sent to the message buffer.

Sind diese Spezifikationen konsistent, oder gibt es einen inneren Widerspruch?

a. Übersetzen Sie zunächst die einzelnen Teile der Spezifikation in Formeln der Aussagenlogik. Verwenden Sie dazu die folgenden vier Aussagen:

   L für „File system locked“;
   Q für „New Messages re-queued.“;
   B für „New messages are sent to the message buffer.“;
   N für „System functioning normally.“

b. Die Spezifikation ist konsistent, wenn es eine Zuweisung von Wahrheitswerten zu den Aussagen gibt, so dass jeder der logischen Ausdrücke wahr ist. Verwenden Sie eine Wahrheitstabelle, um festzustellen, ob die Spezifikation konsistent ist.

c. Kann man auch ohne eine Wahrheitstabelle herausfinden, ob die Spezifikation konsistent ist? Nehmen Sie dazu die aufgestellten Formeln, und versuchen Sie, mit einer geschickten Argumentation ohne Tabelle zum Ergebnis zu kommen.

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

2.6. Prädikatenlogik 1. Stufe

Erläuterung 2.5: Prädikatenlogik v1

Die Prädikatenlogik erster Stufe erweitert die Aussagenlogik um die Möglichkeit, Aussagen über Objekte und deren Beziehungen zu machen. Im Gegensatz zur Aussagenlogik, die nur ganze Aussagen als wahr oder falsch beurteilt, arbeitet die Prädikatenlogik mit:

- **Prädikaten:** Funktionen, die Aussagen über Objekte machen.
  Ein Prädikat ist eine Aussagevariable, die in Abhängigkeit von den Werten ihrer Argumente wahr oder falsch sein kann.
  Zum Beispiel: $P(x)$ könnte bedeuten „x ist eine Primzahl“.
- **Quantoren:** Symbole, die angeben, wie weit eine Aussage für alle oder für einige Objekte gilt.
  Die zwei Hauptquantoren sind:

$\forall$	All-Quantor	Für alle (Variablenname) gilt: ... Beispiel: $\forall x\, P(x)$ bedeutet „Für alle x gilt $P(x)$“.
$\exists$	Existenz-Quantor	Es gibt mindestens ein (Variablenname), für das gilt: ... Beispiel: $\exists x\, P(x)$ bedeutet „Es existiert ein x, für das $P(x)$ gilt“.

- **Variablen:** Platzhalter für Objekte, die in den Prädikaten verwendet werden.
  Zum Beispiel ist x eine Variable in $P(x)$.

Merke: Die Negation einer Allaussage ist eine Existenzaussage; die Negation einer Existenzaussage ist eine Allaussage:

$$\overline{\forall x \in X,\ P(x)} \ = \ \exists x \in X,\ \overline{P(x)}$$
$$\overline{\exists x \in X,\ P(x)} \ = \ \forall x \in X,\ \overline{P(x)}$$

Übungsaufgabe 2.13: Prädikatenlogik (1) v1

a) Zeigen Sie, dass die folgende Aussage wahr ist: $\forall x\,(x^2 \geq 0)$. ??

b) Beweisen Sie die folgende Existenzbehauptung: $\exists x\,(x^2 = 4)$. ??

c) Überprüfen Sie die Gültigkeit der Aussage

$$\forall x\,\big(\exists y\,(y = x + 1)\big).$$

Präzisierung: Wir lesen die Quantoren mit einer festen Grundmenge D und schreiben

$$\forall x \in D\ \exists y \in D\ (y = x + 1).$$

??

d) Widerlegen oder bestätigen Sie die folgende Aussage: $\exists x\,\forall y\,(x \geq y)$. ??

e) Bestimmen Sie den Wahrheitsgehalt der folgenden Aussage: $\forall x\,\exists y\,(y > x)$. ??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Übungsaufgabe 2.14: Prädikatenlogik (2) v1

Negieren Sie die nachfolgenden Aussagen und ermitteln Sie jeweils den Wahrheitsgehalt der negierten Aussage.

a) Negieren Sie die folgende Aussage: $\forall x\,(x^2 > 0)$. ??

b) Negieren Sie die folgende Aussage: $\exists x\,(x^2 = 4)$. ??

c) Negieren Sie die folgende Aussage: $\forall x\,(\exists y\,(y \geq x))$. ??

d) Negieren Sie die folgende Aussage: $\exists x\,\forall y\,(x > y)$. ??

e) Negieren Sie die folgende Aussage: $\forall x\,\exists y\,(y = x + 2)$. ??

f) Negieren Sie die folgende Aussage: $n \geq n_0 \;\Rightarrow\; |\,a_n\,| < \varepsilon$. ??

g) Negieren Sie die folgende Aussage: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N} A(n, n_0)$ gilt. ??

h) Negieren Sie die folgende Aussage: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n \geq n_0 \;\Rightarrow\; |\,a_n\,| < \varepsilon$. Beschreiben Sie mit Worten, was die inhaltliche Bedeutung dieser Aussage ist. ??

Hier geht es zur Musterlösung.

Hinweis 2.1: Weitere Aufgaben

Suchen Sie auch selber nach weiteren Übungsaufgaben. Hier eine kleine Auswahl (alle Links zuletzt geprüft am 2025-08-25):

https://vowi.fsinf.at/images/c/c8/TU_Wien-Formale_Modellierung_VU_%28Salzer%29_-_Musterbeispiele_Aussagenlogik_2011W_L%C3%B6sung.pdf

http://homepages.fh-giessen.de/~hg8070/dm11/ueb01lsg.pdf

http://www.mathods.com/mathe.php?con=Logik+%26+Mengen&can=Aussagenlogik&cun=Wahrheitstafel

http://www.namzu.de/skripte/logik/logik-aufgaben-loesungen.html

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

2.7. Mathematisches Beweisen

2.7.1. Direktes Beweisen

Erläuterung 2.6: Direktes Beweisen v1

Direktes Beweisen bedeutet, eine Schlussfolgerung unmittelbar aus einer gegebenen Aussage abzuleiten, ohne auf Umwege oder zusätzliche Annahmen zu gehen. Es folgt einem typischen Aufbau:

Gegebene Aussage (A)
Ziel: Behauptung B, die direkt aus A folgt
Beweisidee: Zeige präzise, dass A erfüllt ist und daraus zwingend B folgt

Ein häufiges Muster:

1. Hypothese oder Annahme festlegen
2. Logische Schritte, die direkt aus diesen Annahmen ableitbar sind
3. Abschluss, dass B wahr ist, ohne Zwischenschritte zu verwenden, die nicht direkt aus A folgen

Woran man gutes direktes Beweisen erkennt:

- Jeder Schritt ist durch eine klare Regel oder Definition gerechtfertigt.
- Es gibt keine Umwege über Widersprüche oder Reduktionen.
- Die Schlussfolgerung B wird unmittelbar aus A abgeleitet.

Beispiel 2.1: Direktes Beweisen v1

Beispiel (Mathe, Induktion oder Logik vermeiden, aber einfach):

Gegebene Aussage: Wenn $x \neq 0$, dann gilt $1/x \neq 0$.
Direkter Beweis: Angenommen $x \neq 0$. Dann ist $1/x$ definiert. Da es sich um das Produkt von 1 und $1/x$ handelt, und $1 \neq 0$, folgt $1/x \neq 0$.
Also gilt die Behauptung.

Übungsaufgabe 2.15: Direktes Beweisen v1

a) Vereinfache den Bruch $18/24$. ??.

b) Beweise die Gültigkeit der Aussage: Wenn eine Zahl positiv ist, dann ist sie größer als 0. ??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

2.7.2. Indirektes Beweisen

Erläuterung 2.7: Indirektes Beweisen v1

Indirektes Beweisen, auch Reductio ad absurdum genannt, ist eine Beweisstrategie, bei der man zeigt, dass eine Behauptung wahr sein muss, indem man annimmt, dass sie falsch ist, und dann einen Widerspruch ableitet.

So funktioniert es typischerweise:

Behauptung: P soll wahr gezeigt werden.
Annahme zur Negation: Man nimmt an $\neg P$ an.
Folgerung: Aus dieser Annahme werden logische Schritte durchgeführt, oft unter Nutzung von bereits bekannten Aussagen oder Axiomen.
Widerspruch: Man zeigt, dass aus $\neg P$ ein Widerspruch folgt (z. B. eine Aussage und ihr logischer Gegenbeweis, oder eine Ungleichung, die unmöglich ist). Schlussfolgerung: Da $\neg P$ zu einem Widerspruch führt, muss P wahr sein.

Typische Formen:

Beweis durch Widerspruch: Direkte Beweisführung scheitert, also nimmt man $\neg P$ an. Doppelte Reduktion (Reductio ad absurdum): Man zeigt, dass $\neg P$ zu einer unmöglichen oder inkonsistenten Situation führt.
Beweis durch Kontraposition: Oft zusammen mit indirektem Beweisen; man zeigt, dass $\neg P$ impliziert $\neg Q$, und dass Q wahr ist, damit folgt P.

Einfache Beispiele:

Mathematik: Um zu zeigen, dass $\sqrt{2}$ irrational ist, nimmt man an, dass es rational ist (also als Bruch $\frac{a}{b}$ reduzierbar dargestellt), und zeigt, dass dies zu einem Widerspruch führt.
Logik: Um zu beweisen, dass eine Folgerung gültig ist, nimmt man die Negation der Folgerung an und zeigt, dass sie den Prämissen widerspricht.

Vorteile:

Oft nützlich, wenn direkter Beweis schwer oder unmöglich ist. Klärt oft die Struktur einer Behauptung durch das Ausschließen der Gegenteile.

Nachteile:

Kann schwer zu verfolgen sein, weil man sich mit Widersprüchen auseinander setzen muss. Manchmal ist der Widerspruch subtil; Sorgfalt nötig, um gültig zu schließen.

Beispiel 2.2: Direktes Beweisen v1

Beispiel (Mathe, Induktion oder Logik vermeiden, aber einfach):

Gegebene Aussage: Wenn $x \neq 0$, dann gilt $1/x \neq 0$.
Direkter Beweis: Angenommen $x \neq 0$. Dann ist $1/x$ definiert. Da es sich um das Produkt von 1 und $1/x$ handelt, und $1 \neq 0$, folgt $1/x \neq 0$.
Also gilt die Behauptung.

Übungsaufgabe 2.16: Indirektes Beweisen v1

a) Behauptung P: Es gibt keine größte natürliche Zahl. ??

b) Behauptung P: Es gibt keine reelle Zahl x mit $0 < x < 1$, die die Gleichung $x^2 = x$ erfüllt. (Klarstellung: Die Gleichung $x^2 = x$ hat im Intervall $[0, 1]$ genau die Lösungen $x = 0$ und $x = 1$.) ??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

2.7.3. Die vollständige Induktion

Erläuterung 2.8: Die vollständige Induktion v1

Die *vollständige Induktion* ist – neben dem direkten und dem indirekten Beweis – eines der drei Beweisverfahren in der Mathematik.

Viele Behauptungen X_n, die einen abzählbaren Parameter $n \geq n_0$ enthalten, lassen sich mit dieser Methode beweisen.[2.1] Die Vorgehensweise ist:

- Es wird bewiesen, dass X für n_0 richtig ist (der *Induktionsanfang*).
- Es wird angenommen, dass für ein $k \geq n_0$ die Behauptung X_k richtig sei (die *Induktionsvoraussetzung* oder *Induktionsannahme*).
- Es wird bewiesen, dass die Implikation $X_k \Rightarrow X_{k+1}$ richtig ist (der *Induktionsschritt*).

Diese Methode basiert auf dem zweiten und dem fünften *Peano-Axiom* sowie der Definition „n' ist der *Nachfolger* von n“. Das fünfte *Peano-Axiom* ist das sog. *Induktionsaxiom*.

(2) $\forall n(n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \in \mathbb{N})$, verbal „Jede natürliche Zahl n hat eine natürliche Zahl n' als Nachfolger.“

(5) $\forall X\Big(0 \in X \wedge \forall n\big(n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n \in X \Rightarrow n' \in X)\big) \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq X\Big)$, verbal „Enthält die Menge X die 0 und mit jeder natürlichen Zahl n auch deren Nachfolger n', so bilden die natürlichen Zahlen eine Teilmenge von X.“

Das ‚Kochrezept‘ für die Vorgehensweise:

- Stelle die Behauptung sauber auf.
- Zeige die Richtigkeit der Behauptung für den Anfangswert n_0 durch ‚Ausrechnen‘.
- Postuliere, dass die Behauptung für ein beliebiges n_k $(n_k \geq n_0)$ richtig sei.
- Zeige, dass dann, wenn die Behauptung für n_k gilt, sie auch für n_{k+1} gilt.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Beispiel 2.3: Beispiel 1 zur vollständigen Induktion v1

Als ein Beispiel hier der Beweis des „kleinen Gauß“: In 1786 wendete der neunjährige Gauß erstmals dokumentiert eine Summenformel für eine Reihe an:[2.2]

- Behauptung: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$ für alle $n \geq 1$.
- Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1) = 1$

  $\Rightarrow$ Die Behauptung ist für $n = 1$ richtig.
- Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung sei bereits für ein gewisses $n_k \geq 1$ bewiesen: $\sum_{k=1}^{n_k} k = \frac{1}{2} \cdot n_k \cdot (n_k + 1)$
- Induktionsschluss: Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n_k+1} k &= \sum_{k=1}^{n_k} k + \sum_{k=n_k+1}^{n_k+1} k \\
&= \sum_{k=1}^{n_k} k + \underbrace{n_k + 1}_{\sum_{k=n_k+1}^{n_k+1} k} \\
&= \underbrace{\frac{1}{2} \cdot n_k \cdot (n_k+1)}_{\text{lt. Voraussetzung}} + n_k + 1 = \frac{1}{2} \cdot (n_k^2 + n_k) + \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot n_k + 2) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (n_k^2 + 3 \cdot n_k + 2) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (n_k+1) \cdot (n_k+2)}_{\sum_{k=1}^{n_k+1}}
\end{aligned}$$

■

[2.1] vgl. Grinberg, Natalia: Lösungsstrategien - Mathematik für Nachdenker; Europa-Lehrmittel Nourney & Vollmer Haan-Gruiten (2019); S. 11 ff.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Beispiel 2.4: Beispiel 2 zur vollständigen Induktion v1

Wir beweisen durch vollständige Induktion, dass $2^n > n^2$ für $n \geq 5$ gilt.[2.3]

Induktionsanfang:
Zunächst überprüfen wir die Behauptung für $n = 5$: $2^5 = 32$ und $5^2 = 25$. Da $32 > 25$, gilt die Aussage für $n = 5$.
Induktionsvoraussetzung/-behauptung:
Angenommen, die Behauptung gilt für ein beliebiges $n \geq 5$, also $2^n > n^2$.
Induktionsschritt: Wir müssen nun zeigen, dass die Behauptung auch für $n+1$ gilt, also $2^{n+1} > (n+1)^2$.
Aus der Induktionsvoraussetzung wissen wir, dass $2^n > n^2$. Nun verwenden wir die Beziehung:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n.$$

Da $2^n > n^2$, folgt:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^2.$$

Wir wollen zeigen, dass $2 \cdot n^2 > (n+1)^2$ für $n \geq 5$.

$$2 \cdot n^2 > (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1.$$

Das bedeutet, wir müssen zeigen:

$$2n^2 > n^2 + 2n + 1.$$

Dies vereinfacht sich zu:

$$n^2 > 2n + 1.$$

Diese Ungleichung gilt für $n \geq 5$, da $5^2 = 25 > 2 \cdot 5 + 1 = 11$, und mit zunehmendem n wird die linke Seite der Ungleichung größer. Somit folgt aus der Induktionsvoraussetzung, dass auch $2^{n+1} > (n+1)^2$ gilt.
Schluss:
Da sowohl der Induktionsanfang als auch der Induktionsschritt gezeigt wurden, gilt nach dem Prinzip der vollständigen Induktion die Behauptung $2^n > n^2$ für alle $n \geq 5$.

[2.2] Quelle: Gemeingut; Sie finden dieses Beispiel in vielen Veröffentlichungen.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Beispiel 2.5: Beispiel 3 zur vollständigen Induktion v1

Ein drittes Beispiel:[2.4]

- Behauptung: n Elemente kann man auf $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n = n!$ verschiedene Arten anordnen.
- Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt: 1 Element lässt sich auf nur eine Art anordnen: $1 = 1! \Rightarrow$ Die Behauptung ist für $n = 1$ richtig.
- Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung sei bereits für ein gewisses $n \geq 1$ bewiesen: n Elemente lassen sich auf $n!$ verschiedene Arten anordnen.
- Induktionsschluss: Gegeben seien die Elemente e_1 bis e_n; diese lassen sich laut der Induktionsvoraussetzung auf $n!$ verschiedene Arten anordnen. Nun kommt ein neues Element e_{n+1} hinzu; für die jetzt $n+1$ Elemente stehen $n+1$ Plätze zur Verfügung.

  Das neue Element e_{n+1} kann zunächst auf irgendeinen dieser $n+1$ Plätze gesetzt werden. Für die restlichen Elemente e_1 bis e_n stehen nun noch jeweils n Plätze zur Verfügung. Dafür gibt es nach Induktionsvoraussetzung $n!$ Möglichkeiten.

  Insgesamt gibt es also für alle Elemente e_1 bis e_{n+1} $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$ Möglichkeiten. ■

Übungsaufgabe 2.17: Vollständige Induktion (1) v1

Man beweise:

$$\sum_{k=1}^{n} (2 \cdot k - 1) = n^2$$

Hier geht es zu Lösungshinweisen. Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 2.18: Vollständige Induktion (2) v1

Man beweise:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n + 1)}{6}$$

Hier geht es zu Lösungshinweisen. Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 2.19: Vollständige Induktion (3) v1

Man beweise:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$

Hier geht es zu Lösungshinweisen. Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 2.20: Vollständige Induktion (4) v1

Man zeige: $\cos(n \cdot \pi) = (-1)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N} : n \geq 1.$

Hinweis: $\cos(\pi) = -1$ und $\sin(\pi) = 0$

[2.3] Quelle: https://www.emath.de/Referate/induktion-aufgaben-loesungen.pdf (Nr. D5); Abruf 2021-10-21.

[2.4] Quelle: https://www.emath.de/Referate/induktion-aufgaben-loesungen.pdf (Nr. G1); Abruf 2021-10-21.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Hier geht es zu Lösungshinweisen.

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 2.21: Vollständige Induktion (5) v1

Man zeige: $n^5 - n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$ durch 5 teilbar.

Hier geht es zu Lösungshinweisen. Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 2.22: Vollständige Induktion (6) v1

Man beweise:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1 \qquad \forall (n \in \mathbb{N}) \geq 1$$

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 2.23: Vollständige Induktion (7) v1

Man beweise folgende Formel für $x \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 2.24: Vollständige Induktion (8) v1

Man beweise:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N};\ n \geq 2$$

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 2.25: Vollständige Induktion (9) v1

Beweisen Sie die Bernoulli-Ungleichung für $h \in \mathbb{R}$ durch vollständige Induktion:

$\forall n \in \mathbb{N} : (1+h)^n \geq 1 + n \cdot h,$ falls $h \geq -1$

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 2.26: Vollständige Induktion (10) v1

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n > 2$ die Aussage $n \cdot \sqrt{n} > n + \sqrt{n}$ wahr ist.

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Übungsaufgabe 2.27: Vollständige Induktion (11) v1

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für $0 < a < 1$ ($a \in \mathbb{R}$) und jede natürliche Zahl n gilt:

$$1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n = \sum_{i=0}^{n} a^i < \frac{1}{1-a}$$

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 2.28: Vollständige Induktion (12) v1

Man beweise die Behauptung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n \cdot (n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$
Hinweis: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 2.29: Vollständige Induktion (13) v1

Man zeige: Für die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt für alle $n \geq 1$:

$$\boldsymbol{A}^n = \underbrace{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{A}}_{n \text{ Stück}} = 3^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Hinweis 2.2: Weiterführende Links und Literatur zur vollständigen Induktion

Suchen Sie auch selber nach weiteren Aufgaben!

Hier finden Sie eine kleine Auswahl (alle Links zuletzt geprüft am 2025-08-25):

Aufgabensammlungen im Internet:

https://de.wikibooks.org/wiki/Aufgabensammlung_Mathematik:_Vollst%C3%A4ndige_Induktion

https://www.emath.de/Referate/induktion-aufgaben-loesungen.pdf

http://www.carsten-erdmann.de/files/Analysis_1_1_Uebungsskript.pdf S. 48 ff.

https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/aufgaben/I/induktion__vollstaendige.html

https://www.kana.uni-wuppertal.de/fileadmin/mathe/reine_mathematik/komplexe_analysis/ws2012/ueb_ingws1213/03uebws1213ls.pdf

http://www.vorwerg-net.de/Mathematik/5.Analysis/5.7.F.Vollstaendige%20Induktion.pdf

Tutorium:

https://wp.uni-koblenz.de/tutorium/beweis-durch-vollstaendige-induktion/

Präsenzliteratur:

Dalwigk, Florian André: Vollständige Induktion - Beispiele und Aufgaben bis zum Umfallen; Springer-Verlag Berlin (2019)
DNB http://d-nb.info/1173917039

Sominskij, Il ja Samuilovič; Golovina, Lidia I.; Jaglom, Isaak M.: Die vollständige Induktion; Dt. Verlag der Wiss. Berlin (1991)
DNB http://d-nb.info/930540476

Grinberg, Natalia: Lösungsstrategien - Mathematik für Nachdenker; Europa-Lehrmittel Nourney & Vollmer Haan-Gruiten (2019)
DNB http://d-nb.info/1185589058

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

3. Mengenlehre

3.1. Grundlegendes

Erläuterung 3.1: Grundlegendes zur naiven Mengenlehre v1

Der *Dreisatz* ist ein mathematisches Verfahren, um aus drei gegebenen Werten eines Verhältnisses den unbekannten vierten Wert zu berechnen.[3.1]

- Einfacher Dreisatz
  - Es liegt eine Gesetzmäßigkeit der Art „Je mehr A, desto mehr B.“ vor (direkte Proportionalität): Beim Verdoppeln (Verdreifachen, …) von A wird auch B verdoppelt (verdreifacht, …).
  - Gegeben ist ein Verhältnis von a Einheiten einer Größe A zu b Einheiten einer Größe B.
  - Gefragt wird nach der Anzahl x Einheiten der Größe B, die in demselben Verhältnis zu c Einheiten von A stehen.

  Beispiel: In 3 Stunden legt ein Fahrzeug bei konstanter Geschwindigkeit 240 km zurück, wie weit kommt es in 7 Stunden?

  Es gilt: „3 zu 240 verhält sich wie 7 zu x“.

	Zeit (h)	Strecke (km)	Rechnung:	
1.	3	240	$\div 3$	In 3 Stunden legt es 240 km zurück.
2.	1	80	$\cdot 7$	Also legt es in 1 Stunde $^{240}/_{3}$ km = 80 km zurück.
3.	7	**560**		Damit legt es in 7 Stunden $7 \cdot 80$ km = **560 km** zurück.

- Umgekehrter Dreisatz
  - Es liegt eine Gesetzmäßigkeit der Art „Je weniger A, umso mehr B.“ vor (indirekte Proportionalität): Beim Halbieren (Dritteln, …) von A wird B verdoppelt (verdreifacht, …).
  - Dabei ergeben a Einheiten einer Größe A mit b Einheiten einer Größe B ein konstantes Produkt.
  - Gefragt wird nach der Anzahl x Einheiten der Größe B, die mit c Einheiten von A dasselbe Produkt ergeben: $a \cdot b = c \cdot x$.

  Beispiel: 21 Lastwagen benötigen 35 Tage für den Abtransport einer bestimmten Menge Abraums. Wie viel Zeit benötigen hierfür 15 Lastwagen?

	Lastwagen	Zeit (d)	Rechnung	
1.	21	35	$21 \cdot 35$	21 LKW benötigen 35 Tage.
2.	1	780	$735 \div 15$	Also benötigt 1 LKW $21 \cdot 35$ Tage = 735 Tage.
3.	15	**49**		Damit benötigen 15 LKW $^{735}/_{15}$ Tage = **49 Tage**.

Übungsaufgabe 3.1: Natürliche Zahlen (1) v1

Geben Sie die folgenden Mengen **natürlicher Zahlen** in der aufzählenden Schreibweise an:

a) $F = \{\, x \mid x \text{ gerade } \wedge\ x \text{ Primzahl} \,\}$??

b) $E = \{\, x \mid -5 \leq x \leq 5 \,\}$??

Hier geht es zur Musterlösung.

[3.1] https://de.wikipedia.org/wiki/Dreisatz; Abruf 17-JUL-2023.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

3.2. Übungen

Übungsaufgabe 3.2: Einfache Mengenoperationen auf natürlichen Zahlen v1

Gegeben seien die Mengen:

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ $B = \{1, 5, 10, 15, 20\}$

$C = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$ $D = \{3, 5, 9, 10, 15\}$

Bestimmen Sie:

a) $A \cap B$??

b) $A \cup B$??

c) $B \setminus C$??

d) $(C \cap B) \setminus A$??

e) $(A \cup B) \setminus (C \cup D)$??

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 3.3: Natürliche Zahlen (2) v1

Sei $M = \{1, 2\}$ und $N = \{2, 3, 4\}$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) $M \subset N$??

b) $N \subset M$??

c) $M = N$??

d) $M \neq N$??

e) $\{2, 4\} \subset N$??

f) $2 \in M$??

g) $3 \subset N$??

h) $\{3\} \subset N$??

i) $\{3\} \in N$??

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 3.4: Aussagen zu natürlichen Zahlen v1

Gegeben:

$A = \{$ ungerade Zahlen beim Würfelwurf $\}$;

$B = \{$ Primzahlen beim Würfelwurf $\}$;

Beschreiben Sie die nachstehend beschriebenen Mengen:

a) $A \cap B$??

b) $A \cup B$??

c) $\overline{A} \cap \overline{B}$??

d) $\overline{A \cap B}$??

e) $\overline{A} \cup \overline{B}$??

f) $\overline{A \cup B}$??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Übungsaufgabe 3.5: Korrekte Mengenbeschreibung v1

Prüfen Sie, ob die Menge B in der Menge A enthalten ist:

a) $A = \mathbb{Q}$, $B = \{\,1\,\}$??

b) $A = \{\,x \in \mathbb{N} \,|\, \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ mit } x = 4 \cdot n\,\}$, $B = \{\,x \in \mathbb{N} \,|\, x \text{ ist eine gerade Zahl}\,\}$??

c) $A = \{\,x \in \mathbb{N} \,|\, x \text{ ist eine gerade Zahl}\,\}$, $B = \{\,x \in \mathbb{N} \,|\, \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ mit } x = 4 \cdot n\,\}$??

d) $A = \mathbb{Z}$, $B = \{\,\}$??

e) $A = \{\,1, 2, 3\,\}$, $B = \{\,x \in \mathbb{N} \,|\, x < -1\,\}$??

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 3.6: Einfache Mengenoperationen (1) v1

Geben Sie jeweils den Durchschnitt der Mengen A und B an:

a) $A = \{\,x \in \mathbb{Q} \,|\, x \leq 5\,\}$, $B = \{\,x \in \mathbb{Q} \,|\, x \geq 5\,\}$??

b) $A = \{\,x \in \mathbb{Q} \,|\, x > -1\,\}$, $B = \{\,x \in \mathbb{Q} \,|\, x < 1\,\}$??

c) $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{N}$??

d) $A = \{\,x \in \mathbb{Q} \,|\, x < 1\,\}$, $B = \{\,x \in \mathbb{Q} \,|\, x > 5\,\}$??

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 3.7: Einfache Mengenoperationen (2) v1

Geben Sie die Vereinigungsmenge der Mengen A und B an:

a) $A = \{\,x \in \mathbb{Q} \,|\, x < 1\,\}$, $B = \{\,x \in \mathbb{Q} \,|\, x \geq 1\,\}$??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

3.3. Anwendungsbeispiele

Erläuterung 3.2: Anwendung CAD-Systeme v1

CAD-Systeme basieren auf Körpermodellen. Vergleichsweise einfache Grundkörper werden durch die Methoden der Aussagenlogik und Mengenlehre kombiniert, um komplexe Bauteile zu erzeugen. In der Anwendung ist zu beachten, dass die Aussagenlogik immanent ist und z. B. bei weiterführenden Anwendungen auf Basis des CAD-Modells wie FEM oder BEM sehr relevant sind.

Typische Operatoren finden sich in allen CAD-Systemen, hier exemplarisch aus FreeCad.

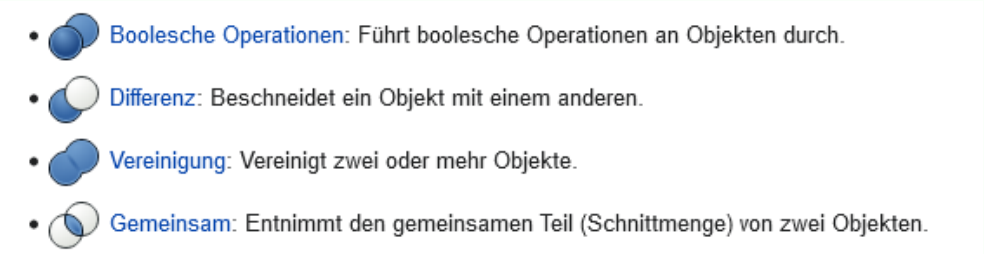


Abbildung 3.1.: Auswahl der Volumenoperatoren bei Freecad

Quelle: https://wiki.freecad.org/Part_Module/de

Dabei entsprechen sich die Operationen Vereinigung und $\cup$, Gemeinsam und $\cap$ und Differenz $\setminus$. Hinter Boolesche Operationen finden sich weitere Volumenoperatoren.

Übungsaufgabe 3.8: Volumenoperationen v1

Gegeben sind eine Kugel K, ein Zylinder Z und ein Würfel W in der relativen Position wie rechts dargestellt.

Was sind die Ergebnisse der jeweiligen Operationen?

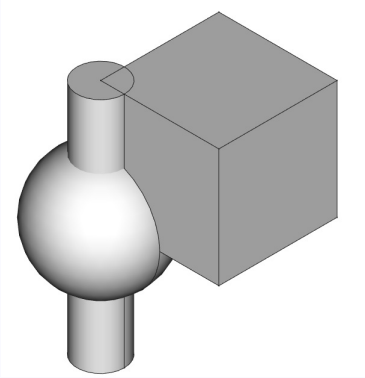


Abbildung 3.2.: Kugel K, Zylinder Z und Würfel W

Quelle: Eigene Darstellung

a) $W \cup K \rightarrow$??

b) $W \cap K \rightarrow$??

c) $W \setminus K \rightarrow$??

d) $K \setminus W \rightarrow$??

e) $(K \cup Z) \setminus W \rightarrow$??

f) $(W \cup K) \setminus Z \rightarrow$??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Hinweis 3.1: Weitere Aufgaben

Suchen Sie auch selber nach weiteren Übungsaufgaben. Hier eine kleine Auswahl (alle Links zuletzt geprüft am 2025-08-26):

https://123mathe.de/aufgaben-mengen-vermischte-aufgaben

https://www.grund-wissen.de/mathematik/mengenlehre/aufgaben.html

https://www.mathe-lexikon.at/arbeitsblaetter/mengenlehre/

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

4. Zahlenbereiche

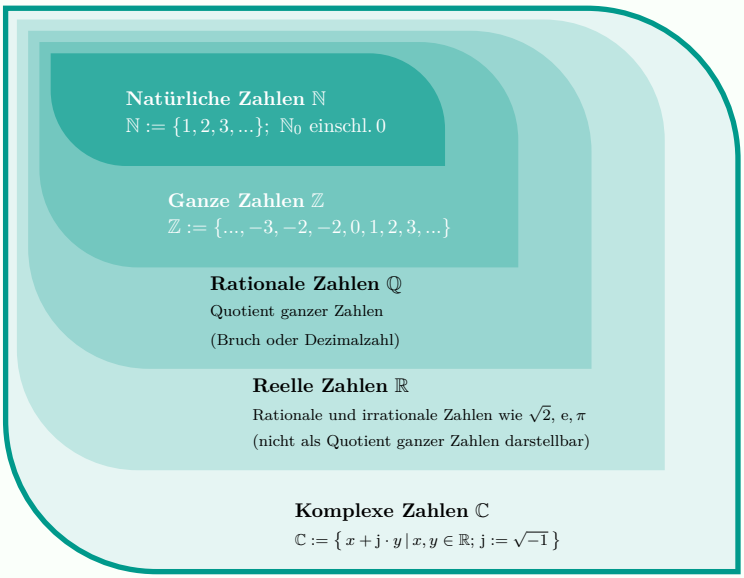
4.1. Grundlegendes

Erläuterung 4.1: Grundlegendes zu Zahlenbereichen

Als **Zahlenbereiche** sieht man Zahlenmengen an, deren Elemente gemeinsame Eigenschaften haben. Dabei beziehen sich diese Eigenschaften oftmals auf die Durchführbarkeit gewisser (arithmetischer) Operationen innerhalb des Zahlenbereiches.

Neue Zahlenbereiche sind historisch meist dadurch entstanden, dass bestehende erweitert wurden, um die beschränkte Ausführbarkeit von Operationen zu überwinden.

Abbildung 4.1.: Zahlenhierarchie



Quelle: Eigene Darstellung

Die eingeführten Mengen der

- natürlichen Zahlen,
- natürlichen Zahlen mit Null,
- ganzen Zahlen,
- rationalen Zahlen,
- reellen Zahlen und
- komplexen Zahlen

bilden eine Hierarchie in dem Sinne, dass sie jeweils echte Teilmengen der rechts von ihnen aufgeführten Mengen sind:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist die „höchste“ aller Zahlenmengen; in ihr sind alle anderen Zahlenmengen enthalten.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Übungsaufgabe 4.1: Aussagen zu Zahlenbereichen (1) v1

Zu welchen Zahlenbereichen gehören die folgenden Zahlen? Kreuze an!

Aufgabe	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
-5	☐	☐	☐	☐	☐
$4{,}6$	☐	☐	☐	☐	☐
$\sqrt{3}$	☐	☐	☐	☐	☐
6	☐	☐	☐	☐	☐
$-\frac{1}{2}$	☐	☐	☐	☐	☐

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 4.2: Aussagen zu Zahlenbereichen (2) v1

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

a) -4 ist eine natürliche Zahl. → ??

b) Jede rationale Zahl ist eine natürliche Zahl. → ??

c) Jede ganze Zahl ist eine rationale Zahl. → ??

d) Zwischen zwei natürlichen Zahlen liegt stets mindestens eine weitere natürliche Zahl. → ??

e) Wenn man zwei natürliche Zahlen addiert, erhält man immer eine natürliche Zahl als Ergebnis. → ??

f) Zwischen zwei rationalen Zahlen liegt stets mindestens eine weitere rationale Zahl. → ??

g) Wenn man zwei ganze Zahlen durcheinander dividiert, erhält man stets eine ganze Zahl als Ergebnis. → ??

h) $\sqrt{4}$ ist eine ganze Zahl. → ??

i) Jede reelle Zahl ist eine irrationale Zahl. → ??

j) Jede irrationale Zahl ist eine reelle Zahl. → ??

k) Jede irrationale Zahl ist auch eine rationale Zahl. → ??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Erläuterung 4.2: Begriffe

Intervalle sind Mengen von Zahlen, die durch eine untere und eine obere Schranke begrenzt sind. Man unterscheidet

- *Offene Intervalle:* Die Schranken gehören nicht zur Menge. Schreibweise: $]a, b[$ oder – seltener – (a, b)
- *Halboffene Intervalle:*
  - Die untere Schranke gehört zur Menge, die obere nicht. Schreibweise: $[a, b[$ oder – seltener – $[a, b)$
  - Die obere Schranke gehört zur Menge, die untere nicht. Schreibweise: $]a, b]$ oder – seltener – $(a, b]$
- *Geschlossene Intervalle:* Beide Schranken gehören zur Menge. Schreibweise: $[a, b]$

Beispiele:
$\{i \in \mathbb{N}_0 | i < 5\} = [0, 5[= \{0, 1, 2, 3, 4\}$
$\{x \in \mathbb{R} | x > 5 \wedge x \leq 10\} =]5, 10]$

Die größte untere Schranke einer Zahlenmenge ist ihr *Infimum*; gehört das Infimum zur Zahlenmenge, nennt man es auch *Minimum*.

Die kleinste obere Schranke einer Zahlenmenge ist ihr *Supremum*; gehört das Supremum zur Zahlenmenge, nennt man es auch *Maximum*.

Beispiel: $A =]-5, 3] \subset \mathbb{R}$; Das Infimum ist -5, das Supremum und das Maximum ist $+3$. Ein Minimum besitzt diese Menge nicht.

Übungsaufgabe 4.3: Zuordnung Zahlenbereiche v1

Man bestimme, ob die folgenden Zahlen bzw. Ausdrücke rational ($\in \mathbb{Q}$), irrational ($\in \mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$), algebraisch reell ($\in \mathbb{A}$), transzendent reell ($\in \mathbb{T}$) oder komplex ($\in \mathbb{C}$) sind:
Hinweis: Auf eine Zahl können mehrere dieser Eigenschaften zutreffen.

a) $|-8{,}1 + 7{,}9|$ → ??

b) $|-\pi|$ → ??

c) $|\operatorname{sgn}(-5) \cdot (-5)|$ → ??

d) $|-\pi \cdot 5|$ → ??

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 4.4: Mengenoperationen zu Zahlenbereichen v1

Gegeben seien die Intervalle $I_1 = [-2, 4]$ und $I_2 =]0, 8[$ in $\mathbb{R}$.

Bilden Sie:

a) $I_1 \cup I_2$ → ??

b) $I_1 \setminus I_2$ → ??

c) $I_1 \cap I_2$ → ??

d) $\overline{I_2}$ → ??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Übungsaufgabe 4.5: Operationen auf Zahlenbereichen v1

Bestimmen Sie:

$$\sup\left\{ 2 - \frac{1}{n^2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 4.6: Aussagen auf Zahlenbereichseigenschaften v1

Ist die folgende Menge beschränkt?

$$M = \left\{ \frac{3 \cdot x + 1}{2 \cdot x + 3} \,\middle|\, x \in [\,0, \infty\,[\right\}$$

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 4.7: Weitere Zahlenbereichsoperationen v1

Für $A, B \subseteq \mathbb{R}$ setzen wir $A + B := \left\{ a + b \,|\, a \in A \wedge B \in B \right\}$.

Beweisen Sie:

Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt, so ist auch $A+B$ nichtleer und nach oben beschränkt, und es gilt:

$$\sup\big(A + B\big) = \sup(A) + \sup(B)$$

Hinweis: Führen Sie den Beweis in zwei Schritten:

- Schritt 1: Zeigen Sie, dass $S := \sup(A) + \sup(B)$ eine obere Schranke von $A + B$ ist.
- Schritt 2: Zeigen Sie, dass S die kleinste obere Schranke von $A + B$ ist, d. h. dass $\forall\, \varepsilon > 0 : S - \varepsilon$ keine obere Schranke ist.

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 4.8: Rudimentäre Beweisführung auf Zahlenbereichen v1

Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < 1$, dass gilt:

$\inf\left\{ x^n \,|\, n \in \mathbb{N}_0 \right\} = 0$

Hinweis: Verwenden Sie die Bernoulli'sche Ungleichung und den Satz von Archimedes.

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

5. Zahlenbereich-Wandlungen

5.1. Grundlegendes

Erläuterung 5.1: Grundlegendes zu Wandlungen zwischen den Zahlenbereichen

- Die **Signum-Funktion** gibt das Vorzeichen einer ganzen, rationalen oder reellen Zahl zurück:

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

- Die **Betragsfunktion** gibt den Wert einer ganzen, rationalen oder reellen Zahl (ohne Vorzeichen) zurück:

$$|x| := x \cdot \operatorname{sgn}(x)$$

- Die **Intervallschachtelung** definiert eine reelle Zahl über ihre Annäherung mittels rationaler Zahlen.
- Die **Gaußklammer-Funktion** rundet eine rationale oder reelle Zahl auf die nächst kleinere ganze Zahl:

$$\lfloor (x) \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} \,|\, k \leq z\} = \begin{cases} x >= 0 & \text{Nachkommastellen streichen} \\ x < 0 & \text{Nachkommastellen von } x - 1 \text{ streichen} \end{cases}$$

- *Kaufmännisches Runden:* Bis $4{,}\overline{9}$ wird ab-, ab $5{,}0$ wird aufgerundet: $i \approx \lfloor x + 0{,}5 \rfloor$

5.2. Übungen

Übungsaufgabe 5.1: Zahlenbereichsübergänge (1)

Man berechne:

a) $\operatorname{sgn}(-12{,}345) = ??$
b) $\operatorname{sgn}(256) = ??$
c) $\operatorname{sgn}(-3 \cdot \pi) = ??$
d) $\operatorname{sgn}\big((-2{,}5) \cdot (-\pi)\big) = ??$
e) $\operatorname{sgn}(-7 + 2 + 6) = ??$
f) $\operatorname{sgn}(14 - 6 - 8) = ??$
g) $\operatorname{sgn}(-\pi + 3{,}14159) = ??$
h) $\operatorname{sgn}(+\pi - 3{,}14159) = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Übungsaufgabe 5.2: Betragsfunktion [OpenAI2024g]

a) Löse die Gleichung $|x^2 - 4|$ für $x = 3$. ??

b) Löse die Gleichung $|2x - 5| = 7$. ??

c) Löse die Ungleichung $|3x + 2| \leq 8$. ??

d) Bestimme die Schnittpunkte der Funktionen $f(x) = |x - 2|$ und $g(x) = 3 - x$. ??

e) Vereinfache den Ausdruck $|x^2 - 4x + 3|$ und bestimme die Nullstellen. ??

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 5.3: Betragsfunktion

a) Was ergibt: $\dfrac{a + b + |\,a - b\,|}{2}$?
??

b) Löse die Gleichung $\frac{|x|}{2} = 1$. ??

c) Bestimme die Lösung der Gleichung $\frac{|x-1|}{3} = 2$. ??

d) Löse die Gleichung $\frac{|2x+3|}{4} = \frac{1}{2}$. ??

e) Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung $\frac{|3x-2|}{x} = 4$. ??

f) Löse die Ungleichung $\frac{|4x+1|}{2x-3} > 1$. ??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

6. Ganze Zahlen: Zahlensysteme

6.1. Unser gewohntes Dezimalsystem (Zehner-System)

Erläuterung 6.1: Unser gewohntes Zehnersystem

Unser gewohntes Zehnersystem ist ein positionelles Zahlensystem, welches auf der Zahlensystembasis $b = 10$ aufbaut.

Dementsprechend hat es zehn unterscheidbare Symbole („Ziffern“), die zusammen genommen das *Alphabet* $\boldsymbol{\Sigma_{10}}$ bilden:

$$\Sigma_{10} := \{\, 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9 \,\}$$

Positionell bedeutet: Jede Ziffer hat eine *Wertigkeit*, die – beginnend ganz rechts mit $b^0 = 1$ (also $10^0 = 1$), fortschreitend nach links – sich mit jeder Position um den Faktor b (also 10) erhöht.

Man nennt dies die ***b**-adische Entwicklung* einer Zahl.

Beispiel 6.1: Unser gewohntes Zehnersystem

Die nachfolgende Tabelle verdeutlicht die 10-adische Entwicklung am Beispiel der Zahl 04.711:[6.1]

Stelle:	4	3	2	1	0
Wertigkeit:	$1.000 \cdot 10 = 10.000$	$100 \cdot 10 = 1.000$	$10 \cdot 10 = 100$	$1 \cdot 10 = 10$	1
In 10er-Potenzen:	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
Beispiel:	0	4	7	1	1
Wertigkeit:	$0 \cdot 10^4$	$4 \cdot 10^3$	$7 \cdot 10^2$	$1 \cdot 10^1$	$1 \cdot 10^0$

Damit erhält man:

$$04.711 = 0 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$$

$$\begin{array}{rrr} & 0 \cdot 10^4 & 0 \\ + & 4 \cdot 10^3 & + \quad 4.000 \\ + & 7 \cdot 10^2 & + \quad 700 \\ = & 1 \cdot 10^1 & + \quad 10 \\ + & 1 \cdot 10^0 & + \quad 1 \\ \hline & & 4.711 \end{array}$$

[6.1] Wir verwenden den Tausender-Trennpunkt . zwecks besserer Lesbarkeit.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Übungsaufgabe 6.1: Unser gewohntes Zehnersystem

Zerlegen Sie die nachfolgenden Zehnersystem-Zahlen wie in Erläuterung 6.1 und Beispiel 6.1 gezeigt.

Hier geht es zu Lösungshinweisen.

a) $9 = ??$

b) $40 = ??$

c) $007 = ??$

d) $726 = ??$

e) $1.857 = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 6.2: Unser gewohntes Zehnersystem

Jetzt umgekehrt: Setzen Sie die nachfolgenden Zehnersystem-Zahlen aus der 10-adischen Zerlegung zusammen.

Hier geht es zu Lösungshinweisen.

a) $0 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 = ??$

b) $9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0 = ??$

c) $6 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^0 = ??$

d) $2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 = ??$

e) $2 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^2 = ??$

f) $7 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 = ??$

g) $1 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^4 = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

6.2. Modulo – Rest einer Division

Erläuterung 6.2: Ganzzahl-Division mit Rest

In den Körpern der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ gibt es keine Brüche; die Division ergibt in diesen Körpern deshalb stets eine natürliche bzw. ganze Zahl und einen Rest.

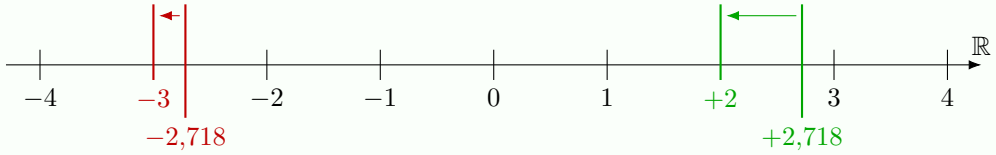
Wenn man sich für den Rest interessiert, verwendet man den *Modulo-Operator* mod .

Es gilt:

$$a \mod b := a - b \cdot \lfloor a \div b \rfloor$$

Dabei ist $\lfloor ... \rfloor$ die *Gaußklammer-Funktion*: Abrunden (Nachkommastellen streichen, **bei negativen Zahlen zusätzlich 1 subtrahieren**).

Abbildung 6.1.: Gaußklammer-Funktion: Verdeutlichung des „Abrunden“ am Zahlenstrahl



Beispiel 6.2: Ganzzahl-Division mit Rest

Für $a = 42$ und $b = 11$:

$$42 \mod 11 = 42 - 11 \cdot \left\lfloor \frac{42}{11} \right\rfloor = 42 - 11 \cdot \lfloor 3{,}\overline{81} \rfloor = 42 - 11 \cdot 3 = 9 \qquad \Rightarrow \; 42 \div 11 = 3 \text{ Rest } 9$$

Übungsaufgabe 6.3: Ganzzahl-Division mit Rest

Führen Sie jeweils eine Ganzzahl-Division durch und berechnen Sie das Divisionsergebnis und den Rest.

Hier geht es zu Lösungshinweisen.

a) $7 \div 2 = ??$

b) $4 \div 7 = ??$

c) $9 \div 0 = ??$

d) $10 \div 4 = ??$

e) $15 \div 5 = ??$

f) $23 \div 3 = ??$

g) $111 \div 22 = ??$

h) $231 \div 14 = ??$

i) $375 \div 68 = ??$

j) $918 \div 7 = ??$

k) $939 \div 236 = ??$

l) $1.234 \div 611 = ??$

m) $2.417 \div 3.659 = ??$

n) $12.318 \div 31 = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Hinweis 6.1: Ganzzahl-Division mit Rest

Hier finden Sie weitere Übungsaufgaben:

https://de.khanacademy.org/computing/computer-science/cryptography/modarithmetic/e/modulo-operator
https://www.staff.uni-mainz.de/amalevic/files/fit/auf_1-7-modulo.pdf
https://www.die-denkschule.ch/data/documents/Modulo-Teilen-mit-Rest.pdf

Hier finden Sie Online-Rechner:

https://www.entwicklertools.de/tools/mathematik-tools/modulo-rechner/
https://de.planetcalc.com/8326/
https://miniwebtool.com/de/modulo-calculator/

Alle Links zuletzt geprüft am 16-OKT-2024.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

6.3. Wandlung vom Zehnersystem

Erläuterung 6.3: Andere Zahlensysteme – Umwandlung vom Zehnersystem

Wählt man ein – anstelle der gewohnten zehn – anderes b, dann erhält man ein „b-er-System“, also beispielsweise für $b = 5$ ein „Fünfer-System“ (oder ein „System zur Basis 5“).

Wie wandelt man nun allgemein eine Zahl vom vertrauten Zehnersystem in ein „b-er-System“ um?

Betrachten wir zunächst den (an sich sinnlosen) Fall der Wandlung einer 10er-System-Zahl in das Zehnersystem.

Wir teilen die umzuwandelnde Zahl solange durch b (also hier 10), bis sich schließlich Null ergibt. Bei jeder Division notieren wir den Rest.

Hier am Beispiel der Zahl 4.711:

$$\begin{array}{rcrcl} 4.711 & :10 & = & 471 & \text{Rest } 1 \\ 471 & :10 & = & 47 & \text{Rest } 1 \\ 47 & :10 & = & 4 & \text{Rest } 7 \\ 4 & :10 & = & 0 & \text{Rest } 4 \end{array} \uparrow$$

Liest man die Reste **von unten nach oben**, dann erhält man die gegebene Zahl 4 7 1 1.

Völlig analog funktioniert das Verfahren für beliebige andere Ziel-Basen b: Fortlaufend solange durch b dividieren, bis sich schließlich Null ergibt. Die Reste ergeben (von unten nach oben gelesen) die gewünschte Zahl im Zielsystem.

In anderen Systemen kennzeichnet man die Zahlenbasis üblicherweise durch Klammern und die nachfolgende tiefgestellte Zahlenbasis; z. B. bezeichnet $(2034)_5$ die Zahl „2034“ in einem positionellen Fünfer-System. Wenn man mögliche Mißverständnisse vermeiden möchte, kann man das natürlich auch mit Zehnersystem-Zahlen tun, z. B. $(4711)_{10}$.

Beispiel 6.3: Wandlung in das Fünfer-System

Als Beispiel betrachten wir eine Wandlung in das Fünfer-System: $(2.296)_{10} = (?)_5$

$$\begin{array}{rcrcl} 2.296 & :5 & = & 459 & \text{Rest } 1 \\ 459 & :5 & = & 91 & \text{Rest } 4 \\ 91 & :5 & = & 18 & \text{Rest } 1 \\ 18 & :5 & = & 3 & \text{Rest } 3 \\ 3 & :5 & = & 0 & \text{Rest } 3 \end{array} \uparrow \quad \Rightarrow (2.296)_{10} = (33141)_5$$

Übungsaufgabe 6.4: Wandlung Zehner- in Zweier-System

Wandeln Sie die folgenden im Zehner-System gegebenen Zahlen in das Zweier-System um.

Hier geht es zu Lösungshinweisen.

a) $(8)_{10} = (?)_2$??

b) $(58)_{10} = (?)_2$??

c) $(100)_{10} = (?)_2$??

d) $(277)_{10} = (?)_2$??

e) $(666)_{10} = (?)_2$??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Übungsaufgabe 6.5: Wandlung Zehner- in Dreier-System

Wandeln Sie die folgenden im Zehner-System gegebenen Zahlen in das Dreier-System um.

Hier geht es zu Lösungshinweisen.

a) $(8)_{10} = (?)_3$??

b) $(58)_{10} = (?)_3$??

c) $(100)_{10} = (?)_3$??

d) $(277)_{10} = (?)_3$??

e) $(666)_{10} = (?)_3$??

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 6.6: Wandlung Zehner- in Fünfer-System

Wandeln Sie die folgenden im Zehner-System gegebenen Zahlen in das Fünfer-System um.

Hier geht es zu Lösungshinweisen.

a) $(8)_{10} = (?)_5$??

b) $(58)_{10} = (?)_5$??

c) $(100)_{10} = (?)_5$??

d) $(277)_{10} = (?)_5$??

e) $(666)_{10} = (?)_5$??

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 6.7: Wandlung Zehner- in Achter-System

Wandeln Sie die folgenden im Zehner-System gegebenen Zahlen in das Achter-System (Oktalsystem) um.

Hier geht es zu Lösungshinweisen.

a) $(8)_{10} = (?)_8$??

b) $(58)_{10} = (?)_8$??

c) $(100)_{10} = (?)_8$??

d) $(277)_{10} = (?)_8$??

e) $(666)_{10} = (?)_8$??

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 6.8: Wandlung Zehner- in Sechzehner-System

Wandeln Sie die folgenden im Zehner-System gegebenen Zahlen in das Sechzehner-System (Hexadezimalsystem) um.

Hier geht es zu Lösungshinweisen.

a) $(8)_{10} = (?)_{16}$??

b) $(58)_{10} = (?)_{16}$??

c) $(100)_{10} = (?)_{16}$??

d) $(277)_{10} = (?)_{16}$??

e) $(666)_{10} = (?)_{16}$??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

6.4. Wandlung zum Zehnersystem

Erläuterung 6.4: Wandlung zum Zehnersystem

Um eine in einem beliebigen b-adischen System dargestellte Zahl in das gewohnte Dezimalsystem zu überführen, werden die einzelnen Ziffern der gegebenen b-adischen Zahl Ziffer für Ziffer, von rechts nach links mit der jeweiligen Wertigkeit multipliziert; die sich ergebenden Produkte werden anschließend addiert.

Beispiel 6.4: Wandlung zum Zehnersystem

$(101.0011)_2 = (?)_{10}$

Stelle_{10}	6	5	4	3	2	1	0	
Wertigkeit_{10}	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	
$= \text{Wertigkeit}_{10}$	64	32	16	8	4	2	1	$64+16+2+1=83$
Ziffer_2	1	0	1	0	0	1	1	
Produkt_{10}	64	0	16	0	0	2	1	

$\Rightarrow (101.0011)_2 = (83)_{10}$

$(362)_7 = (?)_{10}$

Stelle_{10}	2	1	0	
Wertigkeit_{10}	7^2	7^1	7^0	
$= \text{Wertigkeit}_{10}$	49	7	1	$147+42+2=191$
Ziffer_7	3	6	2	
Produkt_{10}	147	42	2	

$\Rightarrow (362)_7 = (191)_{10}$

Übungsaufgabe 6.9: Wandlung Zweier- zum Zehnersystem

Wandeln Sie die folgenden Zahlen in das Zehner-System (Dezimalsystem) um.

Hier geht es zu Lösungshinweisen.

a) $(1001)_2 = (?)_{10}$??

b) $(10.1111)_2 = (?)_{10}$??

c) $(1101.1010)_2 = (?)_{10}$??

d) $(0110.1011.0001)_2 = (?)_{10}$??

e) $(110.0110.0110.0110)_2 = (?)_{10}$??

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 6.10: Wandlung Dreier- zum Zehnersystem

Wandeln Sie die folgenden Zahlen in das Zehner-System (Dezimalsystem) um.

Hier geht es zu Lösungshinweisen.

a) $(21)_3 = (?)_{10}$??

b) $(1.020)_3 = (?)_{10}$??

c) $(222.102)_3 = (?)_{10}$??

d) $(011.022.000)_3 = (?)_{10}$??

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

e) $(21.021.021.021)_3 = (?)_{10}$??

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 6.11: Wandlung Fünfer- zum Zehnersystem

Wandeln Sie die folgenden Zahlen in das Zehner-System (Dezimalsystem) um.

Hier geht es zu Lösungshinweisen.

a) $(14)_5 = (?)_{10}$??

b) $(323)_5 = (?)_{10}$??

c) $(2.001)_5 = (?)_{10}$??

d) $(034.123)_5 = (?)_{10}$??

e) $(21.433.040)_5 = (?)_{10}$??

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 6.12: Wandlung Oktal- zum Zehnersystem

Wandeln Sie die folgenden Zahlen vom Achter (Oktal)- in das Zehner-System (Dezimalsystem) um.

Hier geht es zu Lösungshinweisen.

a) $(57)_8 = (?)_{10}$??

b) $(602)_8 = (?)_{10}$??

c) $(4.336)_8 = (?)_{10}$??

d) $(12.065)_8 = (?)_{10}$??

e) $(1.200.704)_8 = (?)_{10}$??

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 6.13: Wandlung Hexadezimal- zum Zehnersystem

Wandeln Sie die folgenden Zahlen vom Sechzehner (Hexadezimal)- in das Zehner-System (Dezimalsystem) um.

Hier geht es zu Lösungshinweisen.

a) $(1A)_{16} = (?)_{10}$??

b) $(BF)_{16} = (?)_{10}$??

c) $(3CD)_{16} = (?)_{10}$??

d) $(1F7E)_{16} = (?)_{10}$??

e) $(AF0D2)_{16} = (?)_{10}$??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

6.5. Wandlungen zwischen Dual-, Oktal-, und Hexadezimal-System

Erläuterung 6.5: Wandlung vom Dual- in das Oktal- und Hexadezimalsystem

Wenn vom Dual- zum Oktalsystem umgewandelt werden soll, dann teilt man **von rechts her** „Dreierpäckchen“ ab; ggf. muss man links führende Nullen ergänzen.

Begründung: Das Oktalsystem kennt Ziffern von 0 bis 7; dafür benötigt man im Dualsystem drei Bits.

Wenn vom Dual- zum Hexadezimalsystem umgewandelt werden soll, dann teilt man **von rechts her** „Viererpäckchen“ ab; ggf. muss man links führende Nullen ergänzen.

Begründung: Das Hexadezimalsystem kennt Ziffern von 0 bis F (=15); dafür benötigt man im Dualsystem vier Bits.

Anschliessend werden die Dreier- bzw. Viererpäckchen getrennt voneinander in das gewünschte Zielsystem umgewandelt.

Beispiel 6.5: Wandlung vom Dual- in das Oktal- und Hexadezimalsystem

Wandle $(101.1010.1101.1010)_2$ a) in das Oktal- und b) in das Hexadezimalsystem!

```
a) 101101011011010 -> 101 | 101 | 011 | 011 | 010
                        5     5     3     3     2

b) 101101011011010 ->  0 101 | 1010 | 1101 | 1010
                         5      A      B      A
```

$\rightarrow (101101011011010)_2 = (55.332)_8 = (5ABA)_{16}$

Übungsaufgabe 6.14: Wandlung vom Dual- in das Oktal- und Hexadezimalsystem

Wandeln Sie die folgenden Zahlen jeweils vom Dual- in das Oktal- und Hexadezimalsystem um.

Hier geht es zu Lösungshinweisen.

a) $(1001)_2 = (?)_8 = (?)_{16}$??

b) $(110101)_2 = (?)_8 = (?)_{16}$??

c) $(10101101)_2 = (?)_8 = (?)_{16}$??

d) $(111010000110)_2 = (?)_8 = (?)_{16}$??

e) $(0101100101100101 10)_2 = (?)_8 = (?)_{16}$??

Hier geht es zur Musterlösung.

Erläuterung 6.6: Wandlung vom Oktal- und Hexadezimalsystem in die „anderen Informatikersysteme“

Wenn man eine Oktalzahl oder eine Hexadezimalzahl nach Dual wandeln möchte: Einfach **von links nach rechts** Ziffer für Ziffer das betreffende Bitmuster hin schreiben.

Oktal nach Hexadezimal bzw. Hexadezimal nach Oktal geht am besten, indem man zuerst nach Dual wandelt und anschließend die Dualzahl in das gewünschte Zielsystem transferiert (3er- bzw. Viererpäckchen **von rechts her**).

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Beispiel 6.6: Wandlung vom Oktal- und Hexadezimalsystem in die „anderen Informatikersysteme“

$(372)_8 = (?)_2$

```
 3   7   2
011 111 010
```

$\Rightarrow (372)_8 = (11.111.010)_2$

$(E2A)_{16} = (?)_2$

```
  E    2    A
1110 0010 1010
```

$(E2A)_{16} = 1110.0010.1010_2$

$(372)_8 = (?)_{16}$

```
      3    7   2
000 0.11 11.1 010   = 0FA = FA
```

$\Rightarrow (372)_8 = (FA)_{16}$

$(E2A)_{16} = (?)_8$

```
  E    2    A
111.0 00.10 1.010   = 7.052
```

$(E2A)_{16} = (7.052)_8$

Übungsaufgabe 6.15: Wandlung vom Oktal- und Hexadezimalsystem in die „anderen Informatikersysteme“

Wandeln Sie die gegebenen Zahlen in das jeweils angegebene Zielsystem um.

Hier geht es zu Lösungshinweisen.

a) $(27)_8 = (?)_{16}$??

b) $(1.001)_8 = (?)_{16}$??

c) $(070.707)_8 = (?)_{16}$??

d) $(3A)_{16} = (?)_8$??

e) $(D05)_{16} = (?)_8$??

f) $(E5AC)_{16} = (?)_8$??

Hier geht es zur Musterlösung.

Hinweis 6.2: Wandlungen zwischen Zahlenbereichen

Hier finden Sie ein weiteres Tutorial incl. Online-Rechner:

https://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/Zahlensysteme.htm#1

Link zuletzt geprüft am 16-OKT-2024.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

6.6. Hilfestellung: Das Horner-Schema

Erläuterung 6.7: Zahlenwandlung mit dem Horner-Schema

Das *Horner-Schema* kann das manuelle Rechnen mit Polynomen etwas vereinfachen. Es basiert auf der Darstellung eines Polynoms als „Ketten-Produkt“:

$$\begin{aligned} &a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + a_{n-2} \cdot b^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b^1 + a_0 \cdot b^0 \\ &= (((\ldots((a_n \cdot b + a_{n-1}) \cdot b + a_{n-2}) \cdot b + \ldots) \cdot b + a_2) \cdot b + a_1) \cdot b + a_0 \end{aligned}$$

Beispiel 6.7: Zahlenwandlung mit dem Horner-Schema

Wandlung der Zahl $(2.031)_5 = (?)_{10}$:

$$(\underbrace{(2 \cdot 5 + 0)}_{10} \cdot 5 + 3) \cdot 5 + 1 = \underbrace{(10 \cdot 5 + 3)}_{53} \cdot 5 + 1 = \underbrace{53 \cdot 5}_{265} + 1 = 265 + 1 = 266$$

Übungsaufgabe 6.16: Zahlenwandlung mit dem Horner-Schema

Rechnen Sie die gegebenen Zahlen unter Verwendung des Horner-Schemas in das Dezimalsystem um. Beurteilen Sie selber, ob dies einfacher / schneller als mit der bisher bekannten Methode geht.

Hier geht es zu Lösungshinweisen.

a) $(1101)_2 = (?)_{10}$??

b) $(1101)_3 = (?)_{10}$??

c) $(21.201)_3 = (?)_{10}$??

d) $(21.201)_5 = (?)_{10}$??

e) $(30.364)_7 = (?)_{10}$??

f) $(30.364)_9 = (?)_{10}$??

Hier geht es zur Musterlösung.

Hinweis 6.3: Horner-Schema

Hier finden Sie ein weiteres Tutorial incl. Online-Rechner:

https://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/Zahlensysteme.htm#1

Link zuletzt geprüft am 16-OKT-2024.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

6.7. Begrenzte Stellenzahl

Erläuterung 6.8: Bereichsgrenzen durch beschränkte Stellenzahl

Nichts kann unendlich groß werden – das gilt natürlich auch für den Speicher einer Rechenmaschine und damit für die größte darstellbare Zahl.

Mit einer dreistelligen Zahl kann man im Zehnersystem bis maximal $(999)_{10}$ zählen; es gilt: $(999)_{10} = (10)^3_{10} - 1$.

Mit einer fünfstelligen Zahl kann man im Siebenersystem bis $(66.666)_7 = (16.807)_{10}$ zählen; es gilt: $(16.807)_{10} = (7)^5_{10} - 1$.

Allgemein gilt: In einem b-adischen System mit n Stellen ist die größte darstellbare Zahl $b^n - 1$.

Übungsaufgabe 6.17: Bereichsgrenzen durch beschränkte Stellenzahl

Bestimmen Sie für die gegebenen Kombinationen Basis b und Stellenzahl n die größtmögliche darstellbare Zahl. Geben Sie diese Zahl im $b$er- und im Zehnersystem an.

Hier geht es zu Lösungshinweisen.

a) $b = 2 \quad n = 7$??

b) $b = 2 \quad n = 32$??

c) $b = 3 \quad n = 6$??

d) $b = 4 \quad n = 12$??

e) $b = 8 \quad n = 4$??

f) $b = 12 \quad n = 5$??

g) $b = 16 \quad n = 5$??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Übungsaufgabe 6.18: Bereichsgrenzen durch beschränkte Stellenzahl

Rufen Sie einen Online-C-Compiler auf, z. B. hier:
https://www.onlinegdb.com/online_c_compiler
https://www.programiz.com/c-programming/online-compiler/
https://www.online-cpp.com/online_c_compiler
(u. v. m.; Links zuletzt geprüft am 16-OKT-2024).

Geben Sie anschließend den untenstehenden Code ein (Markieren, Copy & Paste).

a) Führen Sie den Code aus und interpretieren Sie das Ergebnis.??

Hier geht es zur Musterlösung.

Listing 6.1: C-Programm: Begrenzte Stellenzahl bei vorzeichenlosen ganzen Zahlen

```
#include <stdio.h>

void main()
{
   struct {
      unsigned int ZweiBits  : 2;  // Eine Zahl mit zwei Bits
      unsigned int DreiBits  : 3;
      unsigned int VierBits  : 4;
      unsigned int FuenfBits : 5; // Eine Zahl mit fünf Bits
   } Zahl;

   int i;

   Zahl.ZweiBits = Zahl.DreiBits = Zahl.VierBits = Zahl.FuenfBits = 0;

   printf("32-Bit   2-Bit   3-Bit   4-Bit   5-Bit \n");

   for (i=0; i<=40; i++) {
      printf("   %2d:    %2d      %2d      %2d      %2d \n", i, Zahl.ZweiBits, Zahl.
    DreiBits, Zahl.VierBits, Zahl.FuenfBits);
      Zahl.ZweiBits++;
      Zahl.DreiBits++;
      Zahl.VierBits++;
      Zahl.FuenfBits++;
    }
}
```

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

6.8. Addition in verschiedenen Zahlensystemen

Erläuterung 6.9: Addition im Zehnersystem

Betrachten wir die gewohnte schriftliche Addition im Zehnersystem anhand eines Beispiels:

$$\begin{array}{rcccc} & 3. & 6 & 5 & 3 \\ + & & 6 & 1 & 8 \\ & {\scriptstyle 1} & & {\scriptstyle 1} & \\ \hline & 4. & 2 & 7 & 1 \end{array}$$

Wir rechnen **von rechts nach links**: $3+8=11$; den Übertrag 1 schreiben wir in die nächste Stelle nach links. $5+1+$ Übertrag $1=7$. $6+6=12$; den Übertrag 1 schreiben wir wieder in die nächste Stelle nach links. $3+$ Übertrag $1=4$.

Beispiel 6.8: Addition im Zweiersystem

Völlig analog geht die Addition im Zweiersystem. Wir müssen lediglich beachten, dass der Übertrag nicht erst bei 9 erfolgt (9+1=10), sondern bereits bei der 1 (1+1=10):

$$\begin{array}{rcccccccccc} & & 1 & 0 & 1. & 0 & 1 & 1. & 1 & 1 & 0 \\ + & & & 1 & 0. & 1 & 0 & 0. & 1 & 1 & 1 \\ & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & \\ \hline & 1. & 0 & 0 & 0. & 0 & 0 & 0. & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Übungsaufgabe 6.19: Addition im Zweiersystem

Addieren Sie die gegebenen Dualzahlen.

Hier geht es zu Lösungshinweisen.

a) $100.101+111.010=??$

b) $101.100+11.011=??$

c) $100.011+010.010=??$

d) $011.011+011.110=??$

e) $1.011.001+100.110=??$

f) $1.001.001+100.111=??$

g) $100.101+01.101+11.100=??$

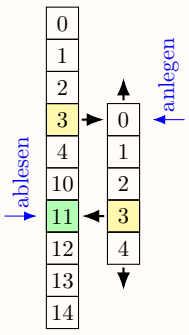
h) $1.110.111+101.011+01.101=??$

i) $10.110.010+101.101+11.010=??$

j) $110.110+010.110+001.101+11.001=??$

Hier geht es zur Musterlösung.

Beispiel 6.9: Addition im Fünfersystem



Völlig analog geht die Addition in anderen Systemen. Wir müssen lediglich beachten, dass der Übertrag nicht erst bei 9 erfolgt (9+1=10), sondern bereits bei der $b-1$.

Beispiel im Fünfersystem: Der Übertrag geschieht bei 4: 4+1=10.

Wenn Ihnen das Rechnen in anderen als dem gewohnten Zehnersystem schwer fällt: Basteln Sie sich aus zwei Papierstreifen einen „Rechenschieber“. Die Skizze rechts zeigt den Gebrauch am Beispiel $(3)_5+(3)_5=(11)_5$. Eine Vorlage für den „Rechenschieber“ finden Sie auf Seite 72.

$$\begin{array}{rcccccccc} & & 2. & 1 & 4 & 3. & 3 & 0 & 4 \\ + & & & 3 & 3 & 4. & 1 & 2 & 3 \\ & {\scriptstyle 1} & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & & {\scriptstyle 1} & \\ \hline & & 3. & 0 & 3 & 2. & 4 & 3 & 2 \end{array}$$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Übungsaufgabe 6.20: Addition in verschiedenen Zahlensystemen

Addieren Sie die gegebenen Zahlen im **Dreiersystem**.

Hier geht es zu Lösungshinweisen.

a) $01.210 + 111 = ??$

b) $01.210 + 222 = ??$

c) $212.210 + 02.111 = ??$

d) $121.001 + 222.122 = ??$

e) $11212 + 21120 + 02212 = ??$

f) $= 22.112 + 12.212 + 201.210 + 22.112??$

Addieren Sie die gegebenen Zahlen im **Vierersystem**.

g) $2.131 + 0.111 = ??$

h) $12.321 + 23.133 = ??$

i) $233.232 + 333.011 = ??$

j) $23.112 + 12.312 + 01.310 = ??$

k) $322.323 + 21.301 + 13.221 + 31.203 = ??$

Addieren Sie die gegebenen Zahlen im **Fünfersystem**.

l) $30.413 + 24.310 = ??$

m) $423.324 + 233.324 = ??$

n) $341.023 + 22.433 + 01.343 = ??$

o) $223.344 + 334.422 + 11.440 + 44.113 = ??$

Addieren Sie die gegebenen Zahlen im **Oktalsystem**.

p) $4.626 + 3.771 = ??$

q) $32.664 + 77.701 = ??$

r) $354.026 + 214.372 + 33.546 = ??$

s) $5.377.024 + 427.006 + 00.236 + 22.175 = ??$

Addieren Sie die gegebenen Zahlen im **Hexadezimalsystem**.

t) $3A6 + BCD = ??$

u) $7.FB3 + 8EA = ??$

v) $9.0B4 + 8.4CF = ??$

w) $FF.EED + CC.BBA = ??$

x) $A.702 + 6.FB0 + 3.327 = ??$

y) $E.F09 + A.7BC + 6.69D = ??$

z) $37.FB4 + 62.C01 + 49.BBA + 90.92E = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

Hinweis 6.4: Addition in verschiedenen Zahlensystemen

Hier finden Sie Online-Rechner:

https://de.planetcalc.com/2096/
https://de.binary2hex.com/allesystem.html
Alle Links zuletzt geprüft am 16-OKT-2024.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

6.9. Subtraktion in verschiedenen Zahlensystemen

Erläuterung 6.10: Subtraktion im Zehnersystem

Betrachten wir die gewohnte Subtraktion im Zehnersystem:

$$\begin{array}{rrrr} & 2 & 5 & 6 \\ - & 1 & 4 & 7 \end{array}$$

– folgt –

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

6.9.1. Rechenschieber zum selber Basteln

$n=2$	$n=2$	$n=3$	$n=3$	$n=4$	$n=4$	$n=5$	$n=5$	$n=6$	$n=6$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	10	2	2	2	2	2	2	2	2
11	11	10	10	3	3	3	3	3	3
100	100	11	11	10	10	4	4	4	4
101	101	12	12	11	11	10	10	5	5
110	110	20	20	12	12	11	11	10	10
111	111	21	21	13	13	12	12	11	11
1000	1000	22	22	20	20	13	13	12	12
1001	1001	100	100	21	21	14	14	13	13
1010	1010	101	101	22	22	20	20	14	14
1011	1011	102	102	23	23	21	21	15	15
1100	1100	110	110	30	30	22	22	20	20
1101	1101	111	111	31	31	23	23	21	21
1110	1110	112	112	32	32	24	24	22	22
1111	1111	120	120	33	33	30	30	23	23
10000	10000	121	121	100	100	31	31	24	24
10001	10001	122	122	101	101	32	32	25	25
10010	10010	200	200	102	102	33	33	30	30
10011	10011	201	201	103	103	34	34	31	31
10100	10100	202	202	110	110	40	40	32	32
10101	10101	210	210	111	111	41	41	33	33
10110	10110	211	211	112	112	42	42	34	34
10111	10111	212	212	113	113	43	43	35	35
11000	11000	220	220	120	120	44	44	40	40
11001	11001	221	221	121	121	100	100	41	41
11010	11010	222	222	122	122	101	101	42	42
$n=2$	$n=2$	$n=3$	$n=3$	$n=4$	$n=4$	$n=5$	$n=5$	$n=6$	$n=6$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

n=7	n=7	n=8	n=8	n=9	n=9	n=10	n=10	n=16	n=16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
10	10	7	7	7	7	7	7	7	7
11	11	10	10	8	8	8	8	8	8
12	12	11	11	10	10	9	9	9	9
13	13	12	12	11	11	10	10	A	A
14	14	13	13	12	12	11	11	B	B
15	15	14	14	13	13	12	12	C	C
16	16	15	15	14	14	13	13	D	D
20	20	16	16	15	15	14	14	E	E
21	21	17	17	16	16	15	15	F	F
22	22	20	20	17	17	16	16	10	10
23	23	21	21	18	18	17	17	11	11
24	24	22	22	20	20	18	18	12	12
25	25	23	23	21	21	19	19	13	13
26	26	24	24	22	22	20	20	14	14
30	30	25	25	23	23	21	21	15	15
31	31	26	26	24	24	22	22	16	16
32	32	27	27	25	25	23	23	17	17
33	33	30	30	26	26	24	24	18	18
34	34	31	31	27	27	25	25	19	19
35	35	32	32	28	28	26	26	1A	1A
n=7	n=7	n=8	n=8	n=9	n=9	n=10	n=10	n=16	n=16

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

6.10. Multiplikation in verschiedenen Zahlensystemen

Erläuterung 6.11: Schriftliches Multiplizieren im Zehnersystem

3	7	1	2	·	2	6	5	
6	4	2	4					(2·3.712)
1								
	8	2	6	2				(6·3.712)
1	4		1					
		5	5	5	0			(5·3.712)
	1	3		1				
1	1	1						
9	8	3	6	8	0			

Es gilt: Produkt = Multiplikator · Multiplikand (Beispiel: $3712 \cdot 265$).

Wir bearbeiten **von links nach rechts** Ziffer für Ziffer des Multiplikanden; diese werden jeweils mit den Multiplikator-Ziffern **von rechts nach links** multipliziert; ein etwaiger Übertrag wird bei der nächsten Ziffer hinzu addiert (Überträge im Beispiel schwarz).

Diese Zwischensumme schiebt sich mit jeder Stelle um eins nach **rechts**.

Abschließend werden die Zwischensummen mit Übertrag (im Beispiel rot) zum Endergebnis addiert.

Erläuterung 6.12: Schriftliches Multiplizieren in beliebigen Zahlensystemen

In anderen Zahlensystemen als dem vertrauten Dezimalsystem gehen wir beim schriftlichen Multiplizieren genauso vor.

Beispiel 6.10: Multiplikation im Fünfersystem

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

Berechne $(3.143)_5 \cdot (2.301)_5 = (?)_5$.

Vielleicht hilft Ihnen bei dieser Aufgabe eine „Einmaleins-Tabelle“ im Fünfersystem – wie nebenstehend.

	3	1	4	3	·	2	3	0	1	
	1	2	3	1						(2·3.143)
1		1	1							
		4	3	2	4					(3·3.143)
	1		2	1						
			0	0	0	0				(0·3.143)
				3	1	4	3			(1·3.143)
	1	2	1	1						
1	3	4	0	3	0	4	3			

Übungsaufgabe 6.21: Multiplikation im Zweiersystem

Multiplizieren Sie die gegebenen Zahlen im **Binärsystem**.

Hier geht es zu Lösungshinweisen.

a) $101 \cdot 10 = ??$

b) $1.101 \cdot 11 = ??$

c) $11.101 \cdot 1.011 = ??$

d) $10.001 \cdot 1.101 = ??$

e) $00.110.011 \cdot 01.010 = ??$

f) $10.110.111 \cdot 011.010 = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Übungsaufgabe 6.22: Multiplikation im Dreiersystem

Multiplizieren Sie die gegebenen Zahlen im **Dreiersystem**.

Hier geht es zu Lösungshinweisen.

a) $102 \cdot 21 = ??$

b) $222 \cdot 111 = ??$

c) $210 \cdot 221 = ??$

d) $222 \cdot 222 = ??$

e) $2.010 \cdot 1.020 = ??$

f) $01.210 \cdot 2.121 = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 6.23: Multiplikation im Fünfersystem

Multiplizieren Sie die gegebenen Zahlen im **Fünfersystem**.

Hier geht es zu Lösungshinweisen.

a) $42 \cdot 23 = ??$

b) $432 \cdot 24 = ??$

c) $432 \cdot 213 = ??$

d) $3.334 \cdot 142 = ??$

e) $4.321 \cdot 1.234 = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 6.24: Multiplikation im Oktalsystem

Multiplizieren Sie die gegebenen Zahlen im **Achtersystem**.

Hier geht es zu Lösungshinweisen.

a) $206 \cdot 31 = ??$

b) $372 \cdot 254 = ??$

c) $736 \cdot 675 = ??$

d) $1.477 \cdot 776 = ??$

e) $7.654 \cdot 4.567 = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 6.25: Multiplikation im Hexadezimalsystem

Multiplizieren Sie die gegebenen Zahlen im **Sechzehnersystem**.

Hier geht es zu Lösungshinweisen.

a) $37 \cdot E = ??$

b) $5D \cdot 23 = ??$

c) $FA \cdot 9A = ??$

d) $AF7 \cdot 3ED = ??$

e) $ABCD \cdot FED = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

6.11. Division in verschiedenen Zahlensystemen

– folgt –

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

7. Komplexe Zahlen

7.1. Grundlegendes

Erläuterung 7.1: Komplexe Zahlen

Im $\mathbb{R}$ können keine Wurzeln aus negativen Zahlen gezogen werden; ebenso sind Logarithmen aus negativen Zahlen nicht definiert. Diese Einschränkungen hebt man durch Einführung der *komplexen Zahlen* auf.

Man definiert:

$$\mathrm{j} := \sqrt{-1}$$

j ist die *imaginäre Einheit*; die Mathematiker und Physiker schreiben i, die Elektrotechniker schreiben meistens j, um eine Verwechselung mit dem zeitabhängigen Strom $i = i(t)$ auszuschließen.[7.1]

Damit erhält man eine neue Zahlenmenge:

$$\mathbb{C} := \left\{ \underline{z} = \sigma + \mathrm{j} \cdot \omega \mid \sigma, \omega \in \mathbb{R},\, \mathrm{j} = \sqrt{-1} \right\}$$

Elektrotechniker unterstreichen komplexwertige Variablen häufig ($\underline{z}$).

Einige Definitionen: Für die komplexe Zahl $\underline{z} = \sigma + \mathrm{j} \cdot \omega$ ist

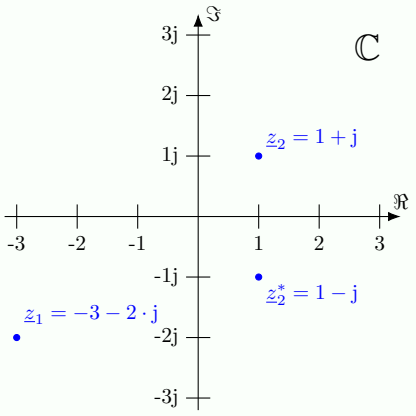
- $\Re(\underline{z}) = \sigma$ der *Realteil*;
- $\Im(\underline{z}) = \omega$ der *Imaginärteil*;
- $|\underline{z}| := \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$ der Betrag und
- $\underline{z}^* := \sigma - \mathrm{j} \cdot \omega$ die zu $\underline{z} = \sigma + \mathrm{j} \cdot \omega$ *konjugiert komplexe* Zahl.

Komplexe Zahlen werden in der *Gaußschen Zahlenebene* dargestellt; diese ähnelt einem x-y-Koordinatensystem.

- Die Abszisse (Rechtsachse) ist die *Realteil-Achse*.
- Die Ordinate (Hochachse) ist die *Imaginärteil-Achse*.

Damit steht jeder Punkt der Gaußschen Zahlenebene für genau eine komplexe Zahl.

Rechts ist eine Gaußsche Zahlenebene mit drei Beispielszahlen dargestellt.



[7.1] Man beachte: Die imaginäre Einheit i (oder j) wird in Steilschrift geschrieben – genau so wie die Eulersche Zahl e oder der Differentialoperator d im Ausdruck $\mathrm{d}/\mathrm{d}\,x\, f(x)$.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

7.2. Übungen

Übungsaufgabe 7.1: Grundlegendes

a) $\underline{z} = 5 + 3\mathrm{j}$; Geben Sie Real- und Imaginärteil an. ??

b) $\underline{z} = -4 + 7\mathrm{j}$; Geben Sie Real- und Imaginärteil an. ??

c) $\underline{z} = 8 - \mathrm{j}$; Geben Sie Real- und Imaginärteil an. ??

d) $\underline{z} = 6 + 2\mathrm{j}$; Geben Sie $\underline{z}^*$ an. ??

e) $\underline{z} = -4 - \mathrm{j}$; Geben Sie $\underline{z}^*$ an. ??

f) Was ist der Betrag von $z = -\mathrm{j}$? ??

g) Was ist der Betrag von $z = 7 + 6\mathrm{j}$? ??

Hier geht es zur Musterlösung.

7.3. Grundrechenarten

Erläuterung 7.2: Grundrechenarten mit komplexen Zahlen

Grundregel: Real- und Imaginärteil sind voneinander unabhängig!

Addition und Subtraktion: Real- und Imaginärteil getrennt addieren/subtrahieren:

$$\underline{z}_1 = \sigma_1 + \mathrm{j}\omega_1;\ \underline{z}_2 = \sigma_2 + \mathrm{j}\omega_2$$
$$\underline{z}_1 \pm \underline{z}_2 = \sigma_1 + \mathrm{j}\omega_1 \pm (\sigma_2 + \mathrm{j}\omega_2) = \sigma_1 \pm \sigma_2 + \mathrm{j} \cdot (\omega_1 \pm \omega_2)$$

Multiplikation: Distributivgesetz anwenden. Beachte: $\mathrm{j} \cdot \mathrm{j} = \mathrm{j}^2 = -1$.

$$\underline{z}_1 = \sigma_1 + \mathrm{j}\omega_1;\ \underline{z}_2 = \sigma_2 + \mathrm{j}\omega_2$$
$$\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \mathrm{j} \cdot \omega_1 \cdot \sigma_2 + \mathrm{j} \cdot \sigma_1 \cdot \omega_2 - \omega_1 \cdot \omega_2 = \underbrace{\sigma_1 \cdot \sigma_2 - \omega_1 \cdot \omega_2}_{\text{Realteil}} + \mathrm{j} \cdot \underbrace{(\sigma_1 \cdot \omega_2 + \sigma_2 \cdot \omega_1)}_{\text{Imaginärteil}}$$

Division: Reellmachen des Nenners durch Erweiterung mit dem konjugiert komplexen Nenner (3. binomische Formel). Beachte: $(\sigma + \mathrm{j}\omega) \cdot (\sigma - \mathrm{j}\omega) = \sigma^2 + \omega^2$ wg. $\mathrm{j}^2 = -1$.

$$\underline{z}_1 = \sigma_1 + \mathrm{j}\omega_1;\ \underline{z}_2 = \sigma_2 + \mathrm{j}\omega_2$$
$$\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{\sigma_1 + \mathrm{j}\omega_1}{\sigma_2 + \mathrm{j}\omega_2} = \frac{(\sigma_1 + \mathrm{j}\omega_1) \cdot (\sigma_2 - \mathrm{j}\omega_2)}{(\sigma_2 + \mathrm{j}\omega_2) \cdot (\sigma_2 - \mathrm{j}\omega_2)} = \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \omega_1 \cdot \omega_2 + \mathrm{j} \cdot (\omega_1 \cdot \sigma_2 - \omega_2 \cdot \sigma_1)}{\sigma_2^2 + \omega_2^2}$$

7.4. Übungen

Übungsaufgabe 7.2: Grundrechenarten mit komplexen Zahlen

a) Addieren Sie $z_1 + z_2 = z$ mit $z_1 = 3 + 4\mathrm{j}, z_2 = 2 - 3\mathrm{j}$??

b) Addieren Sie $z_1 + z_2 = z$ mit $z_1 = -5 + 3\mathrm{j}, z_2 = 5 - 5\mathrm{j}$??

c) Subtrahieren Sie $z_1 - z_2 = z$ mit $z_1 = 1 - 2\mathrm{j}, z_2 = -4 - \mathrm{j}$??

d) Subtrahieren Sie $z_1 - z_2 = z$ mit $z_1 = 6 + 5\mathrm{j}, z_2 = 8 - 3\mathrm{j}$??

e) Multiplizieren Sie $z_1 \cdot z_2 = z$ mit $z_1 = -3 - 4\mathrm{j}, z_2 = 7 + 4\mathrm{j}$??

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

f) Multiplizieren Sie $z_1 \cdot z_2 = z$ mit $z_1 = 3 + 2\mathrm{j}, z_2 = 6 - \mathrm{j}$??

g) Dividieren Sie $z = (-8 + 2\mathrm{j})/(4 - 9\mathrm{j})$??

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 7.3: Komplex etwas komplexer [OpenAI2024h]

a) Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 4 + 3i$ und $z_2 = 2 - 5i$. Berechne das Produkt $z_1 \cdot z_2$ und stelle das Ergebnis in der Form $a + bi$ dar. ??

b) Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_3 = -1 + 2i$ und $z_4 = 3 + 4i$. Berechne die Division $\frac{z_3}{z_4}$ und stelle das Ergebnis in der Form $a + bi$ dar. ??

c) Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_5 = 2 + i$ und $z_6 = 1 - 3i$. Berechne das Produkt $(z_5 \cdot z_6) \cdot \overline{z_6}$, wobei $\overline{z_6}$ die konjugierte komplexe Zahl von z_6 ist. Stelle das Ergebnis in der Form $a + bi$ dar. ??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

8. Termumformungen – Der Gleichungskalkül

8.1. Gleichungen

Erläuterung 8.1: Allgemeines zu Gleichungen

Gleichungen verknüpfen zwei Terme (den *linken Seitenterm* und den *rechten Seitenterm*) mittels des Gleichheitszeichens =:

$$T_1 = T_2$$

Im logischen Sinne ist eine Gleichung eine Aussage (bzw. eine Aussageform, falls einer der beiden Terme mindestens eine Variable enthält).

Damit hat man entweder eine „richtige Gleichung“ (die Gleichung ist eine logisch wahre Aussage) oder eine „falsche Gleichung“ (die Gleichung ist eine logisch falsche Aussage). Beispiel:

$3 = 3$ Richtig

$3 = 8$ Falsch

Enthält mindestens einer der Terme Variablen, dann nennt man das Suchen aller konkreten Werte für die Variable oder für die Variablen, die beim Einsetzen eine richtige Gleichung ergeben, das *Lösen der Gleichung*, die gefundenen konkreten Werte sind dann die *Lösungen der Gleichung*. Sie bilden zusammen genommen die *Lösungsmenge* $\mathbb{L}$ *der Gleichung*. Beispiele:

$x = 3$	$\mathbb{L} = \{3\}$
$x + 1 = 8$	$\mathbb{L} = \{7\}$
$(x + 1) \cdot (x - 3) = 0$	$\mathbb{L} = \{-1;\ 3\}$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

8.1.1. Gleichungen mit linearen Termen

Erläuterung 8.2: Rechenregeln für lineare Gleichungen

Rechenregeln für (lineare) Gleichungen:

Alle Rechenoperationen $(+, -, \cdot, \div)$ sind für Gleichungen erlaubt (Äquivalenzumformungen), solange sie für beide Seiten der Gleichung gleichermaßen durchgeführt werden (ausgenommen Multiplikation mit und Division durch 0).

Zielsetzung ...

... ist meistens eine Umformung, so dass am Ende derjenige Wert für x gefunden wird, der die Gleichung löst.

Vorgehensweise:

Alle Terme mit x zusammenfassen und mit Hilfe der Gegenoperationen $+ -$ oder $\cdot \div$ so lange umformen, bis x auf einer Seite separiert ist.

$\| \, xxx$ bedeutet dabei: xxx auf beide Seitenterme anwenden.

Beispiele:

- $4 + x = 7 \quad \| \; -4$
  $\Leftrightarrow 4 + x - 4 = 7 - 4$
  $\Leftrightarrow x = 7 - 4 = 3$
- $4 \cdot x = -12 \quad \| \; \div 4$
  $\Leftrightarrow 4 \cdot x \div 4 = -12 \div 4$
  $\Leftrightarrow x = -3$
- $\frac{8 - x}{2} = 3 \quad \| \; \cdot 2$
  $\Leftrightarrow 8 - x = 3 \cdot 2 \quad \| \; -8$
  $\Leftrightarrow -x = 6 - 8 = -2 \quad \| \; \div (-1)$
  $\Leftrightarrow x = 2$

Übungsaufgabe 8.1: Lineare Gleichungen

Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungen nach x auf:

a) $12 - x = 7 \quad \rightarrow ??$

b) $13 - x = -4 \quad \rightarrow ??$

c) $\frac{17 - x}{3} = 5 \quad \rightarrow ??$

d) $\frac{5 \cdot x - 25}{2} = -5 \quad \rightarrow ??$

e) $5 \cdot x - \frac{2 \cdot x}{5} = 2 \cdot x + 13 \quad \rightarrow ??$

f) $6 - \frac{8 \cdot x}{6} = -2 \cdot x + 8 \quad \rightarrow ??$

g) $\frac{10 - x}{x} = 19 \quad \rightarrow ??$

h) $\frac{x + 11}{4 + x} = 2 \quad \rightarrow ??$

i) $\frac{32 \cdot x - 24}{4} = 3 \cdot x + 4 \quad \rightarrow ??$

j) $\frac{24 \cdot x}{0{,}75 + 5 \cdot x} = 3 \quad \rightarrow ??$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

k) $\dfrac{6\cdot(x+1)}{4} = \dfrac{x}{2} + 2{,}5 \quad \rightarrow ??$

l) $\dfrac{x}{3} - 3\cdot(3-x) = 4 + \dfrac{1}{3} \quad \rightarrow ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

8.1.2. Summenoperator

Erläuterung 8.3: Der Summenoperator (Summenzeichen)

Das Summenzeichen Σ (großes griechisches Sigma) ist eine abgekürzte Schreibweise für wiederholtes Addieren:

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

Die Laufvariable i (Index, Summationsindex) durchläuft alle ganzen Zahlen von 1 bis 5.

Jede dieser Zahlen der Laufvariable wird einmal in den Term hinter dem Summenzeichen (Summenglied) eingesetzt, und dann wird über alle i Terme aufsummiert.

Beispiele:

- $\sum_{i=6}^{12} i^2 = 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2$
- $\sum_{k=2}^{6} 2\cdot(k+1) = 6 + 8 + 10 + 12 + 14$
- $\sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{i}{\ln i} = \dfrac{1}{\ln 1} + \dfrac{2}{\ln 2} + \dfrac{3}{\ln 3} + \dfrac{4}{\ln 4} + \cdots$
- $\sum_{k=0}^{4} \dfrac{20}{1{,}1^i} = 20 + \dfrac{20}{1{,}1} + \dfrac{20}{1{,}1^2} + \dfrac{20}{1{,}1^3} + \dfrac{20}{1{,}1^4}$

Übungsaufgabe 8.2: Summenoperator (1)

Berechnen Sie die folgenden Summen:

a) $\sum_{i=1}^{10} i = ??$

b) $\sum_{k=1}^{10} 100\cdot k = ??$

c) $\sum_{n=1}^{10} 3 = ??$

d) $\sum_{i=2}^{5} (i-1)^2 = ??$

e) $\sum_{i=1}^{5} \dfrac{i-1}{i} = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Erläuterung 8.4: Einfache Rechenregeln zum Summenoperator

- **Nur ein Summand [1]:**
  $$\sum_{k=n}^{n} a_k = a_n$$
- **Summation einer Konstanten [2]:**
  $$\sum_{k=1}^{n} a = \underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{n \text{ Stück}} = n \cdot a \qquad \text{z. B.} \quad \sum_{i=1}^{10} \pi = 10 \cdot \pi$$
- **Konstante in jedem Summenglied [3]:**
  $$\sum_{k=l}^{u} a \cdot x_k = a \cdot \sum_{k=l}^{u} x_k \qquad \text{z. B.} \quad \sum_{m=3}^{5} 4 \cdot m = 4 \cdot (3 + 4 + 5) = 48$$
- **Summe über Summentermen [4]:**
  $$\sum_{k=l}^{u} x_k \pm y_k = \sum_{k=l}^{u} x_k \pm \sum_{k=l}^{u} y_k \qquad \text{z. B.} \quad \sum_{k=2}^{4} k^2 + k = (4 + 9 + 16) + (2 + 3 + 4) = 38$$

Übungsaufgabe 8.3: Summenoperator (2)

Berechnen Sie die folgenden Summen:

a) $\sum_{i=1}^{10} (40 \cdot i - 220) = ??$

b) $\sum_{i=4}^{12} (i^2 - 9 \cdot i) = ??$

c) $\sum_{k=-3}^{6} (k \cdot \frac{k-2}{3}) = ??$

d) $\sum_{k=-3}^{-5} \big(k \cdot (k+1)\big) = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

Erläuterung 8.5: Regeln für Summengrenzen

Die obere Grenze muss stets größer oder gleich als die untere Grenze sein:

$$\sum_{k=a}^{b} x_k = 0 \qquad \forall\, b < a$$

Summen lassen sich „zerstückeln“:

$$\sum_{k=a}^{b} x_k = \sum_{k=a}^{c} x_k + \sum_{k=c+1}^{b} x_k \qquad a \le c < b$$

Beispiele:

$$\sum_{k=1}^{10} x_k = 55 = \sum_{k=1}^{5} x_k + \sum_{k=6}^{10} x_k = 15 + 40 = 55$$

$$\sum_{k=4}^{10} x_k = 49 = \sum_{k=1}^{10} x_k - \sum_{k=1}^{3} x_k = \underbrace{\frac{10 \cdot 11}{2} - \frac{3 \cdot 4}{2}}_{\text{Summenformel „kleiner Gauß“}} = 55 - 6 = 49$$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Erläuterung 8.6: Umindizierung

Es gilt:

$$\sum_{k=a}^{b} x_k = \sum_{k=a+o}^{b+o} x_{k-o} \quad \forall o \in \mathbb{R}$$

Beispiel:

$$\sum_{k=2}^{5}(k+1) = \sum_{k=0}^{3}(k+3) = 18$$

Übungsaufgabe 8.4: Umindizierung (Summenzeichen) v1

Vereinfachen Sie die Berechnung der folgenden Summen durch Umindizierung (Sofern es geht!).

a) Hier geht es zu Lösungshinweisen. $\sum_{k=2}^{5} k^2 = ??$

b) Hier geht es zu Lösungshinweisen. $\sum_{n=0}^{10} (2n+1) = ??$

c) Hier geht es zu Lösungshinweisen. $\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=i}^{5} (i+j) = ??$

d) Hier geht es zu Lösungshinweisen. $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cdot k = ??$

e) Hier geht es zu Lösungshinweisen. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 2^k = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Erläuterung 8.7: Doppelsummen

Mehrfache Summenzeichen hintereinander werden von rechts nach links aufgelöst:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} x_{ik}\\
=&\sum_{i=1}^{m}\left(x_{i1}+x_{i2}+\cdots+x_{in}\right)\\
=&x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1n}+\\
&x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2n}+\\
&\quad\cdots\\
&x_{m1}+x_{m2}+\cdots+x_{mn}
\end{aligned}$$

Die Reihenfolge der Summenzeichen darf vertauscht werden (Ausnahme siehe nächster Punkt):

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} x_{ik}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ik}$$

Sonderfall: Der Summationsindex wird „rechts“ verwendet: Vertauschung nicht zulässig:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{i} x_{ik}\\
=&x_{11}+\\
&x_{21}+x_{22}+\\
&\quad\cdots\\
&x_{m1}+x_{m2}+\cdots+x_{mm}
\end{aligned}$$

Das Produkt zweier Summen ist die Doppelsumme der Produkte:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} x_i\cdot y_k$$

Übungsaufgabe 8.5: Mehrfachsummen

Berechnen Sie die folgenden Summen:

a) $\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=2}^{4}(2\cdot k+i)=??$

b) $\sum_{i=0}^{2}\sum_{k=1}^{3}(i\cdot k)=??$

c) $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3}(i^2+j^2)=??$

d) $\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{i\cdot j}=??$

e) $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}(-1)^{i+j}\cdot i\cdot j=??$

f) $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(i+j+k)=??$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

g) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} i \cdot j \cdot k = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

Hinweis 8.1: Weitere Übungsaufgaben

Suchen Sie auch selber nach weiteren Übungsaufgaben. Hier eine kleine Auswahl (alle Links zuletzt geprüft am 24-AUG-2024):

https://www.studimup.de/%C3%BCbungen/algebra/summen-und-produktzeichen/

http://www.raschweb.de/emg-g9/LKM-Uebung-02.pdf

https://elearning.th-wildau.de/mod/book/view.php?id=122085&chapterid=186

https://www.math.kit.edu/iag6/lehre/am12014w/media/loesungen1.pdf

8.1.3. Produktoperator

Erläuterung 8.8: Der Produktoperator (Produktzeichen)

Das Produktzeichen Π (großes griechisches Pi) ist eine abgekürzte Schreibweise für wiederholtes Multiplizieren:

$$\prod_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2$$

Die Laufvariable i durchläuft alle ganzen Zahlen von 1 bis 5.

Jede dieser Zahlen der Laufvariable wird einmal in den Term hinter dem Produktzeichen (Faktor) eingesetzt, und dann wird über alle i-Terme multipliziert.

Beispiele:

- $\prod_{i=6}^{12} i^2 = 6^2 \cdot 7^2 \cdot 8^2 \cdot 9^2 \cdot 10^2 \cdot 11^2 \cdot 12^2$
- $\prod_{k=2}^{6} 2 \cdot (k+1) = 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 = 2 \sum_{k=2}^{6} (k+1)$
- $\prod_{i=1}^{\infty} \frac{i}{\ln i} = \frac{1}{\ln 1} \cdot \frac{2}{\ln 2} \cdot \frac{3}{\ln 3} \cdot \frac{4}{\ln 4} \cdot \ldots$
- $\prod_{k=0}^{4} \frac{20}{1{,}1^i} = 20 \cdot \left(1 \cdot \frac{1}{1{,}1} \cdot \frac{1}{1{,}1^2} \cdot \frac{1}{1{,}1^3} \cdot \frac{1}{1{,}1^4}\right)$

Übungsaufgabe 8.6: Einfache Aufgaben zu Produktoperatoren [OpenAI2024ab]

a) Berechnen Sie das Produkt $\prod_{i=1}^{4} i$. ??

b) Berechnen Sie das Produkt $\prod_{k=1}^{5} (k+1)$. ??

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

c) Berechnen Sie das Produkt $\prod_{n=2}^{6}(2n-1)$. ??

d) Berechnen Sie das Produkt $\prod_{m=1}^{5}\frac{m}{m+1}$. ??

e) Berechnen Sie das Produkt $\prod_{p=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)$ für $n=4$. ??

Hier geht es zur Musterlösung.

8.1.3.1. Fakultäten

Erläuterung 8.9: Die Fakultät

Unter der *Fakultät* $n!$ einer natürlichen Zahl n versteht man das Produkt aller natürlichen Zahlen, die kleiner oder gleich n sind:

$$n! := \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

Dazu definiert man noch $0! := 1$.

Die Fakultät hat weitreichende Anwendungen, z. B. in der Kombinatorik, oder in der Reihenentwicklung von Funktionen.

Übungsaufgabe 8.7: Fakultäten

Berechnen Sie:

a) $5! = ??$

b) $10! = ??$

c) $8! - 3! = ??$

d) $6! \cdot 4! = ??$

e) $\frac{12!}{13!} = ??$

f) $\frac{14!}{12!} = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

8.1.4. Gleichungen mit quadratischen Termen

8.1.4.1. Binomische Formeln

Erläuterung 8.10: Binomische Formeln

I. $\boldsymbol{(a+b)^2} = (a+b)\cdot(a+b) = a\cdot(a+b)+b\cdot(a+b) = \boldsymbol{a^2+2\cdot a\cdot b+b^2}$

II. $\boldsymbol{(a-b)^2} = (a-b)\cdot(a-b) = a\cdot(a-b)-b\cdot(a-b) = \boldsymbol{a^2-2\cdot a\cdot b+b^2}$

III. $\boldsymbol{(a+b)\cdot(a-b)} = a\cdot(a-b)+b\cdot(a-b) = \boldsymbol{a^2-b^2}$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Übungsaufgabe 8.8: Aufgaben zum Kopfrechnen

Rechnen Sie im Kopf!

a) $9 \cdot 11 = ??$

b) $19^2 = ??$

c) $18 \cdot 22 = ??$

d) $25^2 = ??$

e) $13 \cdot 17 = ??$

f) $35^2 = ??$

g) $27 \cdot 33 = ??$

h) $45^2 = ??$

i) $39 \cdot 41 = ??$

j) $55^2 = ??$

k) $49 \cdot 51 = ??$

l) $65^2 = ??$

m) $57 \cdot 63 = ??$

n) $75^2 = ??$

o) $69 \cdot 71 = ??$

p) $85^2 = ??$

q) $77 \cdot 83 = ??$

r) $95^2 = ??$

s) $89 \cdot 91 = ??$

t) $105^2 = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 8.9: Binomische Formeln

a) $51 \cdot 51 = ??$

b) $39^2 = ??$

c) $1040^2 = ??$

d) $(x-y)^2 - (x+y)^2 + 4xy = ??$

e) $(s-t)^2 + 2(s-t)(s+t) + (s+t)^2 - 3s^2 = ??$

f) $(4s-3t)^2 - (2s+t)^2 + 8st - 2(s-t)(s+t) - 10(s-t)^2 = ??$

g) $xy + \left(-1+\sqrt{xy}\right)\left(-1-\sqrt{xy}\right) = ??$

h) $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{2x^2-4xy+2y^2} + \dfrac{2x^2-4xy+2y^2}{4x^2-8xy+4y^2} = ??$

i) $\dfrac{x^2-y^2}{(x-y)^2} - \dfrac{(x+y)^2}{x^2-y^2} = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

8.1.4.2. Der binomische Lehrsatz

Erläuterung 8.11: Binomischer Lehrsatz

Der binomische Lehrsatz ist ein Satz der Mathematik, der es in seiner einfachsten Form ermöglicht, die Potenzen eines Binoms $x + y$, also einen Ausdruck der Form

$$(x + y)^n, n \in \mathbb{N}$$

als Polynom n-ten Grades in den Variablen x und y auszudrücken.

Binomischer Lehrsatz für natürliche Exponenten:
Für alle Elemente x und y eines kommutativen unitären Rings und für alle natürlichen Zahlen $_0$ gilt die Gleichung:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Insbesondere gilt dies für reelle oder komplexe Zahlen x und y (mit der Konvention $0^0 = 1$).
Die Koeffizienten dieses Polynomausdrucks sind die Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!},$$

die ihren Namen aufgrund ihres Auftretens im binomischen Lehrsatz erhalten haben. Mit $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ ist hierbei die Fakultät von n bezeichnet.

Übungsaufgabe 8.10: Binomischer Lehrsatz

Hinweis: j ist die *imaginäre Einheit*: $\mathrm{j} = \pm\sqrt{-1}$.

a) $(x + y)^3 = ??$

b) $(x - y)^3 = ??$

c) $(a + b)^5 = ??$

d) $\binom{5}{1} = ??$

e) $\binom{1}{5} = ??$

f) $\binom{7}{4} = ??$

g) $\binom{27}{24} = ??$

h) $\binom{319}{317} = ??$

i) $\binom{7}{3} - \binom{6}{2} = ??$

j) $\binom{12}{7} + \binom{9}{4} = ??$

k) $\dfrac{\binom{14}{11} \cdot \binom{7}{5}}{\binom{6}{3}} = ??$

l) $\left(a + \mathrm{j} \cdot b\right)^n = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

8.1.4.3. Allgemeine quadratische Gleichung

Erläuterung 8.12: Quadratische Gleichungen

Die allgemeine quadratische Gleichung hat die Form

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \qquad \text{mit den beiden Lösungen } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Division durch a führt auf die pq-Form:

$$x^2 + p \cdot x + q = 0 \qquad \text{mit den beiden Lösungen } x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Den Radikand der Wurzel $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ bezeichnet man auch als „Diskriminante“ D. Es gilt:

- $D > 0$: Die quadratische Gleichung hat zwei reelle Lösungen (= Nullstellen).
- $D = 0$: Die quadratische Gleichung hat eine reelle Doppel-Lösung (= Nullstelle).
- $D < 0$: Die quadratische Gleichung hat **keine** reellen Lösungen.

Beispiel 8.1: Herleitung der Lösung der quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \| \div a \quad a \neq 0 \text{ !!!}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \qquad \text{Quadratische Ergänzung } \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \overbrace{\left(\frac{b}{2a}\right)^2}^{=0} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2} + \frac{c}{a} = 0 \qquad \text{Vereinfachen}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \qquad \text{1. Binomische Formel}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \qquad \text{Umordnen}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \qquad \| \sqrt{\square}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \qquad \text{Vereinfachen}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{Nach } x \text{ auflösen}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = -\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Übungsaufgabe 8.11: Quadratische Gleichungen

Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen.

a) $x^2 - 6 \cdot x + 8 = 0$ $\quad \rightarrow$??

b) $-3 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 6 = 0$ $\quad \rightarrow$??

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

c) $-4 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 15 = 3$ $\quad \rightarrow$??

d) $10 - 10 \cdot x - x^2 = 35$ $\quad \rightarrow$??

e) $2 \cdot x - 2 - 0{,}5 \cdot x^2 = 2$ $\quad \rightarrow$??

f) $4 \cdot x^2 + 7 = 8$ $\quad \rightarrow$??

g) $x^2 + \frac{1}{12} - \frac{1}{12} \cdot x = \frac{1}{6}$ $\quad \rightarrow$??

h) $5 + x^2 = -(2 \cdot x + 1)$ $\quad \rightarrow$??

i) $2 \cdot x - \frac{1}{7} \cdot x^2 = 7$ $\quad \rightarrow$??

Hier geht es zur Musterlösung.

8.1.5. Bruchrechnung und Gleichungen mit Brüchen

8.1.5.1. Gemeine Brüche

Erläuterung 8.13: Bruchrechnung

Definition und Schreibweise: Zähler a geteilt durch Nenner b ($b \neq 0$): $\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$

$$a : b = a \div b = \frac{a}{b} = {}^{a}/_{b}$$

Rechenregeln für Brüche:

- Addition und Subtraktion: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}$

  Besser: Anstelle $b \cdot d$ das kleinste gemeinsame Vielfache nehmen:

  $$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot \frac{\text{kgV}(b,d)}{b} \pm c \cdot \frac{\text{kgV}(b,d)}{d}}{\text{kgV}(b,d)}$$

- Multiplikation: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$
- Division: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$
- Kürzen und Erweitern: $\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$ Aber: $\frac{a+c}{b+c} \neq \frac{a}{b}$
- Immer maximal kürzen! $\frac{a}{b} \rightarrow \frac{a \div \text{ggT}(a,b)}{b \div \text{ggT}(a,b)}$

Übungsaufgabe 8.12: Bruchrechnung (1)

Kürzen Sie die Brüche.

a) $\frac{12}{15} = ??$

b) $\frac{45}{18} = ??$

c) $\frac{42}{56} = ??$

d) $\frac{65}{15} = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Übungsaufgabe 8.13: Bruchrechnung (2)

Kürzen Sie die Brüche, und stellen Sie das Ergebnis ggfs. als Dezimalzahl dar.

a) $\dfrac{15 \cdot x \cdot 2 \cdot y}{4 \cdot y \cdot 5 \cdot x \cdot 9} = ??$

b) $\dfrac{2 \cdot x \cdot y}{(4 \cdot x - 2 \cdot x) \cdot y} = ??$

c) $\dfrac{2 \cdot x - 4 \cdot y}{x - 2 \cdot y} = ??$

d) $\dfrac{4 \cdot x^2 \cdot y}{2 \cdot x \cdot 2 \cdot y} = ??$

e) $\dfrac{8 \cdot x^2 - 4 \cdot x \cdot y}{16 \cdot x - 8 \cdot y} = ??$

f) $\dfrac{3 \cdot x \cdot 4 \cdot y}{4 \cdot x \cdot 3 \cdot y} = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 8.14: Bruchrechnung (3) v1

Berechnen und kürzen Sie weitestmöglich.

a) $\dfrac{1}{12} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{2} = ??$

b) $\dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{10} = ??$

c) $\left(\dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{2}\right) \cdot \left[\dfrac{3}{5} + \dfrac{11}{5}\right] = ??$

d) $\left(\dfrac{4}{3} - \dfrac{5}{6}\right) \div \left[\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}\right] = ??$

e) $\dfrac{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}}{\dfrac{3}{4} - \dfrac{2}{3}} = ??$

f) $\dfrac{12 \cdot \left(\dfrac{x}{2} + 4\right)}{\dfrac{1}{2 \cdot x} \cdot (6 + 12 \cdot x) \cdot 4}$??

g) $\left(\dfrac{2}{5 \cdot x} - 2 \cdot \dfrac{1}{4 \cdot x}\right) \cdot x + \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{1}{4} = ??$

h) $x \cdot \left(\dfrac{11}{12} - \dfrac{1}{6}\right) \cdot \left[\dfrac{4}{5 \cdot x} + \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{8}{15}\right] = ??$

i) $\left(\dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{3}\right) \cdot \left(11 - \dfrac{3}{2} - 2\right) = ??$

j) $\dfrac{6 \cdot x - 3 \cdot y}{12 \cdot x^2 - 6 \cdot x \cdot y} \div \left[\dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{4 \cdot x}\right] = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

8.1.5.2. Dezimalbrüche

Erläuterung 8.14: Grundlegendes zur Umwandlung Dezimalbruch → gemeiner Bruch und v. v.

- Gemeiner Bruch → Dezimalbruch: Einfach ausrechnen ...
  Wenn notwendig, mit dem *Periodenzeichen* arbeiten (Überstreichen dessen, was sich unendlich wiederholt).
- Dezimalbruch → Gemeiner Bruch: Vorkomma-Stellen getrennt behandeln.
  - Nicht-periodischer Dezimalbruch → Gemeiner Bruch: Anzahl Nachkomma-Ziffern zählen, im Zähler die Nachkomma-Stellen ohne das Komma, im Nenner eine 1 und dahinter genau so viele Nullen, wie es Nachkomma-Ziffern sind.
    Anschließend ggf. maximal kürzen.
  - Periodischer Dezimalbruch → Gemeiner Bruch: Periode in den Zähler, Anzahl Ziffern der Periodizität zählen, durch genau so viele 9'er teilen, ggf. im Nenner soviele Nullen anhängen, wie die Periodizität „vom Komma entfernt" ist.
    Anschließend ggf. maximal kürzen.

Beispiele:

- $\frac{3}{70} = 0{,}0428571428571428571... = 0{,}0\overline{428571}$
- $0{,}\overline{1} = \frac{1}{9}$
- $0{,}01234 = \frac{1234}{100\,000} = \frac{617}{50\,000}$
- $0{,}00\overline{1327} = \frac{1327}{999900}$

Übungsaufgabe 8.15: Umwandlung Bruch in Dezimalbruch [OpenAI2024i]

a) Wandle den Bruch $\frac{1234}{5678}$ in einen Dezimalbruch um. ??
b) Wandle den Bruch $\frac{9876}{5432}$ in einen Dezimalbruch um. ??
c) Wandle den Bruch $\frac{7654}{3210}$ in einen Dezimalbruch um. ??
d) Wandle den Bruch $\frac{1357}{2468}$ in einen Dezimalbruch um. ??
e) Wandle den Bruch $\frac{31415}{27182}$ in einen Dezimalbruch um. ??
f) Wandle den Bruch $\frac{14142}{17320}$ in einen Dezimalbruch um. ??
g) Wandle den Bruch $\frac{12345}{6789}$ in einen Dezimalbruch um. ??
h) Wandle den Bruch $\frac{98765}{4321}$ in einen Dezimalbruch um. ??
i) Wandle den Bruch $\frac{11223}{44556}$ in einen Dezimalbruch um. ??

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 8.16: Umwandlung Dezimalbruch in Bruch

Wandeln Sie die angegebenen Dezimalbrüche in gemeine Brüche um:

a) $0{,}25 = ??$
b) $0{,}0625 = ??$
c) $0{,}21875 = ??$
d) $8{,}734375 = ??$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

e) $0{,}\overline{4} = ??$

f) $0{,}\overline{53} = ??$

g) $0{,}\overline{270} = ??$

h) $0{,}3\overline{8} = ??$

i) $0{,}1\overline{62} = ??$

j) $3{,}4\overline{334} = ??$

k) $2{,}2463\overline{127} = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

8.1.5.3. Kettenbrüche

Erläuterung 8.15: Kettenbrüche

Kettenbrüche sind bereits seit dem Altertum bekannt. Die Griechen kannten noch keine irrationalen Zahlen (wie bsp. $\sqrt{2}$); Hippasos fand bereits im 5. Jahrhundert v. Chr. eine Näherungslösung für die Länge des Quadrates der Seitenlänge 1.

Kettenbrüche sind Brüche der Form (rechts ein Beispiel von Huygens aus dem 17. Jahrhundert, Verhältnis der Sonnenumlaufzeiten Mars zu Erde):

$$a + \cfrac{b}{c + \cfrac{d}{e + \cfrac{f}{\ddots}}} \qquad \frac{365}{687} = \cfrac{1}{\frac{687}{365}} = \cfrac{1}{1 + \frac{322}{365}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{365}{322}}} \cdots = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{21}}}}}$$

Es gibt Situationen, in denen sich Bruchfolgen ergeben, die die Gestalt eines Kettenbruchs haben. Diese auf einen „Normalbruch“ zurückzuführen, kann eine Technik sein.

Gelegentlich kann es sinnvoll sein, aus „normalen Brüchen“ Kettenbrüche zu machem, um bestimmte Lösungstechniken zu nutzen.

Man nutzt für die Umwandlung den *Euklidischen Algorithmus*.

Da es zunächst nur eine Umformung ist, folgend nur ein paar Übungen.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Beispiel 8.2: Irrationale Zahlen als unendliche Kettenbrüche

Ein Kettenbruch für $\sqrt{2}$:

$$x = 2 + \frac{1}{x} \quad (\| \cdot x) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2 \cdot x - 1 = 0 \qquad x_1 = 1 + \sqrt{2};\ x_2 = 1 - \sqrt{2}$$

Einsetzen von x_1 in die Ausgangsgleichung oben links ergibt:

$$1 + \sqrt{2} = 2 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$$

Für den Nenner $1 + \sqrt{2}$ setzen wir wiederholt $2 + \dfrac{1}{1 + \sqrt{2}}$ ein:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \sqrt{2}}}}}}$$

Dieses Verfahren lässt sich natürlich unendlich oft fortsetzen. Setzt man den verbleibenden Nenner $1+\sqrt{2}$ nach dem zehnten Schritt einfach auf 2 (anstatt auf 2,414213...), erhält man $\sqrt{2} \approx \dfrac{3363}{2378} \approx 1{,}414213$, also bereits sechs gültige Nachkommastellen.

Übungsaufgabe 8.17: Kettenbrüche

Wandeln Sie in einen Kettenbruch um:

a) $\dfrac{21}{6} = ??$

b) $\dfrac{17}{10} = ??$

c) $\dfrac{37}{11} = ??$

Entwickeln Sie Kettenbrüche für die angegebenen Wurzeln:

d) $\sqrt{5}$; Ansatz $x = 4 + \dfrac{1}{x} \rightarrow$??

e) $\sqrt{10}$; Ansatz $x = 6 + \dfrac{1}{x} \rightarrow$??

f) $\sqrt{3}$; Ansatz $x = 4 - \dfrac{1}{x} \rightarrow$??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Übungsaufgabe 8.18: Längere Kettenbrüche [OpenAI2024j]

a) Berechne den Wert des Kettenbruchs mit 10 Gliedern:

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{10}}}}}}}}}\ ??$$

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 8.19: In Kettenbruch entwickeln [OpenAI2024k]

a) Kettenbruchentwicklung von $\frac{365249}{365000}$??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

8.1.5.4. Anwendung: Dreisatz und Verhältnisrechnung

Erläuterung 8.16: Dreisatz v1

Der *Dreisatz* ist ein mathematisches Verfahren, um aus drei gegebenen Werten eines Verhältnisses den unbekannten vierten Wert zu berechnen.[8.1]

- Einfacher Dreisatz
  - Es liegt eine Gesetzmäßigkeit der Art „Je mehr A, desto mehr B.“ vor (direkte Proportionalität): Beim Verdoppeln (Verdreifachen, …) von A wird auch B verdoppelt (verdreifacht, …).
  - Gegeben ist ein Verhältnis von a Einheiten einer Größe A zu b Einheiten einer Größe B.
  - Gefragt wird nach der Anzahl x Einheiten der Größe B, die in demselben Verhältnis zu c Einheiten von A stehen.

  Beispiel: In 3 Stunden legt ein Fahrzeug bei konstanter Geschwindigkeit 240 km zurück, wie weit kommt es in 7 Stunden?

  Es gilt: „3 zu 240 verhält sich wie 7 zu x“.

	Zeit (h)	Strecke (km)	Rechnung:	
1.	3	240	$\div 3$	In 3 Stunden legt es 240 km zurück.
2.	1	80	$\cdot 7$	Also legt es in 1 Stunde $^{240}/_{3}$ km = 80 km zurück.
3.	7	**560**		Damit legt es in 7 Stunden $7 \cdot 80$ km = **560 km** zurück.

- Umgekehrter Dreisatz
  - Es liegt eine Gesetzmäßigkeit der Art „Je weniger A, umso mehr B.“ vor (indirekte Proportionalität): Beim Halbieren (Dritteln, …) von A wird B verdoppelt (verdreifacht, …).
  - Dabei ergeben a Einheiten einer Größe A mit b Einheiten einer Größe B ein konstantes Produkt.
  - Gefragt wird nach der Anzahl x Einheiten der Größe B, die mit c Einheiten von A dasselbe Produkt ergeben: $a \cdot b = c \cdot x$.

  Beispiel: 21 Lastwagen benötigen 35 Tage für den Abtransport einer bestimmten Menge Abraums. Wie viel Zeit benötigen hierfür 15 Lastwagen?

	Lastwagen	Zeit (d)	Rechnung	
1.	21	35	$21 \cdot 35$	21 LKW benötigen 35 Tage.
2.	1	735	$735 \div 15$	Also benötigt 1 LKW $21 \cdot 35$ Tage = 735 Tage.
3.	15	**49**		Damit benötigen 15 LKW $^{735}/_{15}$ Tage = **49 Tage**.

Übungsaufgabe 8.20: Dreisatz und Verhältnisrechnung

Rechnen Sie im Kopf!

a) 5 Arbeiter melken 5 Kühe in 15 Minuten. Wie lange braucht ein Arbeiter für 10 Kühe?

b) 2 Walzen formen 10 Äxte in 2 Minuten. Eine fällt aus. Wie viele Äxte können in 30 min produziert werden?

c) Pro Auto werden 5 Reifen und 5 Felgen benötigt (Ersatzrad!). Je montierter Felge werden 5 Muttern benötigt. Es werden 1 Mio. Fahrzeuge produziert. Wie viele Reifen und wie viele Muttern werden benötigt?

d) Ein Würfel von 10 cm Kantenlänge wird auf die halbe Höhe gestaucht. Wir gehen von Volumenkonstanz, Gleichmaßumformung und Inkompressibilität aus. Welche Kantenlängen hat das Objekt nach der Stauchung?

Hier geht es zur Musterlösung.

[8.1] https://de.wikipedia.org/wiki/Dreisatz; Abruf 17-JUL-2023.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Erläuterung 8.17: Prozentrechnung

Ein erster wichtiger Punkt bei der Prozentrechnung ist, die richtige Basis zu sehen; hier wird besonders in der Werbung, aber auch in strategischen oder politischen Argumentationen gerne verwirrt.

Deutlich ist das z. B. gut bei Aktienkursen: Fällt eine Aktie heute um 5 %, und steigt morgen um 5 %, so hat sie danach **nicht** den Ausgangswert: $(x \cdot 0{,}95) \cdot 1{,}05 = x \cdot 0{,}9975 \neq x \cdot 1{,}000$.

Ein anderer wichtiger Punkt ist, wann und wie häufig bzw. in welchem Zeitintervall der Prozentsatz angewandt wird. Hierzu nachfolgend ein paar Aufgaben.

Übungsaufgabe 8.21: Prozentrechnung

a) Der Garantiezins einer Lebensversicherung beträgt 0,9 % p. a. Sie schließen am 21. Geburtstag einen Vertrag an, der zum 67. Geburtstag zur Auszahlung fällig wird, mit einer monatlichen Prämie von 150 EUR.
Wie viel Zinsen hat die erste Rate ergeben? Wie viele Zinsen gab es auf die letzte Rate? ??

b) Sie schließen einen Kredit für einen Hausbau mit endfälliger Tilgung ab, d. h. Sie zahlen zunächst nur jährlich endfällig Zinsen, die Tilgung am Ende der Laufzeit.
Sie schließen 500.000 EUR Kredit ab, haben 10.000 EUR Gebühren dazu, eine Laufzeit von 10 Jahren und 4 % Zins (6 % ,8 %) p.a.
Wie viele Zinsen zahlen Sie in Summe? ??

c) Ein Kapital von € 5.000 wird zu einem Zinssatz von 5 % pro Jahr für 10 Jahre angelegt. Berechnen Sie den Endbetrag. ??

d) Wie viel muss heute angelegt werden, um in 15 Jahren bei einem Zinssatz von 4 % pro Jahr einen Betrag von € 10.000 zu erreichen? ??

e) Ein Kapital von € 7.000 wird für 8 Jahre zu einem Zinssatz von 3,5 % pro Jahr angelegt. Wie hoch ist der Endbetrag? ??

f) Berechnen Sie den Barwert eines Betrags von € 20.000, der in 12 Jahren fällig wird, bei einem Zinssatz von 6 % pro Jahr. ??

g) Ein Kapital von € 3.500 wird zu einem Zinssatz von 2,5 % pro Jahr für 5 Jahre angelegt. Berechnen Sie den Endbetrag. ??

h) Wie viel muss heute angelegt werden, um in 10 Jahren bei einem Zinssatz von 7 % pro Jahr einen Betrag von € 15.000 zu erreichen? ??

i) Ein Kapital von € 1.000 wird zu einem Zinssatz von 5,5 % pro Jahr für 20 Jahre angelegt. Wie hoch ist der Endbetrag? ??

j) Berechnen Sie den Barwert eines Betrags von € 50.000, der in 25 Jahren fällig wird, bei einem Zinssatz von 4,5 % pro Jahr. ??

k) Ein Kapital von € 8.000 wird zu einem Zinssatz von 6 % pro Jahr für 10 Jahre angelegt. Berechnen Sie den Endbetrag. ??

l) Wie viel muss heute angelegt werden, um in 30 Jahren bei einem Zinssatz von 3 % pro Jahr einen Betrag von € 100.000 zu erreichen? ??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

8.1.6. Gleichungen mit höheren Rechenarten

8.1.6.1. Gleichungen mit Hochzahlen

Erläuterung 8.18: Rechenregeln für Gleichungen mit Hochzahlen

Die **Gegenoperation**, um auf einer Seite einer Gleichung die Hochzahl b aufzulösen, ist:

Beide Seiten mit $^1/_b$ potenzieren!

Beispiele:

- $x^5 = 32 \quad \| \ \sqrt[5]{\square}$ oder $(\square)^{1/5}$
  $\Leftrightarrow x = \sqrt[5]{32} = 2$
- $x^{-7} = 128 \quad \| \ \left(\sqrt[7]{\square}\right)^{-1}$ oder $(\square)^{-1/7}$
  $\Leftrightarrow x = \left(\sqrt[7]{128}\right)^{-1} = (128)^{-1/7} = 0{,}5$
- $(2-3x)^{-3{,}3} = 2 \quad \| \ (\square)^{1/-3{,}3}$
  $\Leftrightarrow (2-3x) = 2^{1/-3{,}3} \quad \| \ -2 \quad \| \ \div(-3)$
  $\Leftrightarrow x = \dfrac{2^{1/-3{,}3} - 2}{-3} \approx 0{,}3965$

Übungsaufgabe 8.22: Gleichungen mit Hochzahlen v1

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf:

a) $(1-x)^3 = 27$ → ??

b) $(x-1)^7 = 128$ → ??

c) $2(x-2)^5 = 64$ → ??

d) $(x+27)^{0,2} = 2$ → ??

e) $\dfrac{2(85-x)^{0,25}}{3} = 2$ → ??

f) $\dfrac{(6-x)^{0,5}+7}{3} = 3$ → ??

g) $\left(\dfrac{(x+24)}{3}\right)^{2,5} = 243$ → ??

h) $\dfrac{1}{256} \cdot \left(\dfrac{2x-4}{2}\right)^8 = 1$ → ??

i) $\sqrt{2x-6} = 2$ → ??

j) $\sqrt[5]{81(x-3)} = 3$ → ??

k) $\sqrt[3]{2(3x-17)} = 2$ → ??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

8.1.6.2. Logarithmus

Erläuterung 8.19: Logarithmus

Logarithmus von a zur Basis b:

Exponent, Basis, Numerus

$$b^x = a \quad \Leftrightarrow \quad \log_b a = x \qquad \text{Voraussetzung: } a, b > 0$$

- Mit welcher Zahl x muss die Basis b potenziert werden, um das Ergebnis a zu erhalten?
- Oder: b hoch was ist a?
- Das Logarithmieren ist die Umkehr des Potenzierens: $b^{\log_b(x)} = x$
- Beispiel: $\log_{10} 200 = 2,\underbrace{301\,029\,995\,663\,...}_{\text{Mantisse}}$ (Charakteristik)

Definitionen (Abkürzungen für häufig verwendete Basen):

- $\log_{10} x =: \lg x$
- $\log_{\mathrm{e}} x =: \ln x$ mit der Eulerschen Zahl $\mathrm{e} = 2{,}718\,281\,828\,459\,...$
- $\log_2 x =: \operatorname{ld} x$ oder alternative Schreibweise: $\log_2 x =: \operatorname{lb} x$

Rechenregeln für Logarithmen:

- $b^x \cdot b^y = b^{x+y} \quad \Leftrightarrow \quad \log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$
- $\dfrac{b^x}{b^y} = b^{x-y} \quad \Leftrightarrow \quad \log_b\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$
- $\left(b^x\right)^y = b^{x \cdot y} \quad \Leftrightarrow \quad \log_b\left(x^y\right) = y \cdot \log_b x$
- $\log_b x = \dfrac{\ln x}{\ln b} = \dfrac{\lg x}{\lg b}$ („Taschenrechner-Formel“)

Beispiel 8.3: Logarithmus

Ist in Gleichungen die gesuchte Variable (z. B. x) in der Hochzahl, dann kann mit Hilfe des Logarithmus aufgelöst werden.

Beispiel:

$4^x = 10$

- Möglichkeit 1: Direkte Berechnung $x = \log_4 10 \approx 1{,}6610$
- Möglichkeit 2:

$$\begin{aligned} & 4^x = 10 && \| \ \ln \\ \Leftrightarrow\ & \ln\left(4^x\right) = \ln 10 \\ \Leftrightarrow\ & x \cdot \ln 4 = \ln 10 && \| \ \div \ln 4 \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{\ln 10}{\ln 4} \approx 1{,}6610 \end{aligned}$$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

8.1.7. Potenzen und Wurzeln

Erläuterung 8.20: Potenzen und Wurzeln

	Potenzregeln:	Beispiele:
I.	$a^0 := 1$	$5^0 = 1$
II.	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^7$
III.	$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$	$3^5 \cdot 4^5 = 12^5$
IV.	$\left(a^x\right)^y = (a)^{x \cdot y}$	$\left(2^3\right)^4 = 2^{12}$
V.	$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$
VI.	$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$\frac{6^4}{6^2} = 6^2$
VII.	$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$	$\frac{10^5}{5^5} = 2^5$
VIII.	$\sqrt[n]{a} := a^{\frac{1}{n}}$	$\sqrt[5]{32} = 32^{\frac{1}{5}} = 32^{0,2} = 2$

Übungsaufgabe 8.23: Potenzen und Wurzeln (1)

a) $\dfrac{\left(2^2\right)^3 \cdot \left(2^2\right)^4}{2^{14}} = ??$

b) $\dfrac{5^7 \cdot (2 \cdot 5)^3 \cdot 2^{17}}{(2 \cdot 2 \cdot 5)^{10}} = ??$

c) $\dfrac{\left(2^2 \cdot 3\right)^2 \cdot 7^4 \cdot (2 \cdot 3)^2}{2 \cdot (7 \cdot 3 \cdot 2)^4} = ??$

d) $\dfrac{\left(2^3\right)^2 \cdot (2 \cdot 3)^3 \cdot 2^{-3} \cdot 3^{-4} \cdot (2 \cdot 5)^{-9}}{3^8 \cdot (2 \cdot 3)^{-3} \cdot 5^{-7} \cdot 2^2 \cdot 3^{-7} \cdot (2 \cdot 5)^{-2}} = ??$

e) $\dfrac{(2 \cdot 3)^3 \cdot 3^{-3} \cdot \left(7^{-1} \cdot 2\right)^4 \cdot \left(3^2 \cdot 7^2\right)^2}{\left(2^{-1} \cdot 7 \cdot 2^2\right)^{-1} \cdot \left(2^{-2} \cdot 5^4 \cdot 7^{-1}\right)^{-1} \cdot (3 \cdot 5)^4 \cdot 2^4} = ??$

f) $\dfrac{\left(2ab^{-1}\right)^3 \cdot \left(2^{-3}ab^{-1}\right)^{-2}}{2ab\left(a^1a^{-2}\right)^2 \cdot \left(2^{-3}a^{-1}b\right)^{-2}} = ??$

g) $4 \cdot a^{(m+1) \cdot n} \cdot a^{m-n} \cdot \left(a^{mn+m}\right)^{-1} = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Übungsaufgabe 8.24: Potenzen und Wurzeln (2)

a) $\sqrt{\sqrt{16a^2x^2}} \cdot \sqrt{a^3x} \cdot \sqrt[3]{a^{-6}x^{-3}} = ??$

b) $\sqrt{2^6y^4} \cdot \left(x^4 \cdot y^8\right)^{-0{,}25} \cdot x \cdot \left(\sqrt{2^4}\right)^{-1} = ??$

c) $\dfrac{\left(x^{0{,}2} \cdot y^2\right)^{-5} \cdot \left(\sqrt{2^{0{,}5} \cdot x} \cdot y^2\right)^4}{\sqrt{y^{-4} \cdot x^2}} = ??$

d) $\left(\sqrt[4]{xy^2}\right)^2 \cdot \dfrac{x^{-0{,}5}}{0{,}5 \cdot y} = ??$

e) $\left(\sqrt[3]{a^{0{,}6}} \cdot \sqrt[4]{a^{-0{,}4}}\right)^{10} = ??$

f) $\sqrt[4]{\dfrac{x^2}{81}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{27}{x^{1{,}5}}} = ??$

g) $\sqrt[3]{16xy^4} \cdot \sqrt[3]{4x^2y^2} \cdot \sqrt[3]{x^{-3}y^{-6}} = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 8.25: Logarithmus (Logarithmengesetze) v1

Wenden Sie die Rechenregeln an und berechnen Sie (soweit wie möglich):
Hinweis: Wenn bei log keine Basis angegeben ist, dann ist die Lösung unabhängig von einer Basis.

a) $\log_2 a - \log_2 b$ $\rightarrow ??$

b) $\log(x+y) - \log x$ $\rightarrow ??$

c) $\log_a \dfrac{b}{c} - \log_a b$ $\rightarrow ??$

d) $\log_a \dfrac{b}{c} + \log_a b$ $\rightarrow ??$

e) $\left(\log_a a^2\right)^{-3} + \left(\log_a 1\right)^3$ $\rightarrow ??$

f) $\dfrac{1}{2} \cdot \log 4 + 3 \cdot \log 6 - 2 \cdot \log\left(3 \cdot 2^7\right)$ $\rightarrow ??$

g) $2 \cdot \log x + \dfrac{1}{2} \cdot \log x^4 - \log x^2$ $\rightarrow ??$

h) $\log_a x^2 + \log_a \dfrac{1}{x^2}$ $\rightarrow ??$

i) $-\dfrac{1}{3} \cdot \log\left(x^2 \cdot y^{-2} \cdot z\right) + \dfrac{1}{3} \cdot \log\left(x^{-1} \cdot y \cdot z\right)$ $\rightarrow ??$

j) $\log_t \sqrt{a} + \log_t \sqrt{(a \cdot b)^{-1}} + \dfrac{1}{2} \cdot \log_t b$ $\rightarrow ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Übungsaufgabe 8.26: Logarithmus

Lösen Sie die Gleichungen nach x auf.

a) $1{,}05^x = 2$ → ??

b) $1{,}1^x = 2$ → ??

c) $1{,}05^x = 3$ → ??

d) $1{,}1892^x = 4$ → ??

e) $1{,}04^{10} \cdot 1{,}03^x = 3$ → ??

f) $200 \cdot 1{,}02^x = 250$ → ??

g) $\ln\left(e^x\right) = 13$ → ??

h) $4^{2(x-3)} = 2^4$ → ??

i) $\left(2^{x-2}\right)^4 = 16$ → ??

Hier geht es zur Musterlösung.

Hinweis 8.2: Logarithmengleichungen im $\mathbb{R}$

Bei Logarithmengleichungen im $\mathbb{R}$ muss man immer überprüfen, ob die Lösung gültig ist: In $\mathbb{R}$ sind Logarithmen aus negativen Argumenten nicht definiert!

Beispiel 8.4: Logarithmengleichungen im $\mathbb{R}$

$$\log_2\left(\frac{2\cdot x-6}{x-3}\right) = 4$$

$$\begin{array}{lll}
\log_2\left(\frac{2\cdot x-6}{x-3}\right) & = 4 & \| \text{ 2 hoch} \\
\Leftrightarrow\ 2^{\log_2\left(\frac{2\cdot x-6}{x-3}\right)} & = 2^4 & \mid (\text{ld}) \mid \text{ausrechnen} \\
\Leftrightarrow\ \frac{2\cdot x-6}{x-3} & = 16 & \| \cdot(x-3) \quad !!!\ x \neq 3\ !!! \\
\Leftrightarrow\ 2\cdot x-6 & = 16\cdot(x-3) & \mid ./. \mid \text{ausrechnen} \\
\Leftrightarrow\ 2\cdot x-6 & = 16\cdot x-48 & \| -16\cdot x+6 \\
\Leftrightarrow\ 2\cdot x-6-16\cdot x+6 & = 16\cdot x-48-16\cdot x+6 & \| \text{ zusammenfassen} \\
\Leftrightarrow\ -14\cdot x & = -42 & \| : (-14) \\
\Leftrightarrow\ x & = 3 & \text{ungültig in } \mathbb{R} \text{ und } \mathbb{C}!
\end{array}$$

Diese Lösung ist jedoch nicht möglich (siehe Bedingung in der dritten Gleichung) ⇒ Diese Aufgabe hat keine Lösung.

Das kann man übrigens auch noch anders sehen:

$$\log_2\left(\frac{2\cdot x-6}{x-3}\right) = 4 \quad \mid \text{kürzen} \mid ./. \tag{8.1}$$

$$\log_2(2) = 4 \quad \mid \text{ausrechnen} \mid ./. \tag{8.2}$$

$$1 = 4 \quad \text{Unmöglich!} \tag{8.3}$$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Beispiel 8.5: Logarithmengleichungen im $\mathbb{R}$

$\log_3(2\cdot x-5)-\log_3(x-1)=3$

$$
\begin{array}{lll}
 & \log_3(2\cdot x-5)-\log_3(x-1) = 3 & \mid \text{ausrechnen} \mid ./. \\
\Leftrightarrow & \log_3\left(\dfrac{2\cdot x-5}{x-1}\right) = 3 & \mid\mid 3 \text{ hoch} \\
\Leftrightarrow & 3^{\log_3\left(\frac{2\cdot x-5}{x-1}\right)} = 3^3 & \mid \text{ausrechnen} \mid \text{ausrechnen} \\
\Leftrightarrow & \dfrac{2\cdot x-5}{x-1} = 27 & \mid\mid \cdot(x-1) \quad !!!\ x\neq 1\ !!! \\
\Leftrightarrow & \dfrac{2\cdot x-5}{x-1}\cdot(x-1) = 27\cdot(x-1) & \mid\mid \text{ausrechnen} \\
\Leftrightarrow & 2\cdot x-5 = 27\cdot x-27 & \mid\mid -27\cdot x+5 \\
\Leftrightarrow & 2\cdot x-5-27\cdot x+5 = 27\cdot x-27-27\cdot x+5 & \mid\mid \text{zusammenfassen} \\
\Leftrightarrow & -25\cdot x = -22 & \mid\mid :(-25) \\
\Leftrightarrow & -25\cdot x:(-25) = -22:(-25) & \mid\mid \text{ausrechnen} \\
\Leftrightarrow & x = \dfrac{22}{25} & \text{gültig in } \mathbb{C}!
\end{array}
$$

ACHTUNG: Diese Lösung gilt nur in der Grundmenge $\mathbb{C}$, weil sowohl $2\cdot\frac{22}{25}-5$ als auch $\frac{22}{25}-1$ kleiner als 0 und damit die beiden Logartithmenterme der Aufgabenstellung in $\mathbb{R}$ nicht definiert sind.

In $\mathbb{R}$ hat diese Aufgabe keine Lösung!

Übungsaufgabe 8.27: Logarithmengleichungen im Körper der reellen Zahlen

Hinweis: $\lg := \log_{10}$

a) $\lg(x-2)+\lg(x+2)=1 \rightarrow ??$

b) $\log_5(x)+\log_5(x-4)=2 \rightarrow ??$

c) $\log_3(2x+1)=\log_3(x+4)+1 \rightarrow ??$

d) $\log_4(x+1)-\log_4(x-3)=2 \rightarrow ??$

e) $\log_2(3x-5)=\log_2(x+3)+\log_2(2) \rightarrow ??$

f) $2\cdot\log_7(x-2)=\log_7(3x+1) \rightarrow ??$

g) $\log_5(2x+1)-\log_5(x-3)=1 \rightarrow ??$

h) $\ln\left(\dfrac{x^2}{(x+1)^2}\right)=1 \qquad$ für $x>0$??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

8.1.8. Weitere Äquivalenzumformungen

8.1.8.1. Polynomdivision

Erläuterung 8.21: Polynomdivision

Die Polynomdivision verläuft analog zur üblichen und in der Schule gelehrten Division von Zahlen mit Rest, nur dass hier statt zweier Zahlen zwei Polynome durcheinander dividiert werden und man als Ergebnis ein oder zwei neue Polynome – den „Ganzteil“ und ggf. den Rest der Division – erhält.

Beispiel 8.6: Polynomdivision

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{2\cdot x^3 - x^2 - 2\cdot x + 1}{x+1} = (2\cdot x^3 - x^2 - 2\cdot x + 1) \div (x+1)$$

Es wird immer nur die höchste Potenz betrachtet.

Wie oft geht $x+1$ in $2\cdot x^3$ hinein? $\frac{2\cdot x^3}{x} = 2\cdot x^2 \rightarrow 2\cdot x^2$-mal: $2\cdot x^2\cdot(x+1) = 2\cdot x^3 + 2\cdot x^2$.

Dieser Term wird vom Zählerpolynom subtrahiert:

$$\begin{array}{l} (2\cdot x^3 - \quad x^2 - 2\cdot x + 1) \div (x+1) = 2\cdot x^2 + \ldots \\ \underline{-(2\cdot x^3 + 2\cdot x^2)} \\ \qquad -3\cdot x^2 \end{array}$$

Es bleibt ein Rest von $-3\cdot x^2 - 2\cdot x + 1$.

Das Verfahren wiederholt sich, bis das Zählerpolynom komplett „abgearbeitet“ ist:

$$\begin{array}{l} (2\cdot x^3 - \quad x^2 - 2\cdot x + 1) \div (x+1) = 2\cdot x^2 + \ldots \\ \underline{-(2\cdot x^3 + 2\cdot x^2)} \\ \qquad -3\cdot x^2 - 2\cdot x \\ \quad \underline{-(-3\cdot x^2 - 3\cdot x)} \\ \qquad\qquad x + 1 \\ \qquad\quad \underline{-(x+1)} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

In diesem Beispiel geht die Polynomdivision ohne Rest auf.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Beispiel 8.7: Polynomdivision mit Rest

Hier noch ein weiteres Beispiel für eine Polynomdivision mit Rest:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{4 \cdot x^5 - x^4 + 2 \cdot x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1}$$

$$\begin{array}{rl}
(4 \cdot x^5 - x^4 + 2 \cdot x^3 + x^2 & -1) \div (x^2 - 1) = 4 \cdot x^3 - x^2 + 6 \cdot x + \dfrac{6 \cdot x - 1}{x^2 - 1} \\
\underline{-(4 \cdot x^5 \quad - 4 \cdot x^3)} & \\
-x^4 + 6 \cdot x^3 + x^2 & \\
\underline{-(x^4 \qquad + x^2)} & \\
+6 \cdot x^3 & \\
\underline{-(6 \cdot x^3 \qquad - 6 \cdot x)} & \\
+6 \cdot x - 1 &
\end{array}$$

Übungsaufgabe 8.28: Polynomdivision

a) $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)/(x - 1) = ??$

b) $(3x^3 - 10x^2 + 7x - 12)/(x - 3) = ??$

c) $(x^3 - 6x^2 + 11x - 12)/(x - 4) = ??$

d) $(-6x^3 + 5x^2 + 14x - 12)/(-2x + 3) = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

8.1.8.2. Partialbruchzerlegung

Erläuterung 8.22: Partialbruchzerlegung

Um die Partialbruchzerlegung einer rationalen Funktion $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ zu bestimmen, bietet sich folgendes schrittweises Vorgehen an:

1. Polynomdivision durchführen (nur erforderlich, falls die Funktion $f(x)$ unecht gebrochen ist)
2. Nullstellen des Nenners bestimmen
3. Zu jeder Nullstelle die Partialbrüche berechnen:
   - Ansatz für die Partialbruchzerlegung aufstellen
   - Koeffizientenvergleich durchführen

Übungsaufgabe 8.29: Partialbruchzerlegung

a) Es soll die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - x^2 + x - 1}$ bestimmt werden. →??

b) Um die Stammfunktion einer rationalen Funktion zu finden, kann es hilfreich sein, deren Partialbruchzerlegung zu betrachten. Bereiten Sie die Funktion $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 3 \cdot x + 2}$ entsprechend vor. → ??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

8.2. Grundzüge der Kombinatorik

Erläuterung 8.23: Kombinatorik

Wir beschränken uns nachstehend auf grundlegende Betrachtungen.

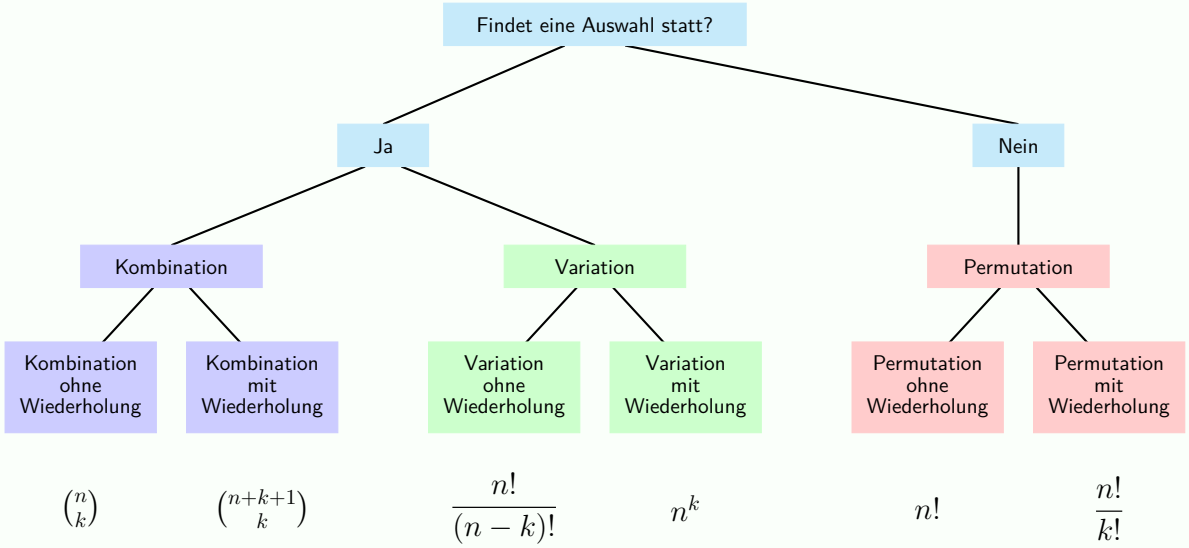


Abbildung 8.1.: Entscheidungsbaum Kombinatorik

- **Permutation:** Unter einer Permutation versteht man eine Anordnung von Objekten in einer bestimmten Reihenfolge. Je nachdem, ob manche Objekte mehrfach auftreten dürfen oder nicht, spricht man von einer Permutation mit Wiederholung oder einer Permutation ohne Wiederholung. Die Anzahl der Permutationen ohne Wiederholung ergibt sich als Fakultät, während die Anzahl der Permutationen mit Wiederholung über Multinomialkoeffizienten angegeben wird.
- **Kombination:** Eine Kombination (ungeordnete Stichprobe) ist eine Auswahl von Objekten aus einer gegebenen Grundmenge, die im Gegensatz zur Permutation nicht alle Objekte der Grundmenge enthalten muss und bei der im Gegensatz zur Permutation und zur Variation die Reihenfolge unberücksichtigt bleibt. Können Objekte dabei mehrfach ausgewählt werden, so spricht man von einer Kombination mit Wiederholung. Darf dagegen jedes Objekt nur einmal auftreten, spricht man von einer Kombination ohne Wiederholung.
- **Variation:** Eine Variation (geordnete Stichprobe) ist eine Auswahl von Objekten aus einer Menge in einer bestimmten Reihenfolge. Können Objekte dabei mehrfach ausgewählt werden, so spricht man von einer Variation mit Wiederholung, darf jedes Objekt nur einmal auftreten, von einer Variation ohne Wiederholung. Bei einer Variation wird die Reihenfolge der ausgewählten Objekte berücksichtigt, was bei einer Kombination nicht der Fall ist.

n ist die Anzahl der Objekte „in der Urne“, k die Stichprobe

Übungsaufgabe 8.30: Kombinatorik mit Urnenmodell v1

a) In einer Urne befinden sich 3 rote und 2 blaue Kugeln. Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine Kugel zufällig zu ziehen?
??

b) In einer Urne befinden sich 4 rote, 3 blaue und 2 grüne Kugeln. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 2 Kugeln nacheinander zu ziehen, wenn die Kugeln nach dem Ziehen nicht zurückgelegt werden?
??

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

c) In einer Urne befinden sich 5 rote und 4 blaue Kugeln. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 3 Kugeln gleichzeitig zu ziehen, wenn die Reihenfolge nicht beachtet wird?
??

d) In einer Urne befinden sich 6 rote, 4 blaue und 3 grüne Kugeln. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 3 Kugeln nacheinander zu ziehen, wenn die Kugeln nach dem Ziehen zurückgelegt werden?
??

e) In einer Urne befinden sich 4 rote, 3 blaue und 2 grüne Kugeln. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 2 Kugeln zu ziehen, wenn die erste Kugel zurückgelegt wird und die Reihenfolge berücksichtigt wird?
??

f) In einer Urne befinden sich 7 rote, 5 blaue und 3 grüne Kugeln. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 Kugeln gleichzeitig zu ziehen, wenn die Reihenfolge nicht beachtet wird?
??

g) In einer Urne befinden sich 5 rote und 6 blaue Kugeln. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 Kugeln nacheinander zu ziehen, wenn die Kugeln nach dem Ziehen nicht zurückgelegt werden?
??

h) In einer Urne befinden sich 8 rote, 5 blaue und 4 grüne Kugeln. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 5 Kugeln gleichzeitig zu ziehen, wenn die Reihenfolge beachtet wird?
??

i) In einer Urne befinden sich 6 rote und 6 blaue Kugeln. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 3 Kugeln nacheinander zu ziehen, wenn die erste Kugel zurückgelegt wird und die Reihenfolge berücksichtigt wird?
??

j) In einer Urne befinden sich 10 rote, 8 blaue und 5 grüne Kugeln. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 6 Kugeln gleichzeitig zu ziehen, wenn die Reihenfolge nicht beachtet wird?
??

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 8.31: Kombinatorik

a) In einer Urne befinden sich sechs verschiedenfarbige Kugeln. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Kugeln in einer Reihe anzuordnen? ??

b) In einer Urne befinden sich drei grüne und zwei gelbe Kugeln. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Kugeln in einer Reihe zu ordnen? ??

c) Beim Lotto werden sechs Zahlen aus insgesamt 49 gewählt. Wie viele Möglichkeiten gibt es? ??

d) In einem Gefäß befinden sich sechs verschiedenfarbige Kugeln. Es werden drei der Kugeln gezogen, wobei die gezogene Kugel nach jedem Zug wieder zurückgelegt wird (= mit Wiederholung). ??

e) In einer Kiste befinden sich sechs verschiedenfarbige Kugeln, von denen vier Kugeln gezogen werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Auswahl von vier Kugeln zu ordnen? ??

f) In einer Kiste befinden sich sechs verschiedenfarbige Kugeln, von denen vier Kugeln gezogen werden. Nach jedem Ziehen wird die gezogene Kugel zurück in die Urne gelegt. Wie viele mögliche Kombinationen an gezogenen Kugeln gibt es? ??

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

g) Abel wohnt in (0|0) und arbeitet in (8|8). Sein Arbeitskollege Kain wohnt in (4|4). Abel fährt jeden Morgen zur Arbeit und nimmt unterwegs Kain mit. Auf wie viele Arten kann er das tun?

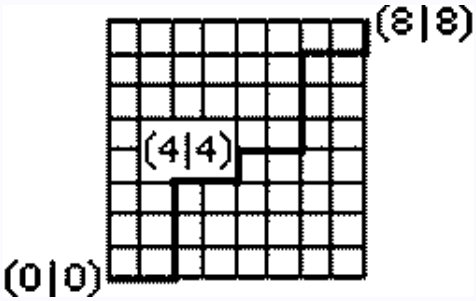


Abbildung 8.2.: Wegekarte Kain und Abel

??

h) Sie haben eine Elektronikproduktionslinie, für die 20 dpm (defects per million) auf Lötstellenebene angegeben ist. Sie produzieren Baugruppen mit 2000-3000 Lötstellen. Mit wie viel Ausschuss müssen Sie rechnen? ??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

9. Ungleichungen

9.1. Lineare Ungleichungen

Erläuterung 9.1: Lineare Ungleichungen

Eine lineare Ungleichung setzt zwei lineare Ausdrücke derart miteinander in Beziehung, dass der Ausdruck auf der linken Seite kleiner ($<$), kleiner oder gleich ($\leq$), größer ($>$) oder größer oder gleich ($\geq$) dem Ausdruck auf der rechten Seite sein soll.

Meistens ist eine unbekannte Variable x in der Gleichung enthalten, und die interessierende Fragestellung ist, welche Werte x annehmen darf, damit die Ungleichung erfüllt ist.

Die Lösung von linearen Ungleichungen erfolgt auf dem gleichen Weg wie bei linearen Gleichungen, das heißt, durch Äquivalenzumformungen wird die unbekannte Variable x auf die eine Seite der Ungleichung gebracht, so dass dann das Lösungsintervall direkt abgelesen werden kann.

Wenn die Ungleichung im Rahmen der Umformung mit einer negativen Zahl multipliziert oder durch eine negative Zahl dividiert wird, kehrt das Ungleichheitszeichen seine Richtung um.

Wird mit der unbekannten Variable (x) multipliziert oder dividiert, muss eine Fallunterscheidung vorgenommen werden, um die Richtung des Ungleichheitszeichens zu bestimmen.

Beispiel 9.1: Einfache Beispiele von Ungleichungen

Beispiel 1: $4 \cdot x - 17 < 2 \cdot x + 9; \qquad x \in \mathbb{R}$

Wir formen mit Äquivalenzumformungen um, wie von den „normalen“ Gleichungen gewohnt:

$$\begin{aligned} 4 \cdot x - 17 &< 2 \cdot x + 9 && && \| -2 \cdot x + 17 \\ 2 \cdot x &< 26 && && \| \div 2 \\ x &< 13 && \Rightarrow x \in]-\infty; 13[\subset \mathbb{R} \end{aligned}$$

Beispiel 2: $-2 \cdot x \geq 42; x \in \mathbb{N}$
Hier dreht sich bei der Multiplikation beider Seiten mit einer negativen Zahl (hier: $-1/2$) das Relationensymbol um: $\geq \rightarrow \leq$!

$$\begin{aligned} -2 \cdot x &\geq 42; x \in \mathbb{N} && && \| \cdot (-1/2) \\ x &\leq -21 && \Rightarrow x \in \emptyset && \text{da Grundmenge } \mathbb{N} \end{aligned}$$

Übungsaufgabe 9.1: Einfache Ungleichungen

a) Lösen Sie nach x auf: $x - 8 < 19 \Rightarrow$??

b) Löse nach x auf: $7 - 4 \cdot x \geq 2 \cdot (5 - x) - 9 \Rightarrow$??

c) Lösen Sie die Ungleichung: $3 \cdot x - 5 < 2 \cdot x + 4 \Rightarrow$??

d) Lösen Sie die Ungleichung: $5 - 2 \cdot (x - 1) \leq 3 \cdot x + 7 \Rightarrow$??

e) $7 - 3(x + 2) > 4(x - 1) + 2$??

f) $5 \cdot x - 3 \leq 2 \cdot x + 4 \cdot x + 1$??

g) $2 \cdot (x - 4) > 3 \cdot (x - 2) - 5$??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

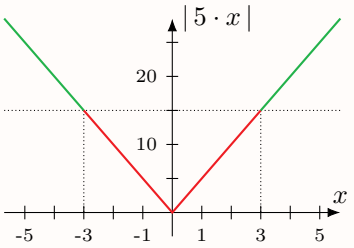
Beispiel 9.2: Ungleichungen mit Fallunterscheidung

Beispiel 1: Betragsstriche: $|5 \cdot x| < 15; \quad x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad |x| < 3$

- $x < 0: \quad |x| = -x \quad \Rightarrow \quad -x < 3 \quad \Leftrightarrow \quad x > -3$
- $x \geq 0: \quad |x| = x \quad \Rightarrow \quad x < 3$

Beide Teillösungen müssen gleichzeitig gelten:

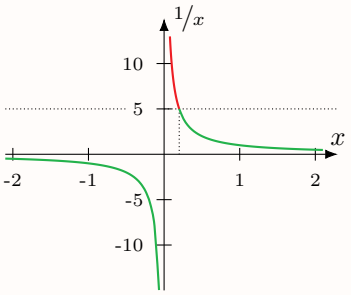
$x \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad x > -3 \quad \wedge \quad x < 3 \quad \Rightarrow \quad x \in]-3;\ 3[\subset \mathbb{R}$



Beispiel 2: Multiplikation mit x: $\frac{1}{x} > 5; \qquad x \in \mathbb{R}$

- $x < 0: \quad \frac{1}{x} > 5 \quad \Rightarrow \quad 1 < 5 \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad x > 1/5$
- $x \geq 0: \quad \frac{1}{x} > 5 \quad \Rightarrow \quad 1 > 5 \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad x < 1/5$

Beide Teillösungen müssen gleichzeitig gelten. Die Teillösung für $x < 0$ ergibt jedoch die leere Menge (x kann nicht gleichzeitig negativ und $> +1/5$ sein!). Also:
$x \in]0;\ 1/5[$



Übungsaufgabe 9.2: Ungleichungen (1) v1

a) Lösen Sie für $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $|x + 3| \leq 2$. ??

b) Für welche x gilt $x^3 > x^2 \Rightarrow$??

c) $\frac{x-1}{x-2} > 1 \Rightarrow$??

d) $\frac{2x+3}{4} > \frac{x-1}{2}$??

e) $-3(2x-1) \geq 5x + 8$??

f) $4x - 7 < 3x + 2x - 5$??

g) $\frac{x+2}{3} \leq \frac{2x-5}{4}$??

h) $\frac{4 \cdot x + 1}{2} \geq \frac{3 \cdot x - 2}{3}$??

[**OpenAI2024b**]:

i) Lösen Sie die Ungleichung: $|2 \cdot x - 3| \leq 5$??

j) Lösen Sie die Ungleichung: $|x^2 - 4| < 3$??

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 9.3: weitere Ungleichungen für Liebhaber [OpenAI2024z]

a) Löse die Ungleichung $x + 3 > 5$. ??

b) Löse die Ungleichung $2x - 7 \leq 3$. ??

c) Löse die Ungleichung $-4x + 8 \geq 0$. ??

d) Löse die Ungleichung $3(x - 2) < 2(x + 1)$. ??

e) Löse die Ungleichung $\frac{2x+3}{x-1} > 1$. ??

f) Löse die Ungleichung $x^2 - 5x + 6 \leq 0$. ??

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

g) Löse die Ungleichung $4x - x^2 > 0$. ??

h) Löse die Ungleichung $x^2 - 4x + 3 \geq 0$. ??

i) Löse die Ungleichung $3 - \frac{5}{x} > 0$. ??

j) Löse die Ungleichung $\frac{1}{x^2-1} \leq 2$. ??

k) Löse die Ungleichung $x^3 - 6x^2 + 9x \leq 0$. ??

l) Löse die Ungleichung $\frac{2x+3}{x^2-4} > 0$. ??

m) Löse die Ungleichung $x^4 - 4x^2 > 0$. ??

n) Löse die Ungleichung $|x - 2| < 3$. ??

o) Löse die Ungleichung $\frac{3x-7}{x+2} \leq 1$. ??

p) Löse die Ungleichung $\log(x) \geq 2$. ??

q) Löse die Ungleichung $e^x \leq 5$. ??

r) Löse die Ungleichung $\sin(x) \geq \frac{1}{2}$ im Intervall $[0, 2\pi]$. ??

s) Löse die Ungleichung $\cos(2x) < 0$ im Intervall $[0, \pi]$. ??

t) Löse die Ungleichung $2^x > x^2$. ??

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 9.4: weitere Ungleichungen mit Fallunterscheidung [OpenAI2024c]

a) Löse die Ungleichung $|x - 3| < 5$. ??

b) Löse die Ungleichung $|2x + 1| \geq 3$. ??

c) Löse die Ungleichung $\frac{x-2}{x+1} > 0$. ??

d) Löse die Ungleichung $\frac{x+3}{x-4} \leq 1$. ??

e) Löse die Ungleichung $|3x - 4| \leq 2x + 1$. ??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

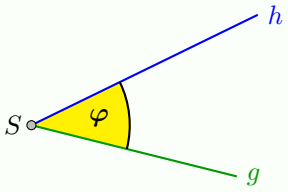
Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

10. Trigonometrie

10.1. Winkel

Erläuterung 10.1: Winkel

Ein **Winkel** ist eine geometrische Größe, die die Neigung oder die Drehung zwischen zwei sich schneidenden oder von einem gemeinsamen Punkt ausgehenden Linien oder Flächen beschreibt.



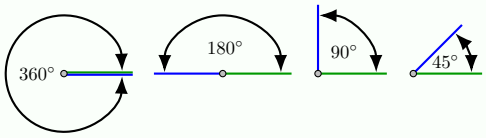
Winkel werden oft durch zwei Strahlen (genannt Schenkel, rechts mit g und h bezeichnet) definiert, die von einem gemeinsamen Endpunkt (dem Scheitelpunkt S des Winkels) ausgehen.

Winkel werden i. A. mit griechischen Buchstaben bezeichnet ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, ...$).

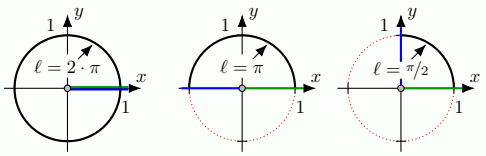
Maßeinheiten für Winkel

Es gibt verschiedene Maßeinheiten zur Messung von Winkeln. Die gängigsten sind:

- **Grad** bzw. °: Ein Vollkreis wird in 360° eingeteilt. Die Neigung zweier senkrechter Linien (= ein rechter Winkel) beträgt dann 90°.



- **Bogenmaß** bzw. rad: Der Winkel wird als Länge des Kreisbogens ausgedrückt, den der Winkel im Einheitskreis schneidet. Ein Vollkreis wird in $2\,\pi\,\text{rad}$ eingeteilt. Die Neigung zweier senkrechter Linien (= ein rechter Winkel) beträgt dann $\pi/2 \approx 1{,}571\,\text{rad}$.



- Das **Gon** (gon), früher **Neugrad** genannt, teilt den Kreis in 400 Teile. Ein rechter Winkel sind dementsprechend 100 gon.

  Das Gon wird fast ausschließlich in der Geodäsie verwendet; Theodoliten sind häufig in Gon, Centigon und Milligon skaliert.

Umrechnungen Gradmaß in Bogenmaß

Es gilt:

$$360° \mathrel{\widehat{=}} 2 \cdot \pi\,\text{rad} \quad \Rightarrow \quad \text{rad} = {}^\circ \cdot \frac{2 \cdot \pi}{360} = {}^\circ \cdot \frac{\pi}{180} \qquad \text{und} \qquad {}^\circ = 360 \cdot \frac{\text{rad}}{2 \cdot \pi} = \text{rad} \cdot \frac{180}{\pi}$$

Übungsaufgabe 10.1: Umrechnung verschiedener Winkelmaße

Berechnen Sie jeweils Bogen- und Gradmaß (nur eines ist jeweils angegeben).

a) $\alpha = 0°$??

b) $\alpha = 45°$??

c) $\alpha = 225°$??

d) $\alpha = 353°$??

e) $\alpha = -42°$??

f) $\alpha = -267°$??

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

g) $\alpha = 0$??

h) $\alpha = \pi/2$??

i) $\alpha = 5 \cdot \pi/6$??

j) $\alpha = -7 \cdot \pi/8$??

k) $\alpha = 1$??

l) $\alpha = \mathrm{e}$??

Hier geht es zur Musterlösung.

10.2. Die Strahlensätze

Erläuterung 10.2: Strahlensätze

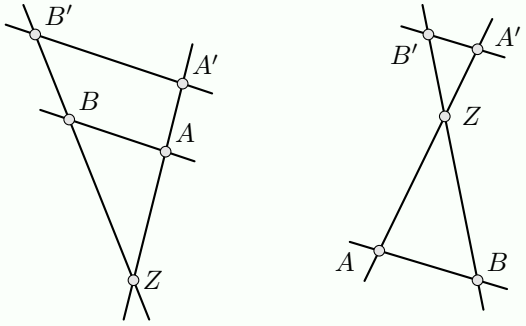


Abbildung 10.1.: Skizze Strahlensatz

1. Es verhalten sich je zwei Abschnitte auf der einen Geraden so zueinander wie die ihnen entsprechenden Abschnitte auf der anderen Geraden, also zum Beispiel

$$\frac{|ZA|}{|AA'|} = \frac{|ZB|}{|BB'|} \qquad \frac{|ZA|}{|ZA'|} = \frac{|ZB|}{|ZB'|}$$

oder

$$\frac{|AA'|}{|ZA'|} = \frac{|BB'|}{|ZB'|}$$

2. Es verhalten sich die Abschnitte auf den Parallelen wie die ihnen entsprechenden, vom Scheitel aus gemessenen Strecken auf jeweils derselben Geraden:

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|ZA|}{|ZA'|} = \frac{|ZB|}{|ZB'|}$$

.

3. Der erste Strahlensatz bezieht sich also auf die Verhältnisse von Strahlenabschnitten und der zweite auf die Verhältnisse von Strahlen- und Parallelenabschnitten.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

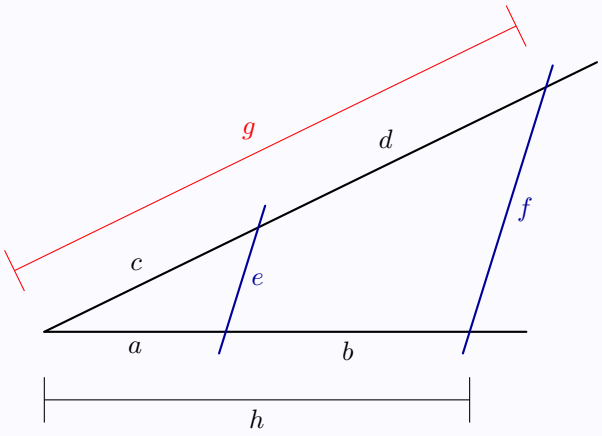
Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Übungsaufgabe 10.2: Strahlensatz

Berechne die Länge der Strecke g.

Es sind:

a)
- $a = 3{,}2\,\text{cm}$
- $h = 7{,}5\,\text{cm}$
- $c = 4{,}2\,\text{cm}$.

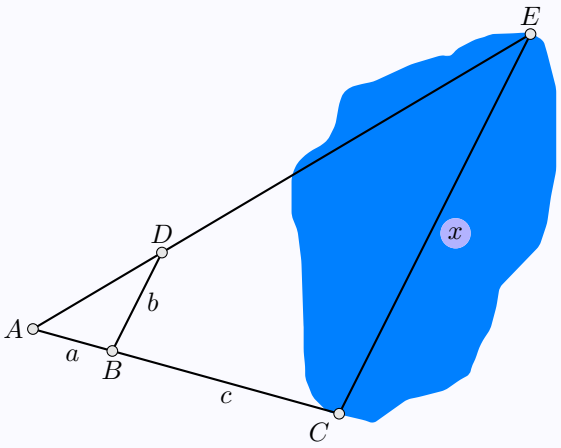


??

b) Um die Entfernung zwischen den Uferpunkten C und E zu bestimmen, steckt man eine zu CE parallele Strecke BD ab und misst:

$a = 25\,\text{m}$, $b = 45\,\text{m}$ und $c = 80\,\text{m}$.

Bestimme die Entfernung x.



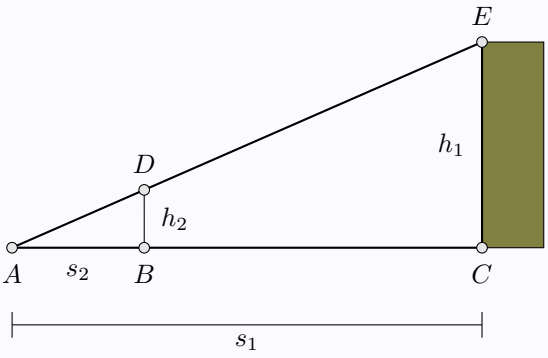
??

c) Die Höhe h_1 eines Turms kann man mit Hilfe der Schattenlänge eines Stabes mit der Länge BD bestimmen.

Hierzu wird der Stab senkrecht so aufgestellt, dass das Ende seines Schattens mit dem Schattenende des Turms zusammenfällt (A).

Bestimme die Turmhöhe, wenn gilt:

- $s_1 = 65\,\text{m}$
- $s_2 = 3\,\text{m}$
- $h_2 = 2\,\text{m}$



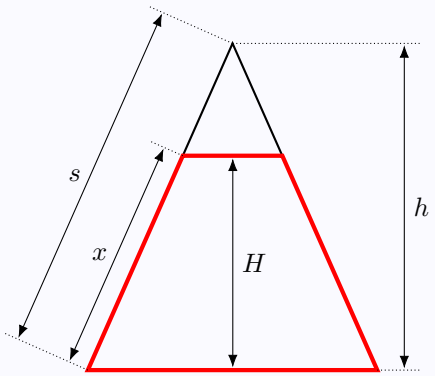
??

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

d) In einem Dachgiebel mit $h = 3{,}20\,\text{m}$ und $s = 3{,}50\,\text{m}$ soll in $H = 2{,}10\,\text{m}$ Höhe (gemessen vom Boden des Dachgiebels) eine Decke eingezogen werden.

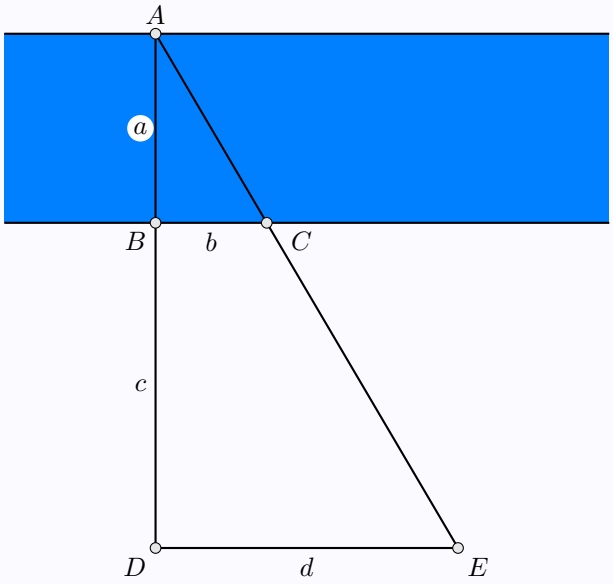
Welche Länge x hat die schräge Wand in dem entstehenden Raum?



??

e) Bestimme die Breite a eines Kanals, wenn folgende Strecken gemessen werden:

- $b = 12\,\text{m}$
- $c = 30\,\text{m}$
- $d = 22\,\text{m}$



??

Hier geht es zur Musterlösung.

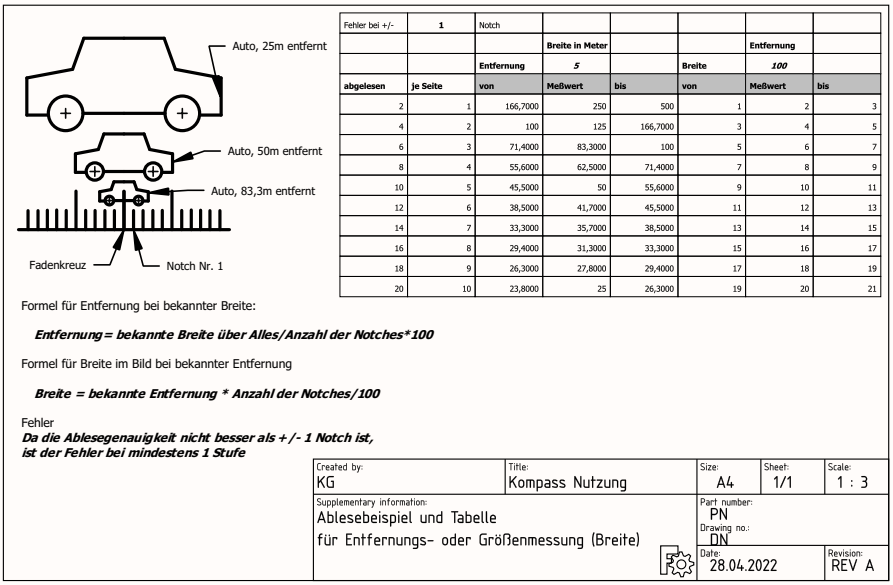
© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Beispiel 10.1: Alltägliche Anwendung

Insbesondere bei Entfernungsmessungen bzw. Breitenmessungen werden die Strahlensätze schon in einfachen Systemen eingesetzt.





Fehler bei +/-	1	Notch					
			Breite in Meter			Entfernung	
		Entfernung	5		Breite	100	
abgelesen	je Seite	von	Meßwert	bis	von	Meßwert	bis
2	1	166,7000	250	500	1	2	3
4	2	100	125	166,7000	3	4	5
6	3	71,4000	83,3000	100	5	6	7
8	4	55,6000	62,5000	71,4000	7	8	9
10	5	45,5000	50	55,6000	9	10	11
12	6	38,5000	41,7000	45,5000	11	12	13
14	7	33,3000	35,7000	38,5000	13	14	15
16	8	29,4000	31,3000	33,3000	15	16	17
18	9	26,3000	27,8000	29,4000	17	18	19
20	10	23,8000	25	26,3000	19	20	21

Abbildung 10.2.: Nutzung eines Kompass mit Fadenkreuz und Entfernungsmesser

Durch die Länge des Kompasses sind bereits zwei Parameter für den Strahlensatz vorgegeben. So man wahlweise die Entfernung zum Objekt oder die Breite des Objekts kennt, kann man den jeweils anderen Wert relativ gut abschätzen.

Formel für Entfernung bei bekannter Breite:

Entfernung= bekannte Breite über Alles/Anzahl der Notches*100

Formel für Breite im Bild bei bekannter Entfernung

Breite = bekannte Entfernung * Anzahl der Notches/100

Die Einheit des Ergebnisses ist die Einheit des bekannten Parameters. Natürlich ist dies kein Präzisionsmessgerät, liefert aber brauchbare Orientierungshilfen im Gelände.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

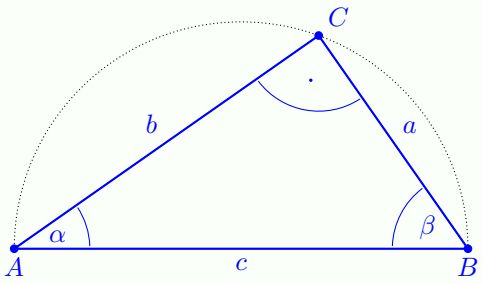
10.3. Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck

10.3.1. Winkelfunktionen

Erläuterung 10.3: Die Winkelfunktionen

Beim Strahlensatz haben wir gesehen, dass das Verhältnis gewisser Strecken zueinander konstant ist. Der Wert dieses Verhältnisses hängt offensichtlich vom Winkel ab. Man definiert einige solche Verhältnisse am rechtwinkligen Dreieck und führt so u. a. die *Winkelfunktionen* Sinus (sin), Kosinus (cos) und Tangens (tan) ein:

- $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$; $\sin(\beta) = \frac{b}{c}$ $\left(\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}\right)$
- $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$; $\cos(\beta) = \frac{a}{c}$ $\left(\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}\right)$
- $\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$; $\tan(\beta) = \frac{b}{a}$ $\left(\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}\right)$



Erläuterung 10.4: Einige häufig benötigte trigonometrische Werte

Folgende Sinus- und Kosinuswerte sollte man (wie Vokabeln) auswendig lernen:

- $\sin(0°) \;= \cos(90°) = 0$
- $\sin(30°) = \cos(60°) = 0{,}5$
- $\sin(45°) = \cos(45°) = 0{,}5 \cdot \sqrt{2}$
- $\sin(60°) = \cos(30°) = 0{,}5 \cdot \sqrt{3}$
- $\sin(90°) = \cos(0°) \;= 1$

Die Kosinuswerte sind spiegelbildlich zu den Sinuswerten: $\cos(0°) = 1$, ..., $\cos(90°) = 0$.

Merkhilfe: Die Sinuswerte von oben nach unten ergeben sich, indem man 0,5 mit $\sqrt{0}$, $\sqrt{1}$, usw. multipliziert.

https://mathegym.de/mathe/aufgabe/204/trigonometrische-gleichungen
https://sos-mathe.ch/

Folgende Tangens- und Kotangenswerte sollte man (wie Vokabeln) auswendig lernen:

- $\tan(0°) \;= \cot(90°) = 0$
- $\tan(30°) = \cot(60°) = {}^{1}/_{\sqrt{3}}$
- $\tan(45°) = \cot(45°) = 1$
- $\tan(60°) = \cot(30°) = \sqrt{3}$
- $\tan(90°) = \cot(0°) \;= \infty$

Übungsaufgabe 10.3: Aufgaben für den Taschenrechner

Beachten Sie bitte, dass die meisten Taschenrechner verschiedene Winkelsysteme kennen. Grad, Gon, Bogenmaß, Stunden/Minuten/Sekunden. Stellen Sie bitte entsprechend ein. Excel arbeitet bei den Funktionen mit dem Bogenmaß, hier ist jeweils umzurechnen.
Berechnen Sie jeweils Bogenmaß, Sinus, Cosinus, Tangens und Cotangens. = steht ausnahmsweise auch für ≈
a) $\alpha = 45°$??

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

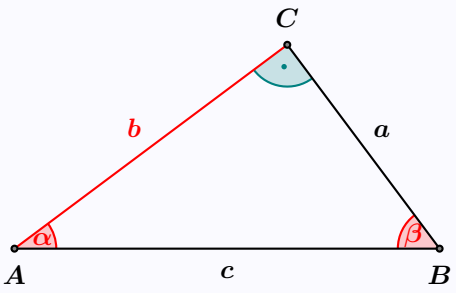
b) $\alpha = 225°$??
c) $\alpha = 353°$??
d) $\alpha = 100°$??
e) $\alpha = 344°$??
f) $\alpha = -42°$??
g) $\alpha = -24°$??
h) $\alpha = 0°$??
i) $\alpha = -220°$??
j) $\alpha = 13°$??
k) $\alpha = 298°$??
l) $\alpha = 19°$??
m) $\alpha = -267°$??
n) $\alpha = -107°$??
o) $\alpha = -25°$??
p) $\alpha = 241°$??
q) $\alpha = 90°$??
r) $\alpha = 160°$??
s) $\alpha = -341°$??
t) $\alpha = -73°$??
u) $\alpha = -242°$??
v) $\alpha = 346°$??
w) $\alpha = 291°$??

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 10.4: Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck

Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel (rot markiert) der Dreiecke. Mit

a) $\gamma = 90°$
$a = 12{,}7\,\text{cm}$
$c = 24{,}9\,\text{cm}$



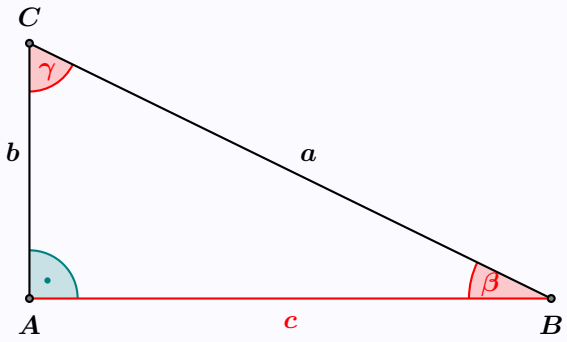
??

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel (rot markiert) der Dreiecke. Mit

b)
$\alpha = 90°$
$b = 420\,\text{m}$
$a = 645\,\text{m}$

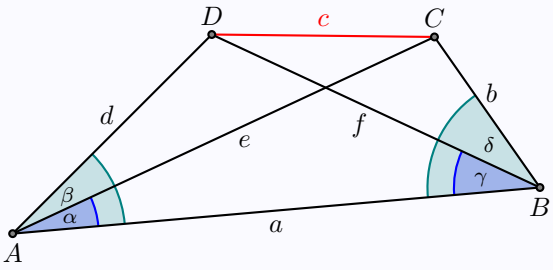


??

Vorwärtseinschnitt zur Längenermittlung:

Leiten Sie zunächst die Berechnung der Länge c her und setzen Sie danach ein.

c)
$a = 20\,\text{m}$
$\alpha = 20°$
$\beta = 40°$
$\gamma = 30°$
$\delta = 60°$



??

Hier geht es zur Musterlösung.

10.3.2. Arcusfunktionen

Erläuterung 10.5: Arcusfunktionen

Die *Arcus-* oder *Bogenfunktionen* sind die Umkehrung der trigonometrischen Funktionen sin, cos, ...

Beispiel:

$$x = \sin(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \arcsin(x) = \arcsin\big(\sin(\alpha)\big) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \arcsin(x) + k \cdot 2 \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Achtung: Aufgrund der Periodizität der trigonometrischen Funktionen sind die Arcusfunktionen **nicht eindeutig**.

Übungsaufgabe 10.5: Arcusfunktionen

Machen Sie sich mit der Bedienung Ihres Taschenrechners vertraut!

a) $\arcsin(1) = ??$

b) $\arccos(1) = ??$

c) $\arctan(1) = ??$

d) $\arcsin(\frac{\pi}{4}) = ??$

e) $\arctan(2 \cdot \pi) = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Übungsaufgabe 10.6: Kopfübungen mit Arcus[OpenAI2024m]

a) Berechnen Sie $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$. ??

b) Berechnen Sie $\arccos(0)$. ??

c) Berechnen Sie $\arctan(1)$. ??

d) Berechnen Sie $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. ??

e) Berechnen Sie $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$. ??

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 10.7: Textaufgaben Arcusfunktionen [OpenAI2024l]

a) Ein Baum wirft einen 15 Meter langen Schatten. Der Winkel zwischen der Spitze des Schattens und der Spitze des Baumes beträgt 30 Grad. Berechnen Sie die Höhe des Baumes. ??

b) Der Winkel zwischen einer Seilbahn und dem Boden beträgt 45 Grad. Wenn die Seilbahn eine horizontale Entfernung von 100 Metern zurücklegt, wie hoch ist der Berg, auf den die Seilbahn führt? ??

c) Ein Segelboot segelt in einem 60-Grad-Winkel zur Küstenlinie. Wenn das Boot 500 Meter in gerader Linie segelt, wie weit ist es dann von der Küste entfernt? ??

d) Ein Flugzeug steigt in einem Winkel von 20 Grad auf. Nach 2 Kilometern Flugstrecke in gerader Linie, wie hoch ist das Flugzeug gestiegen? ??

e) Eine Straße verläuft über eine Brücke im 45-Grad-Winkel zu einem Fluß. Wenn man auf der Straße 200 m von Ufer zu Ufer fahren muß, wie breit ist dann der Fluß? ??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

10.4. Goniometrische Gleichungen

Erläuterung 10.6: Goniometrische Gleichungen

Eine *trigonometrische Gleichung* (auch *goniometrische Gleichung*) ist eine Gleichung, in der die zu bestimmende Variable im Argument von trigonometrischen Funktionen (Winkelfunktionen) vorkommt. Bei der Lösung dieser Gleichungen sind die Beziehung zwischen den Winkelfunktionen hilfreich, insbesondere die Additionstheoreme u. a.

Hier eine kleine Auswahl:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \pm \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \pm \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$
$$\sin(2 \cdot \alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$$
$$\ldots$$

Wegen der Periodizität der Winkelfunktionen haben trigonometrische Gleichungen im Allgemeinen unendlich viele Lösungen.

Hinweis 10.1: Trigonometrische Entsprechungen

Suchen Sie nach weiteren trigonometrischen Entsprechungen! Stichworte: Additionstheorem, Doppelwinkelfunktion, Halbwinkelfunktion, Umrechnungen, ...

Beispiel 10.2: Goniometrische Gleichungen (1)

$\cos(2 \cdot x) - 4 \cdot \cos(x) + 3 = 0$

Mit $\cos(2 \cdot x) = 2 \cdot \cos^2(x) - 1$:

$\big(2 \cdot \cos^2(x) - 1\big) - 4 \cdot \cos(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow \cos^2(x) - 2 \cdot \cos(x) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \big(\cos(x) - 1\big)^2 = 0 \Rightarrow \cos(x) = 1 \Leftrightarrow x = 2 \cdot n \cdot \pi;\ n \in \mathbb{Z}$

Beispiel 10.3: Goniometrische Gleichungen (2)

$\frac{1}{2} \cdot \sin(x) + \sin^2(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) \cdot \big(\frac{1}{2} + \sin(x)\big) = 0$

$$\Rightarrow \sin(x) = 0 \text{ oder } \sin(x) = -\tfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x &= n \cdot \pi \\ x &= -\frac{\pi}{6} + 2 \cdot n \cdot \pi \\ x &= \frac{7}{6} \cdot \pi + 2 \cdot n \cdot \pi \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Beispiel 10.4: Goniometrische Gleichungen (3)

$\sin(2 \cdot x) = 4 \cdot \cos(x)$

Mit $\sin(2 \cdot x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$:

$2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) - 4 \cdot \cos(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) \cdot \big(\sin(x) - 2\big) = 0$

$\Rightarrow \cos(x) = 0 \text{ oder } \sin(x) = 2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \qquad n \in \mathbb{Z}$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Beispiel 10.5: Goniometrische Gleichungen (4)

$4 \cdot \sin^2(x) - 4 \cdot \cos(x) = 1$

Mit $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$:

$4 \cdot \left(1 - \cos^2(x)\right) - 4 \cdot \cos(x) = 1 \Leftrightarrow 4 - 4 \cdot \cos^2(x) - 4 \cdot \cos(x) = 1 \Leftrightarrow -4 \cdot \cos^2(x) - 4 \cdot \cos(x) + 4 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos^2(x) + \cos(x) - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4 \cdot \frac{3}{4}}}{2}$

$\Rightarrow \cos(x) = -\frac{3}{2}$ oder $\cos(x) = \frac{1}{2}$

10.4.1. Zusammenstellung der goniometrischen Gleichungen

[**OpenAI2024x**]

10.4.1.1. Sinussatz

Der Sinussatz beschreibt das Verhältnis der Seitenlängen eines Dreiecks zu den Sinuswerten der gegenüberliegenden Winkel. Das Dreieck muss nicht rechtwinklig sein.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Definitionsbereich: Für jedes Dreieck mit Seitenlängen a, b, c und gegenüberliegenden Winkeln α, β, γ.

Beispiel: In einem Dreieck ABC sei $a = 5$, $b = 7$, $\alpha = 30°$. Berechne β.

$$\frac{5}{\sin 30°} = \frac{7}{\sin \beta} \quad \Rightarrow \quad \sin \beta = \frac{7 \times \sin 30°}{5} \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 41.81°$$

10.4.1.2. Cosinussatz

Der Cosinussatz verallgemeinert den Satz des Pythagoras auf beliebige Dreiecke.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

Definitionsbereich: Gilt für alle Dreiecke.

Beispiel: In einem Dreieck ABC sei $a = 5$, $b = 7$, $\gamma = 60°$. Berechne c.

$$c^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \times 5 \times 7 \times \cos 60° \quad \Rightarrow \quad c \approx 6.40$$

10.4.1.3. Halbwinkel

Die Halbwinkel-Formeln ermöglichen die Berechnung des Sinus, Cosinus und Tangens von halben Winkeln.

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

Definitionsbereich: Für α in $[0, 2\pi]$.

Beispiel: Berechne $\sin\left(\frac{60°}{2}\right)$.

$$\sin\left(\frac{60°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos 60°}{2}} \quad \Rightarrow \quad \sin(30°) = 0.5$$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

10.4.1.4. Doppelwinkel

Die Doppelwinkelformeln beschreiben die Beziehungen für doppelte Winkel.

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

Definitionsbereich: Für α in $[0, 2\pi]$.

Beispiel: Berechne $\sin(2 \times 30°)$.

$$\sin(60°) = 2 \times \sin(30°) \times \cos(30°) \quad \Rightarrow \quad \sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

10.4.1.5. Additionssatz

Die Additionssätze erlauben das Rechnen mit Summen oder Differenzen von Winkeln.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

Definitionsbereich: Für α, β in $[0, 2\pi]$.

Beispiel: Berechne $\sin(45° + 30°)$.

$$\sin(75°) = \sin(45°)\cos(30°) + \cos(45°)\sin(30°)$$

$$\sin(75°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}$$

10.4.1.6. Tangens

Die Tangensfunktion kann ebenfalls durch die Sinus- und Cosinusfunktion beschrieben werden.

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Definitionsbereich: Für α in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \cup \ldots$.

Beispiel: Berechne $\tan(45°)$.

$$\tan(45°) = \frac{\sin 45°}{\cos 45°} = 1$$

10.4.1.7. Cotangens

Cotangens ist der Kehrwert der Tangensfunktion.

$$\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Definitionsbereich: Für α in $(0, \pi) \cup (\pi, 2\pi) \cup \ldots$.

Beispiel: Berechne $\cot(45°)$.

$$\cot(45°) = \frac{\cos 45°}{\sin 45°} = 1$$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

10.4.1.8. Arcusfunktionen

Die Arcusfunktionen sind die Umkehrfunktionen der goniometrischen Funktionen.

$$\arcsin(x), \quad \arccos(x), \quad \arctan(x)$$

Definitionsbereich:

$$\arcsin(x) : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arccos(x) : [-1,1] \to [0,\pi]$$

$$\arctan(x) : \mathbb{R} \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Beispiel: Berechne $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$$

Übungsaufgabe 10.8: Goniometrische Gleichungen

a) $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ $\quad x = ??$

b) $\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ $\quad x = ??$

c) $\sin(x + 40°) = \sin(65°)$ $\quad x = ??$

d) $\sin(3 \cdot x) = \sin(15°)$ $\quad x = ??$

e) $\sin(3 \cdot x) = \sin(x)$ $\quad x = ??$

f) $\tan(x) = \tan(4 \cdot x)$ $\quad x = ??$

g) $\cos(5 \cdot x) = \cos(x + \frac{\pi}{5})$ $\quad x = ??$

h) $\sin(x) \cdot \cos(3 \cdot x) = 2 \cdot \sin(x)$ $\quad x = ??$

i) $\sqrt{2} \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) = \cos(x)$ $\quad x = ??$

j) $\sin(2 \cdot x) = -\sin(x)$ $\quad x = ??$

k) $\sin(x) = \sqrt{3} \cdot \cos(x)$ $\quad x = ??$

l) $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 - \tan(x)$ $\quad x = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 10.9: Sinussatz [OpenAI2024w]

a) In einem Dreieck ABC sind $a = 7$, $b = 10$ und $\alpha = 30°$. Bestimme den Winkel β. ??

b) In einem Dreieck ABC sind $a = 8$, $b = 6$ und $\alpha = 40°$. Bestimme den Winkel β. ??

c) In einem Dreieck ABC sind $a = 12$, $b = 15$ und $\alpha = 60°$. Bestimme den Winkel β. ??

d) In einem Dreieck ABC sind $a = 9$, $b = 5$, $\alpha = 50°$. Berechne den Winkel β. ??

e) In einem Dreieck ABC sind $a = 14$, $c = 18$ und $\gamma = 70°$. Bestimme den Winkel α. ??

f) In einem Dreieck ABC sind $a = 13$, $b = 11$ und $\beta = 45°$. Bestimme den Winkel α. ??

g) In einem Dreieck ABC sind $a = 15$, $b = 17$ und $\alpha = 55°$. Bestimme den Winkel β. ??

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

h) In einem Dreieck ABC sind $a = 10$, $c = 12$ und $\gamma = 80°$. Bestimme den Winkel α. ??

i) In einem Dreieck ABC sind $a = 9$, $b = 7$ und $\alpha = 35°$. Bestimme den Winkel β. ??

j) In einem Dreieck ABC sind $a = 11$, $b = 14$ und $\beta = 60°$. Bestimme den Winkel α. ??

k) In einem Dreieck ABC sind $a = 18$, $b = 20$, $\alpha = 45°$. Berechne den Winkel β. ??

l) In einem Dreieck ABC sind $a = 12$, $c = 16$ und $\gamma = 75°$. Bestimme den Winkel α. ??

m) In einem Dreieck ABC sind $a = 8$, $b = 9$ und $\alpha = 25°$. Bestimme den Winkel β. ??

n) In einem Dreieck ABC sind $a = 5$, $c = 7$ und $\gamma = 40°$. Bestimme den Winkel α. ??

o) In einem Dreieck ABC sind $a = 10$, $b = 12$ und $\alpha = 30°$. Bestimme den Winkel β. ??

p) In einem Dreieck ABC sind $a = 13$, $c = 15$ und $\gamma = 50°$. Bestimme den Winkel α. ??

q) In einem Dreieck ABC sind $a = 6$, $b = 10$ und $\alpha = 25°$. Bestimme den Winkel β. ??

r) In einem Dreieck ABC sind $a = 11$, $b = 13$ und $\alpha = 40°$. Bestimme den Winkel β. ??

s) In einem Dreieck ABC sind $a = 14$, $c = 17$ und $\gamma = 60°$. Bestimme den Winkel α. ??

t) In einem Dreieck ABC sind $a = 16$, $b = 14$ und $\alpha = 35°$. Bestimme den Winkel β. ??

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 10.10: Goniometrische Aufgaben [OpenAI2024y]

a) Löse die Gleichung $\sin(x) = \frac{1}{2}$ für x im Intervall $[0, 2\pi]$. ??

b) Bestimme alle Lösungen der Gleichung $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ für x im Intervall $[0, 2\pi]$. ??

c) Löse die Gleichung $\tan(x) = 1$ für x im Intervall $[0, 2\pi]$. ??

d) Finde die allgemeinen Lösungen der Gleichung $\sin(2x) = 0$. ??

e) Löse die Gleichung $\cos(2x) = \cos(x)$ für x im Intervall $[0, 2\pi]$. ??

f) Bestimme die Lösungen der Gleichung $\sin(x) + \cos(x) = 0$ für x im Intervall $[0, 2\pi]$. ??

g) Finde die Lösungen der Gleichung $2\sin(x) - \sqrt{3} = 0$ für x im Intervall $[0, 2\pi]$. ??

h) Löse die Gleichung $\tan^2(x) = 3$ für x im Intervall $[0, 2\pi]$. ??

i) Löse die Gleichung $\cos(2x) + \sin(x) = 0$ im Intervall $[0, 2\pi]$. ??

j) Bestimme die Lösungen der Gleichung $2\sin^2(x) - \sin(x) = 0$ für x im Intervall $[0, 2\pi]$. ??

k) Löse die Gleichung $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{4}$ für x im Intervall $[0, 2\pi]$. ??

l) Finde die Lösungen der Gleichung $1 + 2\cos(x) = 3\sin^2(x)$ für x im Intervall $[0, 2\pi]$. ??

m) Bestimme die Lösungen der Gleichung $\cos(3x) = 0$ für x im Intervall $[0, 2\pi]$. ??

n) Löse die Gleichung $\tan(x) + \cot(x) = 2$ für x im Intervall $[0, 2\pi]$. ??

o) Finde die Lösungen der Gleichung $\sin^2(x) - \sin(x) + \frac{1}{4} = 0$ für x im Intervall $[0, 2\pi]$. ??

p) Bestimme die allgemeinen Lösungen der Gleichung $\cos(2x) = \sin(x)$. ??

q) Löse die Gleichung $\tan(x) = 2\sin(x)$ für x im Intervall $[0, 2\pi]$. ??

r) Finde die allgemeinen Lösungen der Gleichung $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$. ??

s) Löse die Gleichung $\sin(2x) + \cos(2x) = \frac{1}{2}$ für x im Intervall $[0, 2\pi]$. ??

t) Finde die Lösungen der Gleichung $4\sin(x)\cos(x) = 1$ für x im Intervall $[0, 2\pi]$. ??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

11. Lineare Algebra

Erläuterung 11.1: Lineare Algebra

Die Lineare Algebra ist ein Teilgebiet der Mathematik, das sich mit Vektoren, Matrizen und linearen Abbildungen beschäftigt und deren Beziehungen durch Linearkombinationen beschrieben werden.

Zentrale Begriffe

- Vektor: ein Element eines Vektorraums (z. B. Zahlenpaare, Spaltenvektoren).
- Matrix: rechteckige Anordnung von Zahlen als Rechenwerk für Vektoren; beschreibt lineare Abbildungen oder Systeme von Gleichungen.
- Lineare Abbildung (Transformation): eine Abbildung T, die V und W so abbildet, dass $T(au+bv) = aT(u) + bT(v)$ gilt.
- Basis und Dimension: eine Menge von Vektoren, die jeden Vektor eindeutig als Linearkombination darstellen; die Anzahl der Basisvektoren nennt man Dimension.
- Skalarraum: Menge von Skalaren über einem Feld (z. B. reelle Zahlen R) mit addition und skalarer Multiplikation.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

11.1. Vektoren

Erläuterung 11.2: Kurzfassung Vektoren vs. Skalare [OpenAI2024ad]

Dies ist eine KI-generierte Zusammenfassung, bitte beachten Sie das Skript! Ein **Vektor** ist eine mathematische Größe, die sowohl eine **Richtung** als auch eine **Größe** (Betrag) besitzt. Vektoren werden häufig verwendet, um physikalische Größen wie Geschwindigkeit, Kraft oder Verschiebung darzustellen, die eine Richtung und einen Betrag haben.

Ein Vektor in zwei Dimensionen (2D) wird oft als Pfeil in einem Koordinatensystem dargestellt. Der Vektor $\mathbf{v}$ kann in der Komponentenform geschrieben werden als:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

wobei v_1 und v_2 die Komponenten des Vektors entlang der x- und y-Achse darstellen. In drei Dimensionen (3D) könnte ein Vektor folgendermaßen dargestellt werden:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Skalare im Vergleich zu Vektoren

Ein **Skalar** ist im Gegensatz zu einem Vektor eine mathematische Größe, die nur eine Größe (Betrag), aber keine Richtung besitzt. Beispiele für skalare Größen sind Temperatur, Masse oder Energie. Ein Skalar kann einfach durch eine Zahl dargestellt werden, z. B. $s = 5$.

Der Hauptunterschied zwischen Vektoren und Skalaren ist also:

- **Vektoren** haben sowohl eine Größe als auch eine Richtung.
- **Skalare** haben nur eine Größe, aber keine Richtung.

Beispiel

Ein Beispiel für einen Vektor könnte die Geschwindigkeit eines Autos sein, die als $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 60\,\text{km/h} \\ 30^\circ \text{ nach Norden} \end{pmatrix}$ dargestellt werden kann. Diese Darstellung zeigt sowohl die Größe (60 km/h) als auch die Richtung (30° nach Norden).

Im Gegensatz dazu könnte die Temperatur eines Objekts, z. B. 20°C, ein Skalar sein, da sie keine Richtung hat, sondern nur einen Betrag.

Übungsaufgabe 11.1: Einfache Vektorrechnung

Lösen Sie

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = ??$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \\ 21 \\ 33 \\ 101 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ 0 \\ 7 \\ 11 \\ -11 \end{pmatrix} = ??$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \\ 21 \\ 33 \\ 101 \end{pmatrix} + 2 * \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ 0 \\ 7 \\ 11 \\ -11 \end{pmatrix} = ??$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \\ 21 \\ 33 \\ 101 \end{pmatrix} * 2 * \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ 0 \\ 7 \\ 11 \\ -11 \end{pmatrix} = ??$

e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} = ??$

f) $\begin{pmatrix} 53 \\ 87 \\ 1024 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 159 \\ 261 \\ 3072 \end{pmatrix} = ??$

g) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \\ 21 \\ 33 \\ 101 \end{pmatrix} \quad a = |\vec{a}| = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

11.2. Koordinatensysteme

Hinweis 11.1: Koordinatensysteme

Durch die Wahl geeigneter Koordinatensysteme vereinfachen sich häufig physikalisch-technische Problemstellungen. Manche technischen Anlagen wie z.B. Roboter arbeiten mit Polar- und oder Kugelkoordinaten, selten nur mit kartesischen Koordinaten. Beschreibungen in Elektrotechnik aber auch in Mechanik/Dynamik wechseln oft die Koordinatensysteme, um die Gleichungen einfacher zu machen.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Erläuterung 11.3: Polarkoordinaten v1

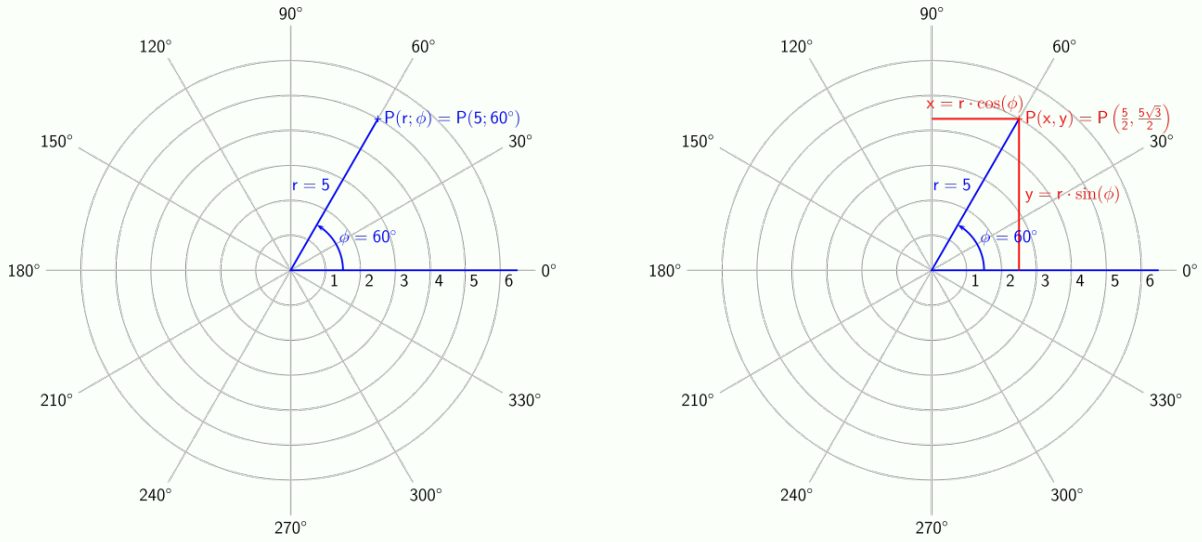


Abbildung 11.1.: Polarkoordinaten

Umrechnung von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}; \quad \sin \varphi = \frac{y}{r}; \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

unter Beachtung der Regeln im Skript

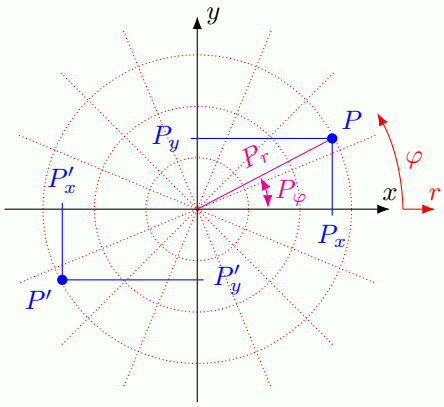
© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Erläuterung 11.4: Zweistellige Arkustangensfunktion atan2() v1

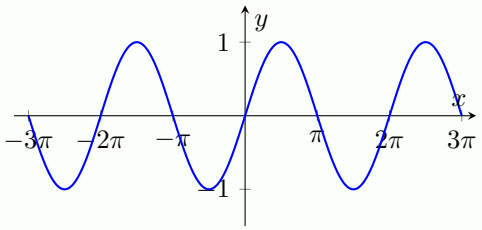
Möchte man die kartesischen Koordinaten $\begin{pmatrix} P_x & P_y \end{pmatrix}^T$ eines Punktes P in Polarkoordinaten $\begin{pmatrix} P_r & P_\varphi \end{pmatrix}^T$ umrechnen, dann gilt offensichtlich (vgl. rechts stehende Skizze):

$$P_r = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$$
$$\tan(P_\varphi) = {}^{P_y}/_{P_x}$$
$$\Rightarrow P_\varphi = \arctan\left({}^{P_y}/_{P_x}\right)$$

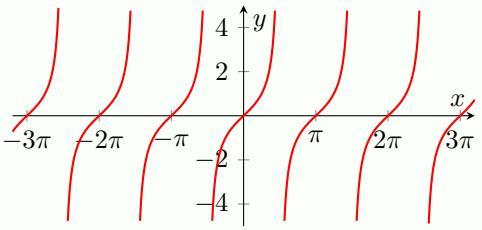


Hierbei ergibt sich jedoch eine Schwierigkeit. Die trigonometrischen Funktionen Sinus, Cosinus, Secans und Cosecans haben alle die Periode $2 \cdot \pi$, während Tangens und Cotangens die Periode π haben. Das sieht man gut an den nachfolgenden im kartesischen Koordinatensystem dargestellten Funktionsgraphen:

$y = \sin(x)$



$y = \tan(x)$



Die Konsequenz daraus: Der Punkt P im Bild oben rechts hat die Koordinaten $\begin{pmatrix} 2,1 & 1,1 \end{pmatrix}^T$; damit wird der Winkel $P_\varphi = \arctan\left({}^{1,1}/_{2,1}\right) \approx 28°$.

Der gespiegelte Punkt P' hat die Koordinaten $\begin{pmatrix} -P_x & -P_y \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2,1 & -1,1 \end{pmatrix}^T$; der Winkel P'_φ müßte also $P'_\varphi = P_\varphi + 180° \approx 208°$ betragen.

Nun liefert aber $\arctan\left({}^{-1,1}/_{-2,1}\right) = \arctan\left({}^{1,1}/_{2,1}\right) \approx 28°$.

Zur Lösung dieses Problems definiert man eine Funktion atan2 wie folgt:

$$\text{atan2}(y,x) := \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{, wenn } x > 0, \\ \frac{\pi}{2} \cdot \text{sgn}(y) & \text{, wenn } x = 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{, wenn } x < 0 \wedge y \geq 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{, wenn } x < 0 \wedge y < 0. \end{cases}$$

Übungsaufgabe 11.2: Polarkoordinaten (1) v1

— Aufgaben folgen —Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 11.3: Polarkoordinaten (2) v1

Forme jeweils in das andere Koordinatensystem um:

a) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 180° \end{pmatrix} \longleftrightarrow$??

b) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 270° \end{pmatrix} \longleftrightarrow$??

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

c) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 225° \end{pmatrix} \longleftrightarrow$??

d) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 45° \end{pmatrix} \longleftrightarrow$??

e) $\vec{k} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \longleftrightarrow$??

Hier geht es zur Musterlösung.

Erläuterung 11.5: Zylinderkoordinaten v1

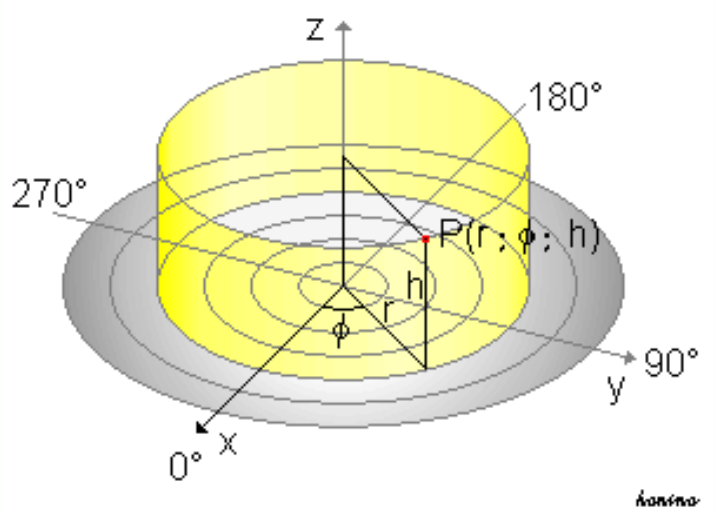


Abbildung 11.2.: Zylinderkoordinaten

Umrechnung von Zylinderkoordinaten in kartesische Koordinaten:

$$x = r \cdot \cos(\varphi)$$

$$y = r \cdot \sin(\varphi)$$

$$z = h$$

Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Zylinderkoordinaten:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{x}{r}; \quad \sin(\varphi) = \frac{y}{r}; \quad \tan(\varphi) = \frac{y}{x}$$

$$h = z$$

unter Beachtung der Regeln im Skript.

Übungsaufgabe 11.4: Zylinderkoordinaten v1

Da die Umrechnung bis auf $h = z$ identisch mit **??** ist, was trivial ist, keine gesonderten Übungen.

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Erläuterung 11.6: Kugelkoordinaten v1

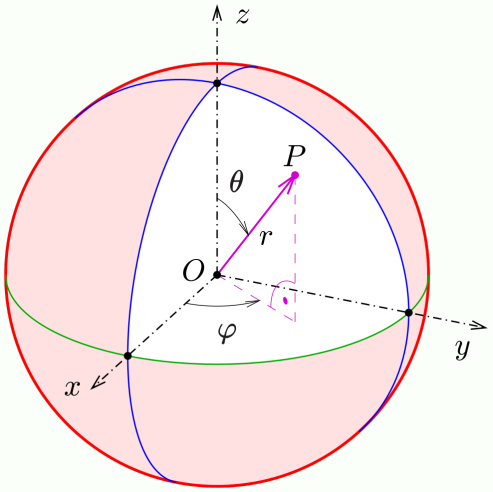


Abbildung 11.3.: Kugelkoordinaten

Die in der Physik übliche Konvention:[11.1]
ϑ nennt man dann auch die Elevation.

r Abstand vom Kugel-Mittelpunkt; $r \geq 0$
θ Polarwinkel; $0 \leq \varphi \leq \pi$
φ Azimut[11.2]; $-\pi \leq \varphi \leq \pi$

$\theta = 0°$ Nordpol (oben)
$\theta = 90°$ Äquatorebene
$\theta = 180°$ Südpol (unten)

Umrechnung von Kugelkoordinaten in kartesische Koordinaten:

$$x = r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \qquad y = r \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) \qquad z = r \cdot \cos(\theta)$$

Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Kugelkoordinaten:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\theta = \arccos\left({}^{z}/_{r}\right) = \operatorname{atan2}\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right)$$
$$\varphi = \operatorname{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{, wenn } x > 0, \\ \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sgn}(y) & \text{, wenn } x = 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{, wenn } x < 0 \wedge y \geq 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{, wenn } x < 0 \wedge y < 0. \end{cases}$$

... unter Beachtung der Regeln im Skript.

Übungsaufgabe 11.5: Kugelkoordinaten (1) v1

Trainieren Sie Ihr räumliches Vorstellungsvermögen. Sie brauchen für diese Aufgabe **keinen Taschenrechner!**

Sie finden Aufgaben mit gegebenen kartesischen Koordinaten oder mit gegebenen Kugelkoordinaten. Rechnen Sie es jeweils **im Kopf** in das andere Koordinatensystem um.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0° \\ 0° \end{pmatrix}$??

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 90° \\ 0° \end{pmatrix}$??

[11.1] Manche Autoren lassen θ von $-\pi/2$ bis $+\pi/2$ laufen, mit der Äquatorialebene bei $\theta = 0°$. Zur Unterscheidung wird dann manchmal auch das kleine Theta θ in der Variantenschreibweise ϑ gesetzt (häufig leider auch nicht, was leider zusätzlich Verwirrung stiften kann). Damit ändert sich Einiges:
$x = r \cdot \cos(\vartheta) \cdot \cos(\varphi)$; $y = r \cdot \cos(\vartheta) \cdot \sin(\varphi)$; $z = r \cdot \sin(\vartheta)$.

[11.2] Manche Autoren lassen den Azimut auch von 0 bis $2 \cdot \pi$ laufen. Hierdurch ändert sich jedoch nichts an den Umrechnungsformeln.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0° \\ 90° \end{pmatrix}$??

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 90° \\ 90° \end{pmatrix}$??

e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 180° \\ 90° \end{pmatrix}$??

f) $\begin{pmatrix} 1 \\ 90° \\ 180° \end{pmatrix}$??

g) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$??

h) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$??

i) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$??

j) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$??

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 11.6: Kugelkoordinaten (2) v1

Kugel- vs. kartesische Koordinaten: Rechnen Sie jeweils ins andere Koordinatensystem um!

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 156° \\ 130° \end{pmatrix}$??

b) $\begin{pmatrix} 5 \\ 175° \\ 88° \end{pmatrix}$??

c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 29° \\ 6° \end{pmatrix}$??

d) $\begin{pmatrix} -0{,}0145919630365078 \\ -0{,}13883325443188 \\ -3{,}99756330807638 \end{pmatrix}$??

e) $\begin{pmatrix} -0{,}0338186095456131 \\ -0{,}483628648377863 \\ -0{,}874619707139396 \end{pmatrix}$??

f) $\begin{pmatrix} 2{,}01593267743729 \\ -0{,}655016233178915 \\ -3{,}3921923846257 \end{pmatrix}$??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

11.3. Matrizen

Erläuterung 11.7: Matrizen

Eine *Matrix* (Plural *Matrizen*) ist eine rechteckige Anordnung von gleichartigen Elementen (i. d. R. Zahlen) in Tabellenform, d. h. in Form von m Zeilen und n Spalten. Man spricht von einer $m \times n$-*Matrix*. $m \times n$ ist dabei die *Ordnung* der Matrix.

Matrizen werden meistens mit – häufig in **Fettschrift** gesetzten – Großbuchstaben bezeichnet und i. d. r. in runde Klammern eingefaßt.

Die Elemente werden mittels zweier Indices durchnummeriert; der erste Index bezeichnet dabei – fortlaufend ab 1 – die Zeile, der zweite – fortlaufend ab 1 – die Spalte. Die Indices werden – allgemein – meist mit i und j (oder mit i und k) bezeichnet, also z. B. a_{ij} mit $i = 1, 2, ..., m$ und $j = 1, 2, ..., n$.

Allgemein hat eine Matrix damit diese Gestalt:

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

Hier drei konkrete Beispiele:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ ist eine 4×2-*Matrix*; $\boldsymbol{B}$ ist eine 3×3-*Matrix* und $\boldsymbol{C}$ ist eine 2×4-*Matrix*.

Sind die Elemente Zahlen aus der Grundmenge $\mathbb{G}$ (nur solche betrachten wir im Folgenden), dann ist die betreffende Matrix ein Element des Kreuzprodukts $\mathbb{G}^{n \times m}$. So wäre beispielsweise $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{4 \times 2}$, falls die $\underline{a}_{ij}$ komplexwertige Zahlen sind.

Übungsaufgabe 11.7: Spezielle Matrizen

a) Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie, ob A symmetrisch ist.??

b) Überprüfen Sie, ob die Matrix $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ antisymmetrisch ist.??

c) Ist die Matrix $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ eine Einheitsmatrix? Begründen Sie Ihre Antwort.??

d) Bestimmen Sie, ob die Matrix $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ symmetrisch ist.??

e) Überprüfen Sie, ob die Matrix $E = \begin{pmatrix} 3 & 2i \\ -2i & 3 \end{pmatrix}$ eine Hermitesche Matrix ist.??

f) Gegeben ist die Matrix $F = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ist F antisymmetrisch???

g) Überprüfen Sie, ob die Matrix $G = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ eine skalare Matrix ist.??

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

h) Bestimmen Sie, ob die Matrix $H = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ symmetrisch ist.??

i) Überprüfen Sie, ob die Matrix $I = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ eine Hermitesche Matrix ist.??

j) Ist die Matrix $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ symmetrisch???

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 11.8: Allgemeines zu Matrizen (2)

Kreuzen Sie an, welche Eigenschaften für die jeweils gegebenen Matrizen gelten:

Matrix	Null	Einheit	Quadratisch	Symmetrisch	Schiefsymmetrisch	Hermitesch
$\boldsymbol{A} = (...)$ usw.	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 11.9: Einfache Matrizenoperationen

a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = ??$

b) $\begin{pmatrix} 32 & 12 & 53 & 99 & 5 \\ 62 & 3 & 64 & 15 & 87 \\ 25 & 56 & 49 & 28 & 39 \\ 15 & 63 & 82 & 16 & 70 \\ 61 & 9 & 61 & 58 & 17 \\ 18 & 96 & 39 & 68 & 41 \\ 64 & 43 & 52 & 64 & 100 \\ 18 & 60 & 79 & 42 & 61 \\ 74 & 95 & 36 & 14 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 84 & 35 & 53 & 70 & 74 \\ 31 & 73 & 60 & 86 & 55 \\ 99 & 80 & 91 & 19 & 10 \\ 73 & 74 & 85 & 45 & 82 \\ 57 & 69 & 63 & 78 & 91 \\ 47 & 96 & 77 & 71 & 7 \\ 44 & 59 & 87 & 1 & 7 \\ 10 & 50 & 88 & 4 & 46 \\ 47 & 19 & 62 & 7 & 44 \end{pmatrix} = ??$

c) $5 * \begin{pmatrix} 0 & 78 & 89 & 73 & 19 \\ 45 & 48 & 92 & 49 & 90 \\ 39 & 99 & 50 & 6 & 14 \\ 24 & 18 & 52 & 37 & 93 \\ 94 & 87 & 92 & 32 & 72 \\ 5 & 75 & 51 & 43 & 57 \\ 50 & 37 & 28 & 2 & 93 \\ 78 & 49 & 4 & 98 & 96 \\ 51 & 98 & 62 & 91 & 79 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 50 & 93 & 25 & 52 & 82 \\ 79 & 47 & 45 & 71 & 56 \\ 23 & 90 & 71 & 40 & 61 \\ 11 & 70 & 15 & 6 & 79 \\ 13 & 70 & 46 & 10 & 30 \\ 98 & 74 & 16 & 91 & 41 \\ 28 & 60 & 89 & 46 & 46 \\ 17 & 28 & 101 & 1 & 96 \\ 78 & 51 & 46 & 41 & 29 \end{pmatrix} = ??$

d) Dreh- oder Rotationsmatrizen beschreiben die Drehung um eine Achse.

$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ beschreibt die Drehung um die x-Achse des kartesischen Koordinatensystems.

Was ergibt jeweils die Rotation um 45° der Einheitsvektoren? ??

e) Multiplikation: Denken Sie an das Schema Zeile · Spalte!

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

$$\begin{pmatrix} 29 & 11 & 63 & 23 & 78 \\ 48 & 3 & 84 & 83 & 41 \\ 74 & 28 & 57 & 39 & 28 \\ 10 & 95 & 57 & 48 & 36 \\ 99 & 59 & 27 & 100 & 31 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 82 & 23 & 43 & 6 & 53 \\ 89 & 45 & 1 & 20 & 20 \\ 42 & 14 & 68 & 11 & 11 \\ 51 & 44 & 30 & 5 & 79 \\ 44 & 65 & 44 & 93 & 47 \end{pmatrix} = ??$$

f) Multiplikation: Denken Sie an das Schema Zeile · Spalte!

$$\begin{pmatrix} 67 & 91 & 31 & 93 & 42 \\ 79 & 57 & 85 & 92 & 83 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 45 & 14 & 92 & 86 \\ 94 & 25 & 29 & 2 & 54 \\ 31 & 15 & 95 & 8 & 88 \\ 88 & 61 & 24 & 73 & 1 \\ 19 & 7 & 57 & 34 & 26 \end{pmatrix} = ??$$

Hier geht es zur Musterlösung.

11.4. Anwendung: Lösen von LGS mit Gauß- und Gauß-Jordan-Verfahren

Eine wichtige Anwendung der Matrizenrechnung ist das Lösen von linearen Gleichungssystemen. Hierauf wird im nächsten Kapitel detailliert eingegangen.

11.5. Anwendung: Grundzüge der analytischen Geometrie

Erläuterung 11.8: Geradengleichung

In der Schreibweise der analytischen Geometrie ist eine Gerade eindeutig bestimmt durch

1. einen Punkt $\vec{P}$ auf ihr, dem sogenannten *Aufpunkt*, und
2. allen beliebigen Vielfachen eines *Richtungsvektors* $\vec{R}$.

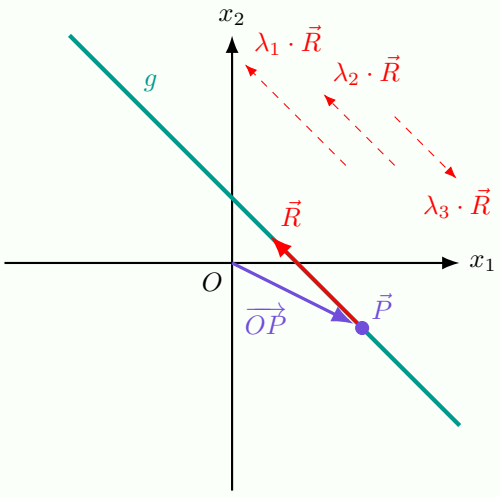
Damit schreibt man:

$$g := \vec{P} + \lambda \cdot \vec{R}$$

Dabei ist $\vec{P} = \overrightarrow{OP}$ der *Ortsvektor* des Aufpunktes P und $\vec{R}$ ein (beliebiger) Richtungsvektor der Geraden g.

Man nennt die obige Gleichung die *Parameterdarstellung* oder *Parameterform* der Geraden g. Dabei ist $\lambda \in \mathbb{R}$ der *Parameter*.

In der Skizze sind oben rechts beispielsweise drei verschiedene Vielfache des Richtungsvektors $\vec{R}$ eingezeichnet.



© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Beispiel 11.1: Zwei-Punkte-Form

Von einer Geraden g sind die beiden Punkte $P = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ bekannt. Wie lautet die Geradengleichung?

Wir wählen einen der beiden Punkte als Aufpunkt; der Richtungsvektor ergibt sich aus der Differenz $P - Q$ oder $Q - P$:

- P: $g = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \left(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$
- Q: $g = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \left(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

Hinweis: Bei derartigen Aufgaben „kürzt“ man den Richtungsvektor soweit, dass sich „glatte Zahlen“ für die Richtungskomponenten ergeben; das ist erlaubt, weil $\lambda \in \mathbb{R}$ jeden beliebigen Wert annehmen kann.

Übungsaufgabe 11.10: Zwei-Punkte-Form

Gegeben sind jeweils zwei Punkte. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden, die durch die beiden gegebenen Punkte geht.

a) $P = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$; $Q = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $\quad \rightarrow$??

b) $P = \begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix}$; $Q = \begin{pmatrix}-7\\-21\end{pmatrix}$ $\quad \rightarrow$??

c) $P = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$; $Q = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\quad \rightarrow$??

d) $P = \begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$; $Q = \begin{pmatrix}-4\\-8\end{pmatrix}$ $\quad \rightarrow$??

e) $P = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$; $Q = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad \rightarrow$??

f) $P = \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$; $Q = \begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$ $\quad \rightarrow$??

g) $P = \begin{pmatrix}42\\-37\\-4\end{pmatrix}$; $Q = \begin{pmatrix}6\\-25\\14\end{pmatrix}$ $\quad \rightarrow$??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Beispiel 11.2: Schnittpunkt zweier Geraden

Gegeben sind die beiden Geraden $g := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h := \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Gesucht ist der Schnittpunkt der beiden Geraden g und h.

Der Schnittpunkt muss beide Geradengleichungen erfüllen, also setzen wir gleich:

$$g = h \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten ein LGS mit zwei Gleichungen für die beiden unbekannten Parameter λ und μ:

$$\Rightarrow 0 + 1 \cdot \lambda = -3 + 1 \cdot \mu \quad \wedge \quad -1 + 2 \cdot \lambda = 5 - 1 \cdot \mu$$

Das Lösen dieses LGS ergibt den gesuchten Schnittpunkt $\vec{S}$:

$$\mu = 4 \Rightarrow \vec{S} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \lambda = 1 \Rightarrow \vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Übungsaufgabe 11.11: Schnittpunkt zweier Geraden

Gegeben sind die beiden Geraden g und h; bestimmen Sie den Schnittpunkt.

a) $g = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $h = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$??

b) $g = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $h = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$??

c) $g = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $h = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$??

d) $g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$; $h = \begin{pmatrix} -2 \\ 22 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$??

e) $g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $h = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$??

f) $g = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$; $h = \begin{pmatrix} 2 \\ -6\,1/3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$??

g) $g = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$; $h = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$??

h) $g = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$; $h = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$??

i) $g = \begin{pmatrix} -7 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$; $h = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$??

j) $g = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $h = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$??

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

k) $g = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $h = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$
$\rightarrow$??

l) $g = \begin{pmatrix} -14 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $h = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$
$\rightarrow$??

Hier geht es zur Musterlösung.

Hinweis 11.2: weitere Aufgaben

https://sos-mathe.ch/v/v3/v31/aufg_v31.html; zuletzt geprüft am 2024-08-30.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Teil II.

Themen der zweiten Woche - *Funktionen* bis *Kegelschnitte*

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Woche 2

1. Ableitung einer Funktion
   - Differenzen- und Differentialquotient
   - Ableitungsregeln
   - höhere Ableitungen
2. Einführung in die Integralrechnung
   - Stammfunktion, Integrationsregeln
   - unbestimmte und bestimmte Integrale
3. Rechnen mit Vektoren und Matrizen
   - Vektordefinition, Addition und Subtraktion von Vektoren,Skalarprodukt und Vektorprodukt
   - Matrixdefinition, Addition und Subtraktion von Matrizen, Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar, Matrizenmultiplikation
4. Lineare Gleichungssysteme
   Lösungsverfahren, Gaußsches Eliminationsverfahren
5. Kegelschnitte
   Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

12. Lineare Gleichungssysteme

12.1. Grundlegende Aufgabenstellungen

Erläuterung 12.1: Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme (LGS) bestehen aus mehreren verbundenen Gleichungen, die jeweils mehrere Variablen enthalten.

Das *Lösen linearer Gleichungssysteme* besteht in der Suche nach Werten für die Variablen, die **alle** Gleichungen des LGS zu wahren Aussagen werden läßt.

Beispiel:
$$\begin{array}{rcrcl} 3\cdot x & + & 4\cdot y & = & 11 \\ 2\cdot x & + & 5\cdot y & = & 12 \end{array}$$

Durch Einsetzen und Ausrechnen überzeugt man sich davon, dass $x = 1$ und $y = 2$ eine Lösung ist.

Für die Lösung gibt es mehrere Verfahren:

1. Das Einsetzungsverfahren
2. Das Gleichsetzungsverfahren
3. Das Additionsverfahren
4. Das Gauß-Jordan-Verfahren
5. Die Gaußsche Eliminationsmethode
6. Inversion der Koeffizientenmatrix
7. Die Cramersche Regel

Erläuterung 12.2: LGS: 1. Das Einsetzungsverfahren

Man sucht sich eine beliebige Gleichung heraus – diese Gleichung scheidet dann aus dem LGS aus. Diese Gleichung wird nach einer Variablen aufgelöst, das Ergebnis – anstelle der Variablen – in die verbleibenden Gleichungen des LGS eingesetzt und diese neu zusammen gefasst.

Als Ergebnis reduzieren sich sowohl die Anzahl der Variablen als auch die Anzahl der Gleichungen um Eins.

Das Verfahren wird wiederholt, bis nur noch eine Gleichung mit einer Variablen übrig bleibt. Damit hat man eine Lösungsvariable berechnet.

Durch sukzessives „Rückwärtseinsetzen“ der bereits berechneten Variablen in die ausgeschiedenen Gleichungen werden anschließend alle anderen Variablen berechnet.

Beispiel 12.1: LGS: 1. Das Einsetzungsverfahren (1)

Schritt	LGS	Auflösung	Einsetzung
1.	$\begin{array}{rcrcl} 3\cdot x & + & 4\cdot y & = & 11 \\ 2\cdot x & + & 5\cdot y & = & 12 \end{array}$	$x = -5/2\cdot y + 6$	$3\cdot(-5/2\cdot y + 6) + 4\cdot y = 11 \Leftrightarrow y = 2$
2.		$x = -5/2\cdot y + 6$	$x = -5/2\cdot 2 + 6 \Leftrightarrow x = 1$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Beispiel 12.2: LGS: 1. Das Einsetzungsverfahren (2)

$$
\begin{array}{rrrcl}
x_1 & +2\cdot x_2 & +x_3 & = 4 & \Leftrightarrow \quad x_1 = -2\cdot x_2 - x_3 + 4 \\
2\cdot x_1 & -2\cdot x_2 & +6\cdot x_3 & = 0 & \Rightarrow \quad 2\cdot(-2\cdot x_2 - x_3 + 4) - 2\cdot x_2 + 6\cdot x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -6\cdot x_2 + 4\cdot x_3 = -8 \\
3\cdot x_1 & +x_2 & +3\cdot x_3 & = 2 & \Rightarrow \quad 3\cdot(-2\cdot x_2 - x_3 + 4) + x_2 + 3\cdot x_3 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad -5\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = -10 \\
 & & & & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 2 \\
 & & & & -6\cdot 2 + 4\cdot x_3 = -8 \quad \Leftrightarrow \quad x_3 = 1 \\
 & & & & x_1 = -2\cdot 2 - 1 + 4 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -1
\end{array}
$$

Übungsaufgabe 12.1: Lineare Gleichungssysteme (1)

Lösen Sie mit der *Einsetzungsmethode*:

a) $\begin{array}{rcl} 1\cdot x - 1\cdot y &=& 0 \\ 0\cdot x + 2\cdot y &=& 2 \end{array}$ $\rightarrow$??

b) $\begin{array}{rcl} 2x + 3y &=& -12 \\ -x - y &=& 10 \end{array}$ $\rightarrow$??

c) $\begin{array}{rcl} x + 2y &=& 4 \\ -2x - 3y &=& -8 \end{array}$ $\rightarrow$??

d) $\begin{array}{rcl} 2x + 3y &=& -7 \\ x + 2y &=& 16 \end{array}$ $\rightarrow$??

e) $\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z &=& 1 \\ 2x + 0y + 6z &=& 8 \\ 3x - y + 4z &=& 18 \end{array}$ $\rightarrow$??

f) $\begin{array}{rcl} 3x + 2y + 3z &=& 2 \\ x - 3y - 2z &=& -10 \\ -5x + 2y - z &=& -2 \end{array}$ $\rightarrow$??

g) $\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &=& -7 \\ -x_1 + 0x_2 + 6x_3 - 2x_4 &=& -20 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 0x_4 &=& 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 &=& 2 \end{array}$ $\rightarrow$??

Hier geht es zur Musterlösung.

Erläuterung 12.3: LGS: 2. Das Gleichsetzungsverfahren

Man sucht sich eine beliebige Variable und eine beliebige Gleichung heraus – diese Gleichung scheidet dann aus dem LGS aus. Alle Gleichungen werden nach einer Variablen aufgelöst; das Ergebnis der ausgeschiedenen Gleichung wird dann den Ergebnissen aller anderen (noch verbliebenen) Gleichungen gleich gesetzt.

Als Ergebnis reduzieren sich sowohl die Anzahl der Variablen als auch die Anzahl der Gleichungen um Eins.

Das Verfahren wird wiederholt, bis nur noch eine Gleichung mit einer Variablen übrig bleibt. Damit hat man eine Lösungsvariable berechnet.

Anschließend wiederholt man das komplette Verfahren für eine andere Variable – so oft, bis alle Variablen bearbeitet wurden.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Beispiel 12.3: LGS: 2. Das Gleichsetzungsverfahren (1)

Schritt	LGS	Gleichsetzung
1.	$3 \cdot x + 4 \cdot y = 11$ $2 \cdot x + 5 \cdot y = 12$	$y = -3/4 \cdot x + 11/4$ $y = -2/5 \cdot x + 12/5$
2.		$-3/4 \cdot x + 11/4 = -2/5 \cdot x + 12/5 \Leftrightarrow x = 1$
3.	$3 \cdot x + 4 \cdot y = 11$ $2 \cdot x + 5 \cdot y = 12$	$x = -4/3 \cdot y + 11/3$ $x = -5/2 \cdot y + 6$
4.		$-4/3 \cdot y + 11/3 = -5/2 \cdot y + 6 \Leftrightarrow y = 2$

Übungsaufgabe 12.2: Lineare Gleichungssysteme (2)

Lösen Sie mit der *Gleichsetzungsmethode*:

a) $\begin{array}{l} 1 \cdot x - 1 \cdot y = 0 \\ 0 \cdot x + 2 \cdot y = 2 \end{array}$ $\rightarrow$??

b) $\begin{array}{rr} 2x + 3y = & -12 \\ -x - y = & 10 \end{array}$ $\rightarrow$??

c) $\begin{array}{rr} x + 2y = & 4 \\ -2x - 3y = & -8 \end{array}$ $\rightarrow$??

d) $\begin{array}{rr} 2x + 3y = & -7 \\ x + 2y = & 16 \end{array}$ $\rightarrow$??

e) $\begin{array}{rr} x + 2y + 3z = & 1 \\ 2x + 0y + 6z = & 8 \\ 3x - y + 4z = & 18 \end{array}$ $\rightarrow$??

f) $\begin{array}{rr} 3x + 2y + 3z = & 2 \\ x - 3y - 2z = & -10 \\ -5x + 2y - z = & -2 \end{array}$ $\rightarrow$??

g) $\begin{array}{rr} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = & -7 \\ -x_1 + 0x_2 + 6x_3 - 2x_4 = & -20 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 0x_4 = & 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = & 2 \end{array}$ $\rightarrow$??

Hier geht es zur Musterlösung.

Erläuterung 12.4: LGS: 3. Das Additionsverfahren

Beim Additionsverfahren werden zwei oder mehrere Gleichungen zunächst so geschickt mit jeweils einer (anderen) Zahl multipliziert, dass sich beim anschließenden Addieren der so behandelten Gleichungen alle Variable bis auf eine heraus heben.

Bei drei oder mehr Gleichungen mit entsprechend drei oder mehr Variablen wendet man das Verfahren nacheinander für jede Variable an.

Das Additionsverfahren ist die Grundlage für weiterführende, matrixbasierte Verfahren.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Beispiel 12.4: LGS: 3. Das Additionsverfahren (1)

Schritt	LGS		modifiziertes LGS	
1.	$3\cdot x + 4\cdot y = 11 \quad \| \cdot 2$ $2\cdot x + 5\cdot y = 12 \quad \| \cdot(-3)$	$\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$	$6\cdot x + 8\cdot y = 22$ $-6\cdot x - 15\cdot y = -36$	
		$(+)$	$0\cdot x - 7\cdot y = -14$	$\Leftrightarrow y = 2$
2.	$3\cdot x + 4\cdot y = 11 \quad \| \cdot 5$ $2\cdot x + 5\cdot y = 12 \quad \| \cdot(-4)$	$\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$	$15\cdot x + 20\cdot y = 55$ $-8\cdot x - 20\cdot y = -48$	
		$(+)$	$7\cdot x + 0\cdot y = 7$	$\Leftrightarrow x = 1$

Übungsaufgabe 12.3: Lineare Gleichungssysteme (3)

Lösen Sie mit der *Additionsmethode*:

a) $\begin{array}{l} 1\cdot x - 1\cdot y = 0 \\ 0\cdot x + 2\cdot y = 2 \end{array}$ $\rightarrow$??

b) $\begin{array}{l} 2x + 3y = -12 \\ -x - y = 10 \end{array}$ $\rightarrow$??

c) $\begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ -2x - 3y = -8 \end{array}$ $\rightarrow$??

d) $\begin{array}{l} 2x + 3y = -7 \\ x + 2y = 16 \end{array}$ $\rightarrow$??

e) $\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 0y + 6z = 8 \\ 3x - y + 4z = 18 \end{array}$ $\rightarrow$??

f) $\begin{array}{l} 3x + 2y + 3z = 2 \\ x - 3y - 2z = -10 \\ -5x + 2y - z = -2 \end{array}$ $\rightarrow$??

g) $\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -7 \\ -x_1 + 0x_2 + 6x_3 - 2x_4 = -20 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 0x_4 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \end{array}$ $\rightarrow$??

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 12.4: Lineare Gleichungssysteme (4)

Man berechne:

a) Die Differenz der Quadrate von zwei natürlichen Zahlen mit dem Unterschied 3 beträgt 381. Wie heißt die kleinere der beiden Zahlen? ??

b) Die Fahrzeuge A, B und C legen dieselbe Strecke zurück. B ist um 6 km/h schneller undbraucht 11 Minuten weniger als A. C ist um 4 km/h langsamer und braucht 9 Minuten mehr als A. Berechnen Sie die Fahrzeit und die mittlere Geschwindigkeit von A.
??

c) Löse

$$\left|\begin{array}{rrrrl} w & +x & -y & +z & = 16 \\ 3w & -2x & +9y & -z & = 11 \\ 4w & -3x & +6y & +2z & = 13 \\ 6w & -4x & +2y & +3z & = 10 \end{array}\right| \quad ??$$

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Erläuterung 12.5: Das Gaußsche Eliminationsverfahren

Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn beide Seiten mit der gleichen Zahl multipliziert werden.

Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems (LGS) ändert sich nicht, wenn beide Seiten einer Gleichung mit der gleichen Zahl, oder wenn mehrere Gleichungen beidseitig mit jeweils der gleichen Zahl (je Gleichung) multipliziert werden.

Die Lösungsmenge eines LGS ändert sich nicht, wenn zwei (oder mehrere) Gleichungen addiert werden, und eine der Gleichungen durch das Ergebnis der Addition ersetzt werden.

Die Lösungsmenge eines LGS ändert sich nicht, wenn die Reihenfolge der Gleichungen verändert wird.

Diese vorstehend beschriebene Operationen nennt man *EZU (elementare Zeilenumformungen)*.

Auf diesen Erkenntnissen beruht das Gaußsche Eliminationsverfahren – es ist gewissermaßen eine Formalisierung des Additionsverfahrens.

Man schreibt das LGS als Matrix-Vektor-Gleichung $\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ und betrachtet im Folgenden nur noch die *erweiterte Koeffizientenmatrix* (hier am Beispiel von drei Gleichungen mit drei Unbekannten):

$$\begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_1 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = b_1 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right) \overset{\text{elementare Zeilenumformungen}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} \dots & a_{12} & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots \end{array}\right)$$

Durch die oben beschriebenen *EZU (elementare Zeilenumformungen)* wird die erweiterte Koeffizientenmatrix in die *obere Dreiecksform* gebracht.

Aus der letzten Zeile lässt sich die Variable x_3 direkt bestimmen; die anderen Variablen ergeben sich durch sukzessives *Rückwärtseinsetzen* in die darüber liegenden Zeilen.

Beispiel 12.5: Gaußsches Eliminationsverfahren

$$\begin{array}{cccc} x_1 & +2 \cdot x_2 & +x_3 & = 4 \\ 2 \cdot x_1 & -2 \cdot x_2 & +6 \cdot x_3 & = 0 \\ 3 \cdot x_1 & +x_2 & +3 \cdot x_3 & = 2 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot(-2) \end{array} \quad \Longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 6 & -6 & 18 & 0 \\ -6 & -2 & -6 & -4 \end{array}\right) \overset{[2]+[3]}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 6 & -6 & 18 & 0 \\ 0 & -8 & 12 & -4 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \div(-6) \\ \div 4 \end{array} \quad \Longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{array}\right) \overset{[1]+[2]}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot 3 \end{array} \quad \Longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & -4 & 8 \\ 0 & -6 & 9 & -3 \end{array}\right) \overset{[2]+[3]}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} div 2 \\ \div 5 \end{array} \quad \Longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Aus der letzten erweiterten Koeffizientenmatrix lässt sich direkt ablesen: $x_3 = 1$.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Übungsaufgabe 12.5: Einfache Aufgaben mit Gaußschem Eliminationsverfahren v1

a) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 4 \\ 2x - y + 3z &= 9 \\ x + y + z &= 6 \end{aligned}$$

??

b) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 3 \\ x - y + 2z &= 4 \\ 3x + y + z &= 5 \end{aligned}$$

??

c) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 3x + y + 2z &= 5 \\ 2x - 2y + z &= -3 \\ x + 3y - z &= 2 \end{aligned}$$

??

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 12.6: Aufgaben zur Lösung von Gleichungssystemen mit Gaußschen Eliminationsverfahren v1

a) Gegeben sei das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 + 7x_7 + 8x_8 + 9x_9 + 10x_{10} &= 55 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 + 7x_6 + 8x_7 + 9x_8 + 10x_9 + x_{10} &= 55 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 10x_8 + x_9 + 2x_{10} &= 55 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 8x_5 + 9x_6 + 10x_7 + x_8 + 2x_9 + 3x_{10} &= 55 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 9x_5 + 10x_6 + x_7 + 2x_8 + 3x_9 + 4x_{10} &= 55 \\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 10x_5 + x_6 + 2x_7 + 3x_8 + 4x_9 + 5x_{10} &= 55 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 10x_4 + x_5 + 2x_6 + 3x_7 + 4x_8 + 5x_9 + 6x_{10} &= 55 \\ 8x_1 + 9x_2 + 10x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 + 4x_7 + 5x_8 + 6x_9 + 7x_{10} &= 55 \\ 9x_1 + 10x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 4x_6 + 5x_7 + 6x_8 + 7x_9 + 8x_{10} &= 55 \\ 10x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 5x_6 + 6x_7 + 7x_8 + 8x_9 + 9x_{10} &= 55 \end{aligned}$$

??

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

b) Gegeben sei das folgende Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 + 6x_6 + x_7 + 8x_8 + 9x_9 + 10x_{10} &= 70 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 4x_7 + 4x_8 + 5x_9 + 5x_{10} &= 35 \\
4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 + 6x_6 + 4x_7 + 7x_8 + 5x_9 + 8x_{10} &= 84 \\
3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 2x_5 + 5x_6 + 3x_7 + 4x_8 + 5x_9 + 7x_{10} &= 72 \\
5x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 6x_5 + 4x_6 + 5x_7 + 3x_8 + 2x_9 + 1x_{10} &= 80 \\
6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 6x_6 + 4x_7 + 5x_8 + 2x_9 + 3x_{10} &= 90 \\
7x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 3x_6 + 6x_7 + 4x_8 + 5x_9 + 2x_{10} &= 100 \\
8x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4x_5 + 2x_6 + 3x_7 + 6x_8 + 4x_9 + 5x_{10} &= 110 \\
9x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 5x_5 + 4x_6 + 2x_7 + 3x_8 + 6x_9 + 4x_{10} &= 120 \\
10x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 7x_4 + 6x_5 + 5x_6 + 4x_7 + 2x_8 + 3x_9 + 6x_{10} &= 130
\end{aligned}
$$

??

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 12.7: Einfache Aufgaben zur Lösung von Gleichungssystemen mit Jordan-Form v1

Achtung! Gleiche Systeme wie in einer vorherigen Aufgabe – diesmal ist die Lösung aber mit Hilfe des Gauß-Jordan-Verfahrens gesucht!

a) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
x + 2y + z &= 4 \\
2x - y + 3z &= 9 \\
x + y + z &= 6
\end{aligned}
$$

??

b) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
2x + y - z &= 3 \\
x - y + 2z &= 4 \\
3x + y + z &= 5
\end{aligned}
$$

??

c) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
3x + y + 2z &= 5 \\
2x - 2y + z &= -3 \\
x + 3y - z &= 2
\end{aligned}
$$

??

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 12.8: Löse mit Gauß-Jordan [OpenAI2024d]

a) Löse das folgende Gleichungssystem mit der Gauß-Jordan-Methode:

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ ??}$$

b) Löse das folgende Gleichungssystem mit der Gauß-Jordan-Methode:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & 3 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 0 & 1 & -5 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 2 & -1 & 3 & 0 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -4 & 3 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -5 & 6 & -7 & 8 \\ -5 & 6 & -7 & 8 & 9 & -10 & 11 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -25 \\ 35 \\ 45 \\ -55 \\ 65 \\ 75 \\ 85 \end{pmatrix} \text{ ??}$$

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 12.9: Aufgaben zur Lösung von Gleichungssystemen mit Jordan-Form

a) Lösen Sie das Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mittels der Jordan-Form, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

??

b) Lösen Sie das Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mittels der Jordan-Form, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

13. Folgen und Reihen

13.1. Folgen

Erläuterung 13.1: Zahlenfolgen

Unter einer *Zahlenfolge* (kurz: *Folge*) verstehen wir eine Auflistung von endlich oder unendlich vielen, fortlaufend nummerierten Zahlen.

Man schreibt die Liste a_i der Folgenglieder in runden Klammern; dabei ist das i ein (fortlaufendes) Element einer *Indexmenge* (meistens $\mathbb{N}$):

- $(a_i)_{i=1,\dots,n}$ bei endlichen Folgen;
- $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ bei endlichen Folgen.

Die einzelnen Folgenglieder errechnen sich nach einem *Bildungsgesetz*; dieses kann *explizit* oder *rekursiv* definiert sein.

Beispiel 13.1: Explizit angegebenes Folgen-Bildungsgesetz

Beispiel 1: Die durch 7 teilbaren Zahlen kleiner 100: $(7\cdot i)_{i=1,2,\dots,14}$ $\to 7, 14, 21, \dots, 98$

Beispiel 2: Die Quadratzahlen: $(i^2)_{i\in\mathbb{N}}$ $\to 1, 4, 9, 16, 25, \dots$ **Beispiel 3:** Arithmetische Folgen: $(3\cdot i+2)_{i\in\mathbb{N}}$ $\to 5, 8, 11, 14, 17, \dots$ **Beispiel 4:** Geometrische Folgen: $(2\cdot 3^i)_{i\in\mathbb{N}}$ $\to 6, 18, 54, 162, 486, 1458, \dots$

Übungsaufgabe 13.1: Explizites Bildungsgesetz von Folgen

Nachstehend sind einige Folgen jeweils mit ihren ersten wenigen Folgengliedern gegeben. Ermitteln Sie das nächste Folgenglied und geben Sie das Bildungsgesetz a_i explizit an ($i\in\mathbb{N}$, d. h. $i\geq 1$).

a) $1, 2, 3, 4, \cdots = ??$

b) $2, 4, 6, 8, \cdots = ??$

c) $1, 4, 9, 16, \cdots = ??$

d) $1, 3, 6, 10, \cdots = ??$

e) $2, 3, 5, 7, 11, \cdots = ??$

f) $1, -1, 1, -1, \cdots = ??$

g) $2, 4, 8, 16, \cdots = ??$

h) $1, 2, 4, 7, 11, \cdots = ??$

i) $0, 1, 4, 9, 16, \cdots = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Beispiel 13.2: Rekursiv angegebenes Folgen-Bildungsgesetz

Beispiel 1: Die Fakultäten $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \cdots \ \cdot n$:

$0! := 1$
$i! = i \cdot (i-1)! \qquad$ für $i \geq 1 \qquad \rightarrow 1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, ...$

Beispiel 2: Die Fibonacci-Zahlen F_i (Beispiel für Doppel-Rekursion):

$F(0) := 1$
$F(1) := 1$
$F(i) = F(i-1) + F(i-2) \qquad$ für $i \geq 2 \qquad \rightarrow 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...$

Übungsaufgabe 13.2: Rekursives Bildungsgesetz von Folgen

Nachstehend sind einige Folgen jeweils mit ihren ersten wenigen Folgengliedern gegeben. Ermitteln Sie das nächste Folgenglied und geben Sie das Bildungsgesetz a_i rekursiv an ($i \in \mathbb{N}$, d. h. $i \geq 1$).

a) $1, 2, 3, 4, \cdots = ??$

b) $2, 4, 6, 8, \cdots = ??$

c) $1, 4, 9, 16, \cdots = ??$

d) $1, 3, 6, 10, \cdots = ??$

e) $2, 3, 5, 7, 11, \cdots = ??$

f) $1, 1, 2, 3, 5, \cdots = ??$

g) $1, -1, 1, -1, \cdots = ??$

h) $2, 4, 8, 16, \cdots = ??$

i) $1, 2, 4, 7, 11, \cdots = ??$

j) $0, 1, 4, 9, 16, \cdots = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 13.3: Folgen

a) Wildschweine haben für Säugetiere eine sehr hohe Vermehrungsrate von mindestens 600 % bezogen auf die weiblichen Stücke der Ausgangspopulation. Dies berücksichtigt bereits die Entnahme durch Krankheiten, Wildunfälle und Jagd.

Gehen wir vereinfachend davon aus, dass nur weibliche Stücke gefrischt (geboren) werden.

Wenn wir eine Rotte mit 10 Bachen haben, wie viele Tiere (Bachen, Keiler, Überläufer) haben wir nach 1, 3, 5, 7 Jahren, wenn einmal im Jahr gerauscht (fortgepflanzt) wird, also nur eine Generation pro Jahr? ??

b) Durch Verlust der Leitbache und/oder sog. Mastjahre (verstärkt durch den intensiven Anbau von Biogasmais) rauscht es bis zu 3 Mal im Jahr. Auch Überläuferbachen („Teenager“) können beschlagen werden und frischen.

Was ändert sich nun? Wie viele Tiere sind es nach 1, 3, 5, 7 Jahren? ??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Erläuterung 13.2: Eigenschaften von Folgen

Für Folgen sind eine Reihe von Eigenschaften definiert:

- **Beschränktheit:** Eine Zahlenfolge (a_n) ist beschränkt, wenn es eine obere und eine untere Schranke für die Folge gibt. Das bedeutet:
  - Die Folge (a_n) ist *nach oben beschränkt*, wenn es eine Zahl M gibt, sodass für alle n gilt: $a_n \leq M$.
  - Die Folge (a_n) ist *nach unten beschränkt*, wenn es eine Zahl m gibt, sodass für alle n gilt: $a_n \geq m$.

  Wenn eine Folge sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist, nennen wir sie *beschränkt*.
- **Minimum:** Das Minimum einer Zahlenfolge ist das kleinste Element der Folge. Wenn (a_n) eine endliche Folge ist und a_{n0} das kleinste Element ist, dann gilt:

  a_{n0} ist das Minimum der Folge, wenn für alle n gilt: $a_n \geq a_{n0}$.

  Unendliche Folgen haben möglicherweise kein Minimum, selbst dann, wenn sie nach unten beschränkt sind.
- **Infimum:** Das Infimum einer Zahlenfolge (a_n) ist die größte Zahl, die eine untere Schranke der Folge ist. Es ist der „größte Wert“, den man nie unterschreiten kann, der aber nicht unbedingt von der Folge erreicht wird.
- **Maximum:** Das Maximum einer Zahlenfolge (a_n) ist das größte Element der Folge. Wenn (a_n) eine endliche Folge ist und a_{n1} das größte Element ist, dann gilt:

  a_{n1} ist das Maximum der Folge, wenn für alle n gilt: $a_n \leq a_{n1}$.

  Wie beim Minimum gilt, dass für unendliche Folgen nicht immer ein Maximum existieren muss.
- **Supremum:** Das Supremum einer Zahlenfolge (a_n) ist die kleinste Zahl, die eine obere Schranke der Folge ist. Es ist der „kleinste Wert“, den man nicht überschreiten kann, aber nicht unbedingt von der Folge erreicht wird.

Beispiel 13.3: Beschränktheit

Die endliche Folge $(a_n) = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ ist sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt.

$\min(a_n) = \inf(a_n) = \frac{1}{5}$; $\max(a_n) = \sup(a_n) = 1$

Die unendliche Folge $(a_n) = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ ist sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt.

$\max(a_n) = \sup(a_n) = 1$; $\inf(a_n) = 0$; die Folge hat kein Minimum, da $0 \notin (a_n)$.

Erläuterung 13.3: Monotonie

Eine Zahlenfolge (a_n) ist *monoton wachsend* (oder *monoton steigend*), wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_{n+1} \geq a_n$.

Das bedeutet, dass jeder Folgewert mindestens so groß wie der vorherige Wert ist. Die Folge kann gleich bleiben oder steigen, aber sie fällt nie.

Wenn die Ungleichung streng ist $(a_{n+1} > a_n)$, dann spricht man von *streng monoton wachsend*.

Eine Zahlenfolge (a_n) ist *monoton fallend*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_{n+1} \leq a_n$.

Das bedeutet, dass jeder Folgewert höchstens so groß wie der vorherige Wert ist. Die Folge kann gleich bleiben oder fallen, aber sie steigt nie.

Wenn die Ungleichung streng ist $(a_{n+1} < a_n)$, dann spricht man von *streng monoton fallend*.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Erläuterung 13.4: Konvergenz und Divergenz

Eine Zahlenfolge (a_n) ist *konvergent*, wenn sie sich einem bestimmten Grenzwert L annähert, wenn n gegen Unendlich geht: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

Das bedeutet, dass für jede noch so kleine positive Zahl ε eine natürliche Zahl N existiert, sodass für alle $n \geq N$ gilt: $|\, a_n - L \,| < \varepsilon$.

Eine Zahlenfolge, die nicht konvergiert, nennt man *divergent*. Es gibt verschiedene Arten der Divergenz:

- Wenn $L = -\infty$ oder $L = +\infty$ ist, nennt man die Folge (a_n) *bestimmt divergent*.
- Wenn sich kein Grenzwert feststellen lässt, nennt man die Folge *unbestimmt divergent*.

Beispiel 13.4: Konvergenz und Divergenz

Die Folge $(a_n) = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ ist konvergent: $L = 0$.

Die Folge $(a_n) = +\frac{1}{1}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$ ist konvergent: $L = 0$.

Die Folge $(a_n) = n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ ist bestimmt divergent: $L = +\infty$.

Die Folge $(a_n) = (-1)^n = -1, 1, -1, 1, \ldots$ ist unbestimmt divergent.

Erläuterung 13.5: Häufungspunkte

Wenn sich in einer unendlichen Folge unendlich viele Folgenglieder finden lassen (*Teilfolge*), die eine konvergente Teilfolge bilden, dann nennt man den Grenzwert dieser konvergenten Teilfolge einen *Häufungspunkt*.

Beispiel 13.5: Häufungspunkte

Die Folge $(a_n) = (-1)^n = -1, 1, -1, 1, \ldots$ hat die beiden Häufungspunkte -1 und $+1$.

Die Folge $(a_n) = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{4}{1}, \ldots$ hat einen Häufungspunkt bei 0.

Übungsaufgabe 13.4: Beschränktheit, Monotonie, Häufungspunkte, Konvergenz

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Beschränktheit, Monotonie, Häufungspunkte und Konvergenz, und geben Sie ggf. Minimum / Infimun und Maximum / Supremum an.

a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot n} \to ??$

b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1)^n \cdot \frac{3 \cdot n^2 + 5}{2 \cdot n^2} \to ??$

c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1)^n \cdot \frac{5 \cdot n^2}{n^2 + 7 \cdot n + 8} \to ??$

d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{6 \cdot n^2 + 13 \cdot n}{5 \cdot n^3 + 7} \to ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

13.2. Reihen

Übungsaufgabe 13.5: Reihen

Eine häufige Anwendung von Reihen ist die Reihenentwicklung. Jede Zahl oder Funktion lässt sich in eine Reihe aus anderen Zahlen oder Funktionen entwickeln. Es gibt hier eine Reihe typischer Entwicklungstechniken, die Sie im Studium lernen werden.
Hier ein paar erste Fingerübungen, um mit dem Instrument Reihe vertraut zu werden:

a) Entwickeln Sie die Zahl 81.000 in eine Summendarstellung im Dezimalsystem.

??

b) Entwickeln Sie die Zahl 32 in eine Summendarstellung im Binärsystem.

??

c) Entwickeln Sie die Zahl 365 in eine Summendarstellung im Zweiersystem/Binärsystem.

??

d) Eine sehr wichtige Reihenentwicklung ist die Fourier-Entwicklung oder Fourier-Transformation. Mit ihr wird eine Funktion des Zeitbereichs $f(t)$ in eine Funktion des Frequenzbereichs $f_f(f)$ transformiert. Überlegen Sie, welche Frequenzen würden Sie mit welcher Amplitude erwarten für folgendes Pulssignal:

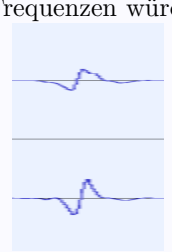


Abbildung 13.1.: hoher Puls, 2-Kanal-Aufnahme, $2\,s$ Dauer, gespreizte Darstellung

??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

14. Funktionen

14.1. Typische Fragestellungen

Erläuterung 14.1: Kurvendiskussion

Vielleicht denken Sie, den Graph einer Funktion, den plottet doch der Rechner. Jain.

Zum einen kann es bei einfachen Programmen aufgrund von Definitionsbereichen und/oder numerischen Problemen zu Fehlern kommen. Auch Programmeigenheiten („*it's not a bug, it's a feature*“) können wie z. B. bei Excel zu unerwarteten Ergebnissen führen. Excel z. B. macht bei vielen Gelegenheiten intern ein eigenes Koordinatensystem auf und rechnet mit diesem weiter. Auch bei Programmen wie LTspice, das gerne in der Elektrotechnik genutzt wird, muss man wissen, wo die relevanten Punkte sind, um die Plotparamter richtig zu setzen. Sonst übersieht man schnell die Eigenfrequenz einer Schaltung und wundert sich, warum die Polizei vor der Tür steht. Ein Verstoß gegen EMV oder Amateurfunkgesetze können auch strafrechtliche Folgen haben. Als Ingenieur[14.1] können Sie sich nicht auf Unwissenheit berufen.
Zum anderen interessiert oft nicht die reinen Funktionswerte, sondern bestimmte Eigenschaften. Diese schnell zu erkennen, das sollten Sie als Ingenieur[14.1] trainiert haben.

Es ergibt sich eine kleine Checkliste, die Sie nutzen sollten, bis Sie selbst genügend Erfahrung gesammelt haben, um eine Funktion ohne Hilfsmittel hinsichtlich ihrer Eigenschaften einzuschätzen:

1. In welchem Bereich ist die Funktion überhaupt definiert?
2. Ist eine Symmetrie erkennbar? Besonders interessant sind die Y-Achse, auch die Winkelhalbierende, ggf. auch die X-Achse
3. Gibt es Nullstellen? Wieviele und wo?
4. Gibt es Asymptoten?
5. Gibt es lokale oder globale Maxima bzw. Minima?
6. Gibt es Sattel- oder Umkehrpunkte?
7. Skizzieren Sie mit o. g. Informationen den Graphen.

Anhand der vorgenannten Eigenschaften lässt sich das Verhalten einer Funktion gut beschreiben, was meist ausreicht oder besser ist, als der reine Funktionsplot. Entsprechend sind nachfolgend die Übungen aufgebaut. In der Literatur bzw. im Netz finden Sie hierzu mehr unter dem Begriff *Kurvendiskussion.*
Sofern nicht anders angegeben, ist der maximale Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

Übungsaufgabe 14.1: Potenzen und Wurzeln v1

Geben Sie den Definitionsbereich an. Skizzieren sie jeweils den Graphen und sofern eine Umkehrfunktion vorhanden ist, auch diese:

a) $f(x) = x^{7/3} \longrightarrow$??

b) $f(x) = 7x^7 + 14x^5 \longrightarrow$??

c) $f(x) = x^x \longrightarrow$??

Hier geht es zur Musterlösung.

[14.1] Die grammatikalische Grundform steht hier für alle Geschlechter, in Anlehnung an die Empfehlung der Rechtschreibkommission

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Übungsaufgabe 14.2: Polynome

Gehen Sie nach der o.g. Checkliste vor:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4x \longrightarrow ??$

b) $f(x) = x^4 - 50x^2 + 625 \longrightarrow ??$

c) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1 \longrightarrow ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 14.3: Polynome II

Gegen Sie nach o.g. Checkliste vor:

a) $f(x) = 64x^3 - 1344x + 1280 \longrightarrow ??$

b) $f(x) = x^7 + 9x^6 - 94x^5 - 724x^4 + 3432x^3 + 14272x^2 - 53760x + 36864 \longrightarrow ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 14.4: gebrochen rationale Funktionen

Gehen Sie nach der o.g. Checkliste vor:

a) $f(x) = \dfrac{(x+5)^4}{(x-5)(x+1)} \longrightarrow ??$

b) $f(x) = \dfrac{(x^2-1)}{(x^2+1)} \longrightarrow ??$

c) $f(x) = \dfrac{((x+1)^2+3)^2}{((x+1)^7+4)} \longrightarrow ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 14.5: Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion

Gehen Sie nach der o.g. Checkliste vor:

a) $f(x) = e^{(x^2-2x+1)} \longrightarrow ??$

b) $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 1) \longrightarrow ??$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x^2} \longrightarrow ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 14.6: Trigonometrische Funktionen

Gehen Sie nach der o. g. Checkliste vor:

a) $f(x) = \sin^2(x^2) \longrightarrow ??$

b) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)} \longrightarrow ??$

c) $f(x) = \cos^5(x) \longrightarrow ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Übungsaufgabe 14.7: Betragsfunktion

Gehen Sie nach der o.g. Checkliste vor:
a) $f(x) = |x^3 - 5| \longrightarrow$??

Hier geht es zur Musterlösung.

Erläuterung 14.2: Polarkoordinaten

Polarkoordinaten sind ein zweidimensionales Koordinatensystem, bei dem jeder Punkt durch einen Winkel φ (Bezug: Horizontaler Strahl vom Ursprung nach rechts) und einen Abstand vom Ursprung ϱ beschrieben wird.

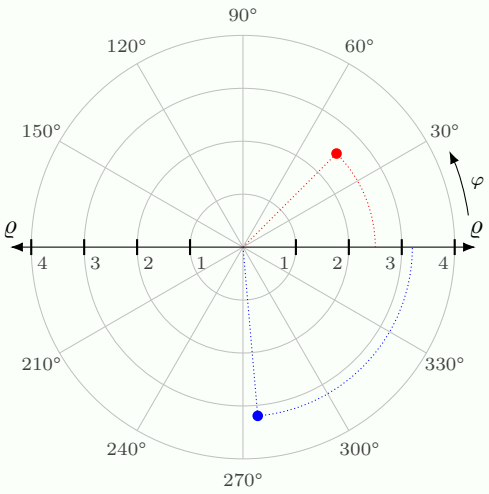
Polarkoordinaten sind besonders nützlich für die Beschreibung von Kreisbewegungen und Spiralen, da sie die Symmetrie dieser Formen direkt widerspiegeln. Man verwendet sie besonders vorteilhaft in Anwendungen wie z. B. der Navigation oder der Physik der Drehbewegungen, weil dort Winkel und Entfernungen von zentraler Bedeutung sind. Kartesische Koordinaten hingegen sind oft einfacher für algebraische Manipulationen und die Lösung linearer Probleme.

Im Gegensatz dazu verwenden kartesische Koordinaten zwei senkrechte Achsen (x und y), um die Position eines Punktes zu bestimmen.

Ein Punkt in Polarkoordinaten wird durch (ϱ, φ) angegeben, wobei ϱ der *Radius* und φ der *Winkel* oder das *Argument* sind. In kartesischen Koordinaten wird derselbe Punkt durch (x, y) dargestellt. In den Abbildungen unten sind je zwei Punkte in Polar- und kartesischen Koordinaten dargestellt.

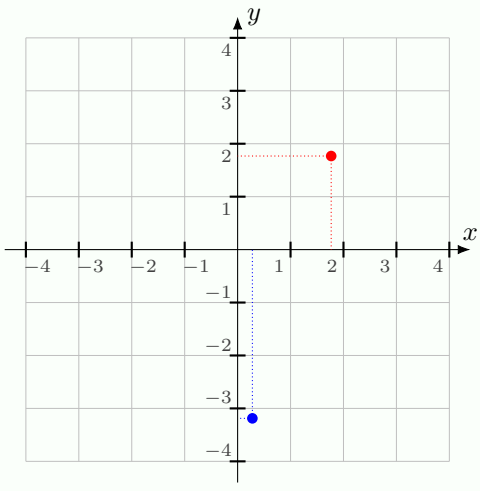
Um von Polarkoordinaten zu kartesischen Koordinaten zu wechseln, verwendet man die Umrechnungsformeln:

$$x = \varrho * \cos(\varphi)$$
$$y = \varrho * \sin(\varphi)$$



- $\varrho = 2{,}5;\ \varphi = 45° \approx 0{,}785$
- $\varrho = 3{,}2;\ \varphi = 275° \approx 4{,}800$

Abbildung 14.1.: Ein Polarkoordinaten-Netz mit zwei eingezeichneten Punkten



- $x = 2{,}5 \cdot \cos(45°) \approx 1{,}768;\ y = 2{,}5 \cdot \sin(45°) \approx 1{,}768$
- $x = 3{,}2 \cdot \cos(275°) \approx 0{,}279;\ y = 3{,}2 \cdot \sin(275°) \approx -3{,}188$

Abbildung 14.2.: Ein kartesisches Koordinaten-Netz mit zwei eingezeichneten Punkten

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Erläuterung 14.3: Funktionen in Polarkoordinaten

Funktionen in Polarkoordinaten werden üblicherweise so dargestellt, dass der Radius eine Funktion des Winkels ist:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \varphi \mapsto \varrho = f(\varphi)$$

In Abb. 14.3 und 14.4 sind vier verschiedene Funktionen jeweils in Polar- und in kartesischen Koordinaten dargestellt.

Man erkennt, dass sich diese Darstellungen jeweils deutlich unterscheiden.

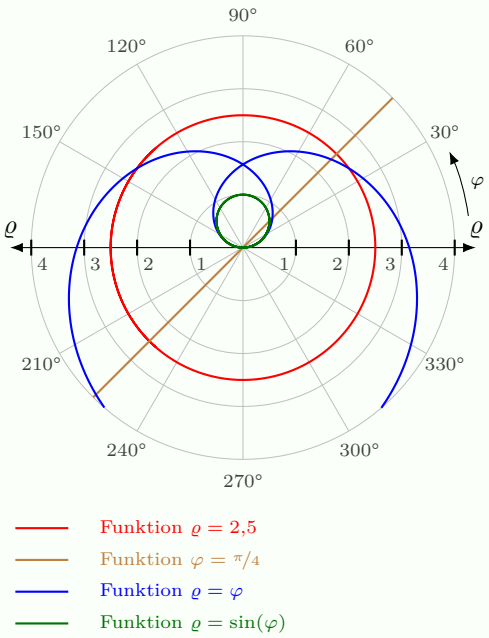


Abbildung 14.3.: Vier Funktionen in Polarkoordinaten

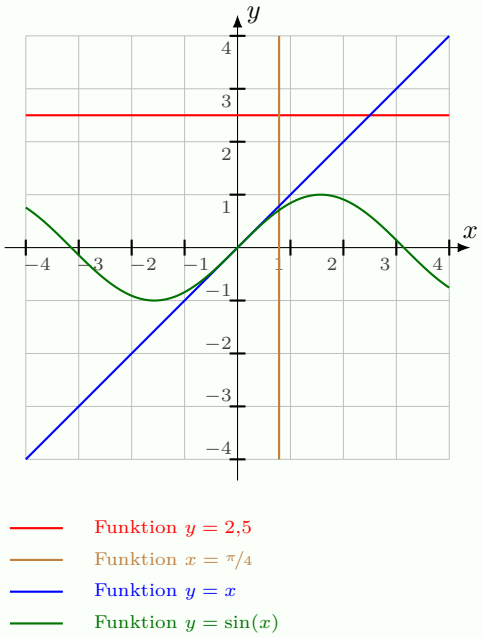


Abbildung 14.4.: Vier Funktionen in kartesischen Koordinaten

Übungsaufgabe 14.8: Polarkoordinaten

Grundsätzlich gelten die vorgenannten Betrachtungen. In der Übung liegt aber der Fokus auf der Visualisierung.

a) $f(\varphi) = \varphi^2 \longrightarrow$??

b) $f(\varphi) = (\varphi + 5)^4 \longrightarrow$??

c) $f(\varphi) = \ln(\varphi^\varphi) \longrightarrow$??

Hier geht es zur Musterlösung.

https://sos-mathe.ch/

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

15. Grundzüge der Differentialrechnung

Erläuterung 15.1: Erste Ableitung einer Funktion

Voraussetzungen für die Existenz der *ersten Ableitung einer Funktion* $f(x)$ *an der Stelle* x_0:

- $f(x_0)$ muss in einer ε-*Umgebung* von x_0 definiert sein.
- $f(x)$ muss an der Stelle x_0 *stetig* sein, d. h. es muss gelten: $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0)$.

Unter der *ersten Ableitung einer Funktion* $f(x)$ *an der Stelle* x_0 versteht man das Ermitteln der Steigung m der Tangente $y = m \cdot x_0 + b$ an den Graphen der Funktion, wobei die Tangente die Funktion $f(x)$ im Punkt $\big(x_0, f(x_0)\big) = \big(x_0, m \cdot x_0 + b\big)$ berührt. Die Berechnung erfolgt mit Hilfe des *Differenzenquotienten*:

$$f'(x_0) := \lim_{x\to x_0} \frac{\mathrm{d}\, f(x)}{\mathrm{d}\, x} := \lim_{\varepsilon\to x_0} \frac{f(x_0+\varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon} \qquad \left(= \lim_{\varepsilon\to x_0} \frac{f(x_0-\varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}\right)$$

Unter der *Ableitungsfunktion zu einer Funktion* $f(x)$ oder einfacher *Ableitung einer Funktion* $f(x)$ versteht man eine Formel, mit der man die ersten Ableitungen der Funktion $f(x)$ an allen Stellen $x_0 \in I$ eines Intervalls $I \subseteq \mathbb{R}$ berechnen kann:

$$f'(x) := \frac{\mathrm{d}\, f(x)}{\mathrm{d}\, x} := \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} \qquad \left(= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x-\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}\right)$$

Anmerkung: Die Grenzwerte in den Klammern ($f(x$ minus $\varepsilon)$ anstatt $f(x$ plus $\varepsilon)$ folgen aus den eingangs formulierten Voraussetzungen.

Beispiel 15.1: Stetigkeit

Untersuchen Sie diese Funktion auf Stetigkeit:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{für } x < 1 \\ -x \cdot (x-3) & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

Eine erste Skizze (siehe rechts) begründet die Vermutung, dass die gegebene Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sein könnte.

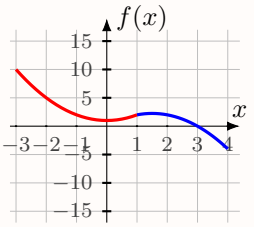


Abbildung 15.1.: Zur Stetigkeit

Prüfen wir es nach:

1. Die beiden stückweise definierenden Funktionen sind Polynomfunktionen auf $\mathbb{R}$; Polynomfunktionen sind stetig.

   Also bleibt die Untersuchung an der möglicherweise kritischen Stelle $x = 1$.
2. $f(x)$ muss bei $x_0 = 1$ definiert sein. Das ist hier der Fall: $f(1) = -1 \cdot (1-3) = 2$.
3. Linksseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x\to 1^-} (x^2 + 1) = 2$.
4. Rechtsseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x\to 1^+} \big(-x \cdot (x-3)\big) = 2$.

Also gilt: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 2 \to f(x)$ ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Übungsaufgabe 15.1: Stetigkeit

a) Untersuche die Funktion $f(x) = |\,x\,|$ auf Stetigkeit $\rightarrow$??

b) Überprüfe, ob diese Funktion stetig ist: $f(x) = \begin{cases} x^2/3 & \text{für } x \in]-\infty, 0[\\ -x^2 + (x-1)\cdot \ln\big(|\,x\,|+1\big) + 1/3 & \text{für } x \in [0,1] \\ -1 & \text{für } x \in]1, \infty[\end{cases} \rightarrow$??

c) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion stetig: $f(x) = \begin{cases} 8\cdot a + 16\cdot x & x < 2 \\ a^2\cdot(x+2) & x \geq 2 \end{cases} \rightarrow$??

d) Für welche $k \in \mathbb{N}$ ist die Funktion stetig: $f(x) = \begin{cases} 1/k \cdot \mathrm{e}^{\frac{6\cdot x}{\pi}-1} & 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \\ \sin^2(x) & \frac{\pi}{6} \geq x \leq \pi \end{cases} \rightarrow$??

e) Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ ist die folgende Funktion stetig? $f(x) = \begin{cases} a\cdot x^2 + b & x \geq 1 \\ x & x < 1 \end{cases} \rightarrow$??

Die nachfolgenden Aufgaben können Sie ohne Kenntnis der Regel von de l'Hospital vermutlich nicht lösen.

f) Untersuche die Funktion auf Stetigkeit $(x > 0)$: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x-1} & \text{für } x \neq 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases} \rightarrow$??

g) Untersuche die folgende Funktion auf Stetigkeit: $f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{für } x \leq \pi \\ \dfrac{\sin(x)}{x-\pi} & \text{für } x > \pi \end{cases} \rightarrow$??

Hier geht es zur Musterlösung.

Beispiel 15.2: Erste Ableitung einer Funktion

Beispiel 1: $f(x) = x^2$; $\quad f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}\,f(x)}{\mathrm{d}\,x} = \dfrac{\mathrm{d}\,x^2}{\mathrm{d}\,x} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{(x+\varepsilon)^2 - x^2}{\varepsilon} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{x^2 + 2\cdot x\cdot\varepsilon + \varepsilon^2 - x^2}{\varepsilon}$

$= \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{2\cdot x\cdot\varepsilon + \varepsilon^2}{\varepsilon} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} 2\cdot x + \varepsilon = 2\cdot x$

Beispiel 2: $f(x) = \sin(x)$; $\quad f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}\,f(x)}{\mathrm{d}\,x} = \dfrac{\mathrm{d}\,\sin(x)}{\mathrm{d}\,x} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\sin(x+\varepsilon) - \sin(x)}{\varepsilon}$

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\sin(x)\cdot\cos(\varepsilon) + \cos(x)\cdot\sin(\varepsilon) - \sin(x)}{\varepsilon} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\sin(x)\cdot\big(\cos(\varepsilon) - 1\big) + \cos(x)\cdot\sin(\varepsilon)}{\varepsilon}$

$= \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \sin(x)\cdot\dfrac{\cos(\varepsilon)-1}{\varepsilon} + \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \cos(x)\cdot\dfrac{\sin(\varepsilon)}{\varepsilon} = \sin(x)\cdot 0 + \cos(x)\cdot 1 = \cos(x)$

Bemerkung: Hierbei haben wir Gebrauch gemacht von den Grenzwerten $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\cos(\varepsilon)-1}{\varepsilon} = 0$ und $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\sin(\varepsilon)}{\varepsilon} = 1$. Diese Rechnung geschieht unter Zuhilfenahme des Satzes von De L'Hospital (siehe weiter unten).

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Übungsaufgabe 15.2: Ableitungen der Elementarfunktionen

Bestimmen Sie die erste Ableitung von:

a) $f(x) = x^2 \to ??$

b) $f(x) = x^3 \to ??$

c) $f(x) = x^4 \to ??$

d) $f(x) = \sqrt{x} \to ??$

e) $f(x) = \frac{1}{x} \to ??$

f) $f(x) = \ln(x) \to ??$

g) $f(x) = e^x \to ??$

h) $f(x) = \sin(x) \to ??$

i) $f(x) = \cos(x) \to ??$

j) $f(x) = \tan(x) \to ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 15.3: Steigungen der Elementarfunktionen v1

a) Berechnen Sie die Steigung der Funktion $f(x) = 42$ im Punkt $x_0 = 5$. $\to ??$

b) Berechnen Sie die Steigung der Funktion $f(x) = x^3$ im Punkt $x_0 = 4$. $\to ??$

c) Berechnen Sie die Steigung der Funktion $f(x) = \mathrm{e}^x$ im Punkt $x_0 = 0$ und im Punkt $x_1 = 1$. $\to ??$

d) Berechnen Sie die Steigung der Funktion $f(x) = 3 \cdot \sqrt{x}$ im Punkt $x_0 = 1$ $\to ??$

e) Berechnen Sie die Steigung der Funktion $f(x) = \sin(x)$ im Punkt $x_0 = 0$ und im Punkt $x_1 = \pi$. $\to ??$

f) Berechnen Sie die Steigung der Funktion $f(x) = 10^x$ im Punkt $x_0 = 3$. $\to ??$

g) Berechnen Sie die Steigung der Funktion $f(x) = \ln(6)$ im Punkt $x_0 = 2$. $\to ??$

h) Berechnen Sie die Steigung der Funktion $f(x) = \ln(x)$ im Punkt $x_0 = 0{,}1$. $\to ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

Erläuterung 15.2: Rechenregeln der Differentialrechnung: Linearität: Summenregel; Produktregel

Ableiten ist eine *lineare mathematische Operation*, d. h. es gelten die Regeln:

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, \alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, f(x) \qquad (\alpha \in \mathbb{C})$

  Hierfür schreibt man oft abgekürzt $\big(u$ steht für $u(x) \to f(x)\big)$: $\boldsymbol{(\alpha \cdot u)' = \alpha \cdot u'}$.

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \big(\alpha \cdot f(x) \pm \beta \cdot g(x)\big) = \alpha \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, f(x) \pm \beta \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, g(x) \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{C})$

  Hierfür schreibt man oft abgekürzt: $\boldsymbol{(\alpha \cdot u \pm \beta \cdot v)' = \alpha \cdot u' \pm \beta \cdot v'}$.

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, f(x)\right) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, g(x)$

  Hierfür schreibt man oft abgekürzt: $\boldsymbol{(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'}$.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Beispiel 15.3: Rechenregeln der Differentialrechnung: Linearität: Summenregel; Produktregel

Beispiel 1: $f(x) = 5 \cdot \sin(x) \qquad f'(x) = 5 \cdot \cos(x)$

Beispiel 2: $f(x) = 3 \cdot \cos(x) - 4 \cdot \mathrm{e}^x \qquad f'(x) = -3 \cdot \sin(x) - 4 \cdot \mathrm{e}^x$

Beispiel 3: $f(x) = 42 \cdot \sin(x) \cdot \ln(x) \qquad u = \sin(x) \to u' = \cos(x) \qquad v = \ln(x) \to v' = 1/x$

$\to \big(42 \cdot \sin(x) \cdot \ln(x)\big)' = 42 \cdot (\cos(x) \cdot \ln(x) + \sin(x) \cdot 1/x)$

Übungsaufgabe 15.4: Summen- und Produktregel

Berechnen Sie jeweils die erste Ableitung allgemein und an der Stelle x_0:

a) $10 \cdot x^2;\ x_0 = 3 \ \to$??

b) $6 \cdot \mathrm{e}^x;\ x_0 = 0 \ \to$??

c) $-2 \cdot x^3 - 30 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 2;\ x_0 = 1 \to$??

d) $4 \cdot x^3 - 60 \cdot x^2 - 132 \cdot x - 12;\ x_0 = -1 \to$??

e) $2 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 2;\ x_0 = -2 \to$??

f) $7 + 7{,}5 \cdot x^8 - 40 \cdot x^{7{,}5} + x/0{,}2;\ x_0 = 25 \to$??

g) $-512/x + 4/5 \cdot x^{5/4} + 96 \cdot \sqrt{x};\ x_0 = 16 \to$??

h) $20 \cdot x^3 \cdot \ln(x);\ x_0 = 1 \to$??

i) $20 \cdot \mathrm{e}^x \cdot \ln(x);\ x_0 = 2 \to$??

j) $1/\ln(4) \cdot 4^x \cdot \ln(x);\ x_0 = 1 \to$??

k) $\ln(5) \cdot \log_5(x) \cdot \mathrm{e}^x;\ x_0 = 0{,}2 \to$??

l) $x^{4{,}5} \cdot \mathrm{e}^x \cdot \sqrt{x};\ x_0 = 0{,}25 \to$??Hier geht es zu Lösungshinweisen.

m) $x^{5{,}5} \cdot \mathrm{e}^x \cdot \sqrt{x};\ x_0 = \to$??Hier geht es zu Lösungshinweisen.

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 15.5: Summen- und Produktregel [OpenAI2024p]

Bilden Sie jeweils die erste Ableitung:

a) Bestimme die Ableitung von $f(x) = 3x^2 + 5x - 4$. ??

b) Bestimme die Ableitung von $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$. ??

c) Bestimme die Ableitung von $f(x) = (2x + 3)(x^2 - 1)$. ??

d) Bestimme die Ableitung von $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 - 4x)$. ??

e) Bestimme die Ableitung von $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x - 7$. ??

f) Bestimme die Ableitung von $f(x) = (x^4 - 3x^2)(x^2 + 1)$. ??

g) Bestimme die Ableitung von $f(x) = 4x^2 - 6x + 9$. ??

h) Bestimme die Ableitung von $f(x) = (3x + 2)(2x^2 - x + 1)$. ??

i) Bestimme die Ableitung von $f(x) = (x^2 - 2x + 1)(x^3 + x - 4)$. ??

j) Bestimme die Ableitung von $f(x) = 2x^5 - 4x^3 + x - 8$. ??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Erläuterung 15.3: Rechenregeln der Differentialrechnung: Quotienten- und Reziprokenregel

Für die Ableitung des Quotienten zweier Funktionen gilt:

- $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\,\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\,f(x)\right)\cdot g(x) - f(x)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\,g(x)}{g^2(x)}$$

  Hierfür schreibt man oft abgekürzt: $$\boldsymbol{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}}.$$

- Mit $f(x) = 1$ bzw. $u = 1$ folgt hieraus unmittelbar die Reziprokenregel:

  $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\,\frac{1}{f(x)} = \frac{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\,f(x)}{f^2(x)}$$

  Hierfür schreibt man oft abgekürzt: $$\boldsymbol{\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}}.$$

Beispiel 15.4: Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1

Beispiel 1: $f(x) = \frac{x^7}{x^4}$ $\quad u = x^7 \to u' = 7\cdot x^6 \quad v = x^4 \to v' = 4\cdot x^3 \to v^2 = x^8$

$$\to \left(\frac{x^7}{x^4}\right)' = \frac{7\cdot x^6\cdot x^4 - x^7\cdot 4\cdot x^3}{x^8} = \frac{7\cdot x^{10} - 4\cdot x^{10}}{x^8} = 3\cdot x^2$$

Dieses Ergebnis hätte man natürlich einfacher haben können: ${}^{x^7}/_{x^4} = x^3$ ...

Beispiel 2: $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$ $\quad u = \ln(x) \to u' = \frac{1}{x} \to u^2 = \ln^2(x)$

$$\to \left(\frac{1}{\ln(x)}\right)' = \frac{{}^{-1}/_{x}}{\ln^2(x)} = -\frac{1}{x\cdot\ln^2(x)}$$

Übungsaufgabe 15.6: Quotienten- und Reziprokenregel

Lösen Sie mit Hilfe der Quotientenregel:

a) $f(x) = {}^{x^3}/_{x^2} \to$??

b) $f(x) = {}^{\ln(x)}/_{x^2} \to$??

c) $f(x) = {}^{\mathrm{e}^x}/_{\sqrt{x}} \to$??

d) $f(x) = {}^{1}/_{\mathrm{e}^x} \to$??

e) $f(x) = {}^{x^2}/_{\ln(x)} \to$??

f) $f(x) = {}^{4\cdot x^2}/_{\sqrt[4]{x}} \to$??

g) $f(x) = {}^{10\cdot\mathrm{e}^x}/_{\sqrt{x}} \to$??

h) $f(x) = {}^{4\cdot x^3+6\cdot x^2}/_{\ln(x)} \to$??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Erläuterung 15.4: Rechenregeln der Differentialrechnung: Kettenregel

Für die Ableitung der Hintereinanderausführung (= Verkettung) zweier Funktionen $f\big(g(x)\big)$ gilt die Kettenregel:

- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\Big(f\big(g(x)\big)\Big) = \Big(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\,f\big(g(x)\big)\Big) \cdot \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\,g(x)$

  Hierfür schreibt man oft abgekürzt: $\big(\boldsymbol{u(v)}\big)' = \boldsymbol{u'(v) \cdot v'}.$

Beispiel 15.5: Rechenregeln der Differentialrechnung: Kettenregel

Beispiel 1: $f(x) = \mathrm{e}^{2\cdot x}$ $\quad u = \mathrm{e}^x \to u' = \mathrm{e}^x$ $\quad v = 2\cdot x \to v' = 2$ $\quad \to \quad \big(\mathrm{e}^{2\cdot x}\big)' = \mathrm{e}^{2\cdot x}\cdot 2$

Beispiel 2: $f(x) = \sin\big(\ln(x)\big)$ $\quad u = \sin(x) \to u' = \cos(x)$ $\quad v = \ln(x) \to v' = 1/x$

$$\to \Big(\sin\big(\ln(x)\big)\Big)' = \cos\big(\ln(x)\big)\cdot\frac{1}{x} = \frac{\cos\big(\ln(x)\big)}{x}$$

Übungsaufgabe 15.7: Kettenregel

Bestimmen Sie jeweils die ersten Ableitungen.

a) $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x) \to$??

b) $f(x) = \sin(x^2) \to$??

c) $f(x) = \mathrm{e}^{\cos(x)} \to$??

d) $\sqrt{\sin(x)} \to$??

e) $\ln\big(\sqrt{\mathrm{e}^x}\big) \to$??

f) Bestimme die Ableitung von $f(x) = (3x+2)^2$. ??

g) Bestimme die Ableitung von $f(x) = \sqrt{5x^2+4x}$. ??

h) Bestimme die Ableitung von $f(x) = \sin(4x^3+2x)$. ??

i) Bestimme die Ableitung von $f(x) = \ln(7x^4-3x^2+x)$. ??

j) Bestimme die Ableitung von $f(x) = e^{2x^3-x^2+4x}$. ??

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 15.8: Kettenregel

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 15.9: Differentialrechnung – gemischte Aufgaben –

Bilden Sie jeweils die Ableitungen:

a) $f(x) = x\cdot\sin(x^2) \longrightarrow$??

b) $f(x) = \sin\big(\cos(x)\big) \longrightarrow$??

c) $f(x) = x^{10}+x^5-x^7-\mathrm{e}^{\frac{\sin(y)}{\cos^2(y)}} \longrightarrow$??

d) $\dfrac{\mathrm{d}^7\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{d}\,x^7} \longrightarrow$??

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

e) $\mathrm{d}\,\dfrac{\dfrac{\mathrm{e}^{y}}{\sin(y)}}{\sqrt{\dfrac{\cos(y^3)}{\arctan(y)}}}\,\Big/\,\mathrm{d}\,x \longrightarrow$??

f) $f(x) = (x^{2/3} \cdot \sin(x) + x^{x}) \longrightarrow$??

g) $\dfrac{\mathrm{d}^4 \sin(x)}{\mathrm{d}\,x^4} \longrightarrow$??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

16. Grundzüge der Integralrechnung

Erläuterung 16.1: Grundsätzliches zur Integralrechnung

Eine Funktion F heißt *Stammfunktion* von f, wenn gilt:

$$F'(x) = f(x)$$

Damit gilt für das *unbestimmte Integral* $\int$:

$$\int f(x) \cdot \mathrm{d}\,x = \int F'(x) \cdot \mathrm{d}\,x = F(x) + C$$

mit einer beliebigen Konstanten $C \in \mathbb{R}$.

Beispiel 16.1: Grundsätzliches zur Integralrechnung

Wir kennen $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\, x^3 = 3 \cdot x^2$. Liest man dies von rechts nach links, multipliziert es mit $\mathrm{d}\,x/3$ und integriert auf beiden Seiten, ergibt sich:

$$\int 3 \cdot x^2 \cdot \frac{\mathrm{d}\,x}{3} = \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\, x^3 \cdot \frac{\mathrm{d}\,x}{3} \quad \leftrightarrow \quad \int x^2 \cdot \mathrm{d}\,x = \int \frac{1}{3} \cdot \mathrm{d}\,x^3 = \frac{x^3}{3} + C,$$

womit wir eine Stammfunktion von $f(x) = x^2$ gefunden haben.

Probe: Die Ableitung der Stammfunktion muss wieder die Ausgangsfunktion ergeben!

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = \frac{3 \cdot x^2}{3} + 0 = x^2$$

Erläuterung 16.2: Unbestimmte Integrale der Elementarfunktionen, Rechenregeln

Nach dem musterhaften Vorgehen des letzten Beispiels 16.1 erhält man eine erste Tabelle der Stammfunktionen:

Funktion	Stammfunktion	Funktion	Stammfunktion
$f(x) = c$	$\int c \cdot \mathrm{d}\,x = c \cdot x + C$	$f(x) = x$	$\int x \cdot \mathrm{d}\,x = \dfrac{x^2}{2} + C$
$f(x) = x^n$	$\int x^n \cdot \mathrm{d}\,x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\int \dfrac{1}{x} \cdot \mathrm{d}\,x = \ln\big(\lvert x \rvert\big) + C$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$\int \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{d}\,x = \mathrm{e}^x + C$	$f(x) = a^x$	$\int a^x \cdot \mathrm{d}\,x = \dfrac{a^x}{\ln(a)} + C$
$f(x) = \sin(x)$	$\int \sin(x) \cdot \mathrm{d}\,x = -\cos(x) + C$	$f(x) = \cos(x)$	$\int \cos(x) \cdot \mathrm{d}\,x = \sin(x) + C$

Da das Integrieren – genauso wie das Differenzieren – eine *lineare mathematische Operation* ist, gilt auch hier der *Linearitätssatz*:

$$\int \big(\alpha \cdot f(x) \pm \beta \cdot g(x)\big) \cdot \mathrm{d}\,x = \alpha \cdot \int f(x) \cdot \mathrm{d}\,x \pm \beta \cdot \int g(x) \cdot \mathrm{d}\,x \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Beispiel 16.2: Unbestimmte Integrale der Elementarfunktionen, Rechenregeln

Beispiel: $\int \big(3 \cdot \mathrm{e}^x - 12 \cdot \sin(x)\big) \cdot \mathrm{d}\,x = 3 \cdot \int \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{d}\,x - 12 \cdot \int \sin(x) \cdot \mathrm{d}\,x = 3 \cdot \mathrm{e}^x + 12 \cdot \cos(x) + C$

Übungsaufgabe 16.1: Integralaufgaben [OpenAI2024r]

a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x \cdot \mathrm{d}\,x$??

b) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int (2 \cdot x + 3) \cdot \mathrm{d}\,x$??

c) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int \frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}\,x$??

d) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int \sin^2(x) \cdot \mathrm{d}\,x$??

Hier geht es zur Musterlösung.

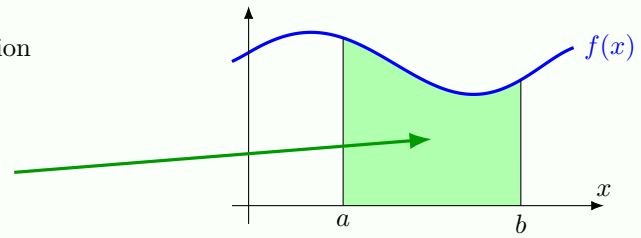
Erläuterung 16.3: Das bestimmte Integral

Das *bestimmte Integral* wird u. a. zur Berechnung einer Fläche zwischen einer Funktion $f(x)$, der x-Achse und zwei Parallelen zur y-Achse an den Stellen $x = a$ und $x = b$ verwendet.

Hauptsatz der Integralrechnung:

Sei f stetig auf $[a, b]$ und F eine Stammfunktion von f, dann gilt:

- $\displaystyle\int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}\,x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$



Weitere Rechenregeln:

- $\displaystyle\int_a^a f(x) \cdot \mathrm{d}\,x = 0$
- $\displaystyle\int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}\,x = -\int_b^a f(x) \cdot \mathrm{d}\,x$

Beispiel 16.3: Bestimmte Integrale

Beispiel 1: $\displaystyle\int_2^5 \left(3 \cdot x^2 - \frac{5}{x}\right) \cdot \mathrm{d}\,x = \int_2^5 3 \cdot x^2 \cdot \mathrm{d}\,x - 5 \cdot \int_2^5 \frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}\,x = x^3\Big|_2^5 - 5 \cdot \ln(x)\Big|_2^5$

$= 125 - 8 - 5 \cdot \big(\ln(5) - \ln(2)\big) \approx 112{,}42$

Beispiel 2: $\displaystyle\int_1^2 64 \cdot x^{-5} \cdot \mathrm{d}\,x = 64 \cdot \int_1^2 x^{-5} \cdot \mathrm{d}\,x = 64 \cdot \frac{1}{-4} \cdot x^{-4}\Big|_1^2 = 64 \cdot \left(-\frac{1}{64} - \frac{-1}{4}\right) = 15$

Beispiel 3: $\displaystyle\int_2^5 \ln(2) \cdot 2^x \cdot \mathrm{d}\,x = \ln(2) \cdot \int_2^5 2^x \cdot \mathrm{d}\,x = \ln(2) \cdot \frac{2^x}{\ln(2)}\Big|_2^5 = \ln(2) \cdot \left(\frac{2^5}{\ln(2)} - \frac{2^2}{\ln(2)}\right) = 28$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Übungsaufgabe 16.2: Bestimmte Integrale

Berechnen Sie die nachfolgenden bestimmten Integrale:

a) $\int_2^3 \left(-379 + 10 \cdot x^4 - 6 \cdot \sqrt[4]{x^8} + \frac{6}{x^2}\right) \cdot \mathrm{d}\, x = ??$

b) $\int_1^2 \left(-188 + 24 \cdot x^5 - 16 \cdot \sqrt[5]{x^{15}} + \frac{8}{x^3}\right) \cdot \mathrm{d}\, x = ??$

c) $\int_1^2 \left(20 \cdot x^3 - \ln(8) \cdot 8^x\right) \cdot \mathrm{d}\, x = ??$

d) $\int_1^2 \left(43 + 15 \cdot x^2 - 20 \cdot \sqrt[3]{x^9} + \frac{8}{x^3}\right) \cdot \mathrm{d}\, x = ??$

e) $\int_2^5 \left(56 \cdot x^3 - \ln(6) \cdot x^6\right) \cdot \mathrm{d}\, x = ??$

f) $\int_3^6 \left(6 + 16 \cdot x^3 - 16 \cdot \sqrt[4]{x^{12}} + \frac{18}{x^2}\right) \cdot \mathrm{d}\, x = ??$

g) $\int_1^2 \left(16 \cdot x^3 - \ln(7) \cdot 7^x\right) \cdot \mathrm{d}\, x = ??$

h) $\int_2^5 \left(-489 + 12 \cdot x^3 - 9 \cdot \sqrt{x^4} + \frac{10}{x^2}\right) \cdot \mathrm{d}\, x = ??$

i) $\int_3^4 \left(277 + 6 \cdot x^2 - 8 \cdot \sqrt[4]{x^{12}} + \frac{288}{x^3}\right) \cdot \mathrm{d}\, x = ??$

j) $\int_1^4 \left(63 \cdot x^2 - \ln(6) \cdot 6^x\right) \cdot \mathrm{d}\, x = ??$

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 16.3: Bestimmte und unbestimmte Integrale [OpenAI2024q]

a) Berechnen Sie das bestimmte Integral: $\int_0^1 x\, dx$??

b) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int (2x + 3)\, dx$??

c) Berechnen Sie das bestimmte Integral: $\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$??

d) Berechnen Sie das bestimmte Integral mittels Substitution: $\int_0^1 2xe^{x^2}\, dx$??

e) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x \cos(x)\, dx$??

f) Berechnen Sie das bestimmte Integral: $\int_0^\pi \sin^2(x)\, dx$??

g) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int e^{2x} \sin(x)\, dx$??

h) Berechnen Sie das bestimmte Integral: $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos(x)\, dx$??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Erläuterung 16.4: Integration nach Substitution

Aus der Kettenregel des Ableitens folgt durch Integration beider Seiten die *Regel für das Integrieren nach Substitution*:

Sei y eine Funktion, die von einer anderen Funktion $u(x)$ abhängt, also $y\big(u(x)\big)$. Dann ist die Ableitung von y nach x gemäß der Kettenregel gegeben durch:

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,u} \cdot \frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x}$$

Unbestimmtes Integrieren beider Seiten nach x ergibt:

$$\int \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} \cdot \mathrm{d}\,x = \int \left(\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,u} \cdot \frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x}\right) \cdot \mathrm{d}\,x$$
$$\Leftrightarrow \int \mathrm{d}\,y = \int \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,u} \cdot \mathrm{d}\,u \quad \Leftrightarrow \quad y = \int \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,u} \cdot \mathrm{d}\,u$$

Kochrezept:

1. **Substitution wählen**: Wähle eine Substitution $u = g(x)$, die das Integral vereinfacht.
2. **Differential ausdrücken**: Berechne das Differential $\mathrm{d}\,u = g'(x) \cdot \mathrm{d}\,x$.
3. **Integral umschreiben**: Ersetze x durch u und $\mathrm{d}\,x$ durch $\dfrac{\mathrm{d}\,u}{g'(x)}$.
4. **Integrieren**: Berechne das Integral in der neuen Variable u.
5. **Rücksubstitution**: Ersetze u wieder durch $g(x)$, um das Ergebnis in der ursprünglichen Variable x auszudrücken.

   Alternative bei der *Berechnung bestimmter Integrale:*

5. **Substitution der Integrationsgrenzen**: Ersetze die Integrationsgrenzen a und b durch $g(a)$ bzw. $g(b)$.

Beispiel 16.4: Beispiele: Integration nach Substitution

Beispiel: $\int 2 \cdot x \cdot \sqrt{x^2+1} \cdot \mathrm{d}\,x$

1. **Substitution wählen**: $u = x^2 + 1$.
2. **Differential ausdrücken**: Dann ist $\dfrac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} = 2 \cdot x$, also $\mathrm{d}\,x = \dfrac{\mathrm{d}\,u}{2 \cdot x}$.
3. **Integral umschreiben**: Ersetze $x^2 + 1$ durch u und $2 \cdot x \cdot \mathrm{d}\,x$ durch $\mathrm{d}\,u$:

$$\int 2 \cdot x \cdot \sqrt{x^2+1} \cdot \mathrm{d}\,x = \int \sqrt{u} \cdot \mathrm{d}\,u$$

4. **Integrieren**:

$$\int \sqrt{u} \cdot \mathrm{d}\,u = \int u^{1/2} \cdot \mathrm{d}\,u = \frac{2}{3} \cdot u^{3/2} + C$$

5. **Rücksubstitution**: Ersetze u wieder durch $x^2 + 1$:

$$\int 2 \cdot x \cdot \sqrt{x^2+1} \cdot \mathrm{d}\,x = \frac{2}{3} \cdot (x^2+1)^{3/2} + C$$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Übungsaufgabe 16.4: Substitionsverfahren [OpenAI2024s]

a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral mittels Substitution: $\int 2 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{x^2} \cdot \mathrm{d}\, x$??

b) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x e^{x^2}\, dx$??

c) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int \cos(x) \sin(x)\, dx$??

d) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x \cos(x^2)\, dx$??

e) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$??

f) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+1}\, dx$??

g) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int \frac{\ln(x)}{x}\, dx$??

h) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x\sqrt{1+x^2}\, dx$??

i) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int e^x \cos(e^x)\, dx$??

Hier geht es zur Musterlösung.

Erläuterung 16.5: Partielles Integrieren

Aus der Produktregel des Ableitens folgt durch Integration beider Seiten die *Regel für das partielle Integrieren:*

$$(uv)' = u'v + uv' \;\Leftrightarrow\; \int (uv)' = \int (u'v + uv') \;\Leftrightarrow\; uv = \int (u'v) + \int (uv') \;\Leftrightarrow$$
$$\int (u'v) = uv - \int (uv')$$

Ableiten ist ja i. A. deutlich einfacher als integrieren. Der Trick besteht nun darin, die Teilfunktionen u' und v geschickt auszuwählen:

- u' sollte einfach integrierbar sein, da im linken Teilintegral u' vorkommt;
- v sollte beim Ableiten einen möglichst einfachen Ausdruck ergeben, da ein Integral $\int uv'$ verbleibt.

Letztendlich ersetzt man die Berechnung des (schwierigen) Integrals $\int (u'v)$ durch die Berechnung des (hoffentlich) einfacheren Integrals $\int (uv')$.

Wählt man u und v „falsch herum“, dann wird die Aufgabe schwieriger anstatt einfacher. Somit bedarf es etwas Erfahrung, um die richtige Auswahl zuzuordnen – diese Erfahrung gewinnt man nur durch Übung!

Kochrezept: Erstellen Sie eine Tabelle mit u' und v (aus Aufgabe ablesen, rechts in **schwarz**) und berechnen Sie daraus u und v' (rechts in **rot**).

Setzen Sie dann u, v und v' in die o. g. Formel für das partielle Integrieren ein und berechnen das verbleibende (einfachere, wenn Sie es richtig gemacht haben) Integral.

$u = \ldots$	$u' = \ldots$
$v = \ldots$	$v' = \ldots$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Beispiel 16.5: Beispiele: Partielle Integration

Beispiel 1: $\int x \cdot \ln(x) \cdot \mathrm{d}\,x$.

$u = {}^{x^2}/_2 \qquad u' = x$

$v = \ln(x) \qquad v' = {}^{1}/_{x}$

$$\int \underbrace{x}_{u'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v} \cdot \mathrm{d}\,x = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{u} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v} - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{u} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'} \cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 \cdot \ln(x) - \int x \cdot \mathrm{d}\,x \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{2} \right) + C = \frac{1}{4} \cdot x^2 \cdot \big(2 \cdot \ln(x) - 1\big) + C$$

Hier dieses Beispiel mit „falscher Wahl“ von u' und v:

$u = x \cdot \ln(x) - x \qquad u' = \ln(x)$

$v = x \qquad v' = 1$

$$\int x \cdot \ln(x) \cdot \mathrm{d}\,x = \big(x \cdot \ln(x) - x\big) \cdot x - \int \big(x \cdot \ln(x) - x\big) \cdot \mathrm{d}\,x$$

Wie man sieht, hat man durch diese ungeschickte (falsche) Wahl nichts gewonnen: Das ursprüngliche Integral $\int x \cdot \ln(x) \cdot \mathrm{d}\,x$ taucht rechts wieder auf!

Beispiel 2: $\int x \cdot \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{d}\,x$.

$u = \mathrm{e}^x \qquad u' = \mathrm{e}^x$

$v = x \qquad v' = 1$

$$\int x \cdot \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{d}\,x = \mathrm{e}^x \cdot x - \int \mathrm{e}^x \cdot 1 \cdot \mathrm{d}\,x \mathrm{e}^x \cdot x - \mathrm{e}^x + C = \mathrm{e}^x \cdot (x - 1) + C$$

Auch hier wieder mit anderer („falscher“) Wahl von u' und v:

$u = {}^{x^2}/_2 \qquad u' = x$

$v = \mathrm{e}^x \qquad v' = \mathrm{e}^x$

$$\int x \cdot \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{d}\,x = \mathrm{e}^x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{d}\,x$$

Diesmal haben wir durch die ungeschickte (falsche) Wahl nicht nur nichts gewonnen; wir haben die Sache damit sogar ziemlich verkompliziert!

Fazit: Übung macht den Meister! Wenn Sie eine gewisse Anzahl solcher Aufgaben gerechnet haben, dann entwickeln Sie einen „Blick“ für die zielführende Wahl von u' und v.

Übungsaufgabe 16.5: Partielle Integration [OpenAI2024t]

a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x \cdot \cos(x) \cdot \mathrm{d}\,x$??

b) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x e^x \, dx$??

c) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x \sin(x) \, dx$??

d) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x \ln(x) \, dx$??

e) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x^2 e^x \, dx$??

f) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x \cos(x) \, dx$??

g) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x^3 e^x \, dx$??

h) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x^2 \ln(x) \, dx$??

i) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x e^{x^2} \, dx$??

j) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int \mathrm{e}^{2 \cdot x} \sin(x) \cdot \mathrm{d}\,x$??

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

k) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x^2 \cdot \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{d}\,x$??

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 16.6: Diverse Aufgaben zur Integralrechnung

Integrieren Sie (C als Konstante kann ggf. weggelassen werden)!

a) $\int\limits_{-10}^{10} x^4 \cdot \mathrm{d}\,x \longrightarrow$??

b) $\int\limits_{0}^{2\pi} r \cdot \phi \cdot \mathrm{d}\,\phi \longrightarrow$??

c) $\int\limits_{0}^{r} (r^2 - x^2) \cdot \pi \cdot \mathrm{d}\,x \longrightarrow$??

d) $\int\limits_{0}^{5} a \cdot t \cdot \mathrm{d}\,t \longrightarrow$??

e) $\int x \cdot \sin(x) \cdot \mathrm{d}\,x \longrightarrow$??

f) $\int\limits_{0}^{\pi} \mathrm{e}^{x \cdot \arccos(\mathrm{e}^x)} \cdot \sin(x) \cdot \mathrm{d}\,y \longrightarrow$??

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 16.7: weiteres Training, erzeugt mit [OpenAI2024u]

Den allermeisten wird es derzeit noch an Übung fehlen, bei den schwierigeren Aufgaben gleich die Lösung zu sehen. Das macht nichts. Einfach schauen, was geht!

a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x\,dx$??

b) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x^2\,dx$??

c) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int e^x\,dx$??

d) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int \sin(x)\,dx$??

e) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int \cos(x)\,dx$??

f) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int xe^x\,dx$??

g) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x\sin(x)\,dx$??

h) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x\ln(x)\,dx$??

i) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x^2e^x\,dx$??

j) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x\cos(x)\,dx$??

k) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x^3e^x\,dx$??

l) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x^2\ln(x)\,dx$??

m) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int e^{x^2}\,dx$??

n) Berechnen Sie das bestimmte Integral: $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\,dx$??

o) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x^3\ln(x)\,dx$??

p) Berechnen Sie das bestimmte Integral: $\int_0^1 (3x^2 - 2x + 1)\,dx$??

q) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$??

r) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int xe^{x^2}\,dx$??

s) Berechnen Sie das bestimmte Integral: $\int_0^{\pi} x\sin(x)\,dx$??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

17. Kegelschnitte

Erläuterung 17.1: Bedeutung der Kegelschnitte

Zunächst sind Kegelschnitte eine geometrische Betrachtungsweise, bei der sich verschiedene geometrische Figuren durch Schnitt 17.1 einer Ebene mit einem Doppelkegel/Kegel ergeben.

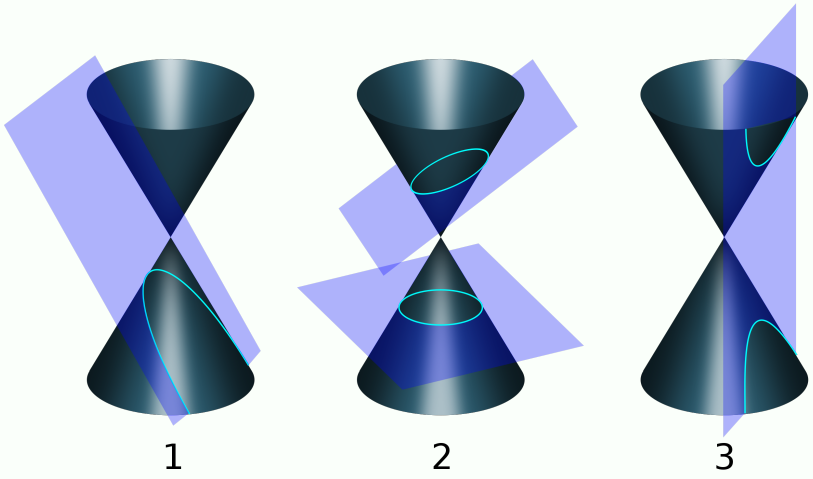


Abbildung 17.1.: Kegelschnitte: (1) liefert die Parabel, (2) Kreis und Ellipse, (3) die Hyperbel

Wozu braucht man die Kegelschnitte?
Klar, in der (darstellenden) Geometrie, damit auch in CAD-Systemen. Sie stellen aber auch häufige Bewegungsgleichungen dar. So werden Plantenbewegungen durch Ellipsen dargestellt. Geradlinige Bewegungen sind Extremfälle von Parabeln oder Kreisen, je nach Betrachter. Dies findet z.B. Anwendung in der Mechanik bei Betrachtungen von Bewegungen, bei denen z.B. eine geradlinige Bewegung durch eine kreisförmige angenähert wird.
Auch in der Optik werden sie verwendet – als Rotationsellipsoid für Autoscheinwerfer, als Paraboloid oder Hyperboloid für Spiegelteleskope usw..Kreisprozesse der Thermodynamik wie bei Otto- oder Dieselmotor, aber auch Kompressoren und Turbinen bewegen sich auf einer Kegeloberfläche. Dazu werden Sie in Thermomechanik noch vertiefen.
Es können folgende Figuren entstehen:

- ein Punkt, wenn die Schnittebene durch die Spitze geht und der Winkel zwischen Achse und Ebene größer als der Öffnungswinkel ist
- eine Gerade, wenn die Schnittebene durch die Spitze geht und der Winkel zwischen Achse und Ebene gleich dem Öffnungswinkel ist
- zwei sich schneidende Geraden, wenn die Schnittebene durch die Spitze geht und der Winkel zwischen Achse und Ebene kleiner als der Öffnungswinkel ist
- ein Kreis, wenn die Schnittebene senkrecht (orthogonal) auf der Kegelachse steht
- eine Ellipse, wenn der Winkel zwischen Achse und Ebene größer als der Öffnungswinkel ist
- eine Parabel, wenn der Winkel zwischen Achse und Ebene gleich dem Öffnungswinkel ist
- eine Hyperbel, wenn der Winkel zwischen Achse und Ebene kleiner als der Öffnungswinkel ist

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Erläuterung 17.2: Darstellung der Kegelschnitte

Die *allgemeine Gleichung der Kegelschnitte* lautet

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Die Parameter a, b, c sind im Speziellen nicht alle 0. Falls $a = b = c = 0$ ist, beschreibt die Gleichung eine Gerade oder ganz $\mathbb{R}^2$.

Übungsaufgabe 17.1: Kegelschnitte

a) An der Parabel $p : y = 4x^2 + 5$ sollen Tangenten gelegt werden, die zur Geraden $g : 2x + y = 5$ normal verlaufen. ??

b) Gegeben sind die Ellipse $e : \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$ und die Parabel $p : y = 6x^2$. Haben diese Schnittpunkte? ??

c) Eine Sonde umkreist die Erde auf einer elliptischen Flugbahn $e : 256x^2 + 625y^2 = 256 \cdot 625$. Sie soll einen Himmelskörper treffen, der sich auf einer Bahn $h : 256x^2 - 625y^2 = 256 \cdot 625$ befindet. Könnten sich die Objekt treffen? ??

Hier geht es zur Musterlösung.

Übungsaufgabe 17.2: Aufgaben zu Kegelschnitten [OpenAI2024v]

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel mit dem Scheitelpunkt bei $(0, 0)$ und der Öffnung nach oben. ??

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Ellipse mit den Halbachsen $a = 5$ und $b = 3$ und dem Zentrum bei $(0, 0)$. ??

c) Bestimmen Sie die Gleichung des Kreises mit dem Radius $r = 4$ und dem Zentrum bei $(0, 0)$. ??

d) Bestimmen Sie die Gleichung der Hyperbel mit den Asymptoten $y = \pm\frac{3}{4}x$ und dem Zentrum bei $(0, 0)$. ??

e) Bestimmen Sie den Brennpunkt und die Gleichung der Parabel mit der Gleichung $y^2 = 8x$. ??

f) Bestimmen Sie die Gleichung der Ellipse mit den Halbachsen $a = 6$ und $b = 2$ und dem Zentrum bei $(1, -3)$. ??

g) Bestimmen Sie die Brennpunkte der Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. ??

h) Bestimmen Sie die Gleichung der Hyperbel mit den Brennpunkten bei $(\pm 5, 0)$ und den Scheitelpunkten bei $(\pm 3, 0)$. ??

i) Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel mit dem Scheitelpunkt bei $(2, -1)$ und der Öffnung nach rechts. ??

j) Bestimmen Sie die Gleichung der Ellipse mit den Halbachsen $a = 7$ und $b = 4$ und dem Zentrum bei $(2, -2)$. Bestimmen Sie auch die Brennpunkte. ??

Hier geht es zur Musterlösung.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Hinweis 17.1: weitere Aufgaben

- https://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/aufgaben/K/kegelschnitt.html
- arnulf.bplaced.net/obstufe/7/kegelschnitte.pdf
- https://www.mathe-online.at/lernpfade/Kegelschnitte/

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Teil III.

Anhang

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

A. Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben

Hinweise zur Lösungsfindung – Aufgabe 2.17‘)

Stellen Sie sich diese Fragen:

- Wie lautet der Induktionsanfang? Was ist die kleinste sinnvoll einsetzbare natürliche Zahl?
- Wie lautet die Induktionsvoraussetzung und wie lautet die Induktionsbehauptung?
- Wie lautet die zu beweisende Gleichung, nachdem Sie die Induktionsvoraussetzung eingesetzt haben?

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Hinweise zur Lösungsfindung – Aufgabe 2.18‘)

Stellen Sie sich diese Fragen:

- Wie lautet der Induktionsanfang? Was ist die kleinste sinnvoll einsetzbare natürliche Zahl?
- Wie lautet die Induktionsvoraussetzung und wie lautet die Induktionsbehauptung?
- Wie lautet die zu beweisende Gleichung, nachdem Sie die Induktionsvoraussetzung eingesetzt haben?
- Finden Sie die notwendigen Termumformungen, um die linke in die rechte Seite der zu beweisenden Gleichung zu überführen.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Hinweise zur Lösungsfindung – Aufgabe 2.19‘)

Stellen Sie sich diese Fragen:

- Wie lautet die Induktionsvariable und die Aussageform, deren Allgemeingültigkeit in $\mathbb{N}_{\geq 1}$ bewiesen werden soll?
- Wie lautet der Induktionsanfang? Beweisen Sie diesen.
- Wie lautet die Induktionsvoraussetzung und die Induktionsbehauptung?
- Beweisen Sie den Induktionsschritt.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Hinweise zur Lösungsfindung – Aufgabe 2.20‘)

Es gilt das Additionstheorem: $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \pm \sin(x) \cdot \sin(y)$.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Hinweise zur Lösungsfindung – Aufgabe 2.21‘)

Verwenden Sie den binomischen Lehrsatz für $(n+1)^5$.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Hinweise zur Lösungsfindung – Aufgabe 6.1‘)

Schreiben Sie die gegebene Zahl als Summe: Ziffer für Ziffer, beginnend von rechts nach links, jeweils multipliziert mit der Wertigkeit 1, 10, 100, 1.000, ...

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Hinweise zur Lösungsfindung – Aufgabe 6.2‘)

Rechnen Sie die gegebenen Terme aus.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Hinweise zur Lösungsfindung – Aufgabe 6.3‘)

$a \mod b := a - b \cdot \lfloor a \div b \rfloor$; $\lfloor a \div b \rfloor$ ist das Divisionsergebnis, $a \mod b$ ist der Rest.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Hinweise zur Lösungsfindung – Aufgabe 6.4‘)

Dividieren Sie die gegebenen Zahlen fortlaufend solange durch 2, bis sich schließlich Null ergibt. Die Reste ergeben (von unten nach oben gelesen) die gewünschte Zahl im Zweier-System.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Hinweise zur Lösungsfindung – Aufgabe 6.5‘)

Dividieren Sie die gegebenen Zahlen fortlaufend solange durch 3, bis sich schließlich Null ergibt. Die Reste ergeben (von unten nach oben gelesen) die gewünschte Zahl im Dreier-System.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Hinweise zur Lösungsfindung – Aufgabe 6.6‘)

Dividieren Sie die gegebenen Zahlen fortlaufend solange durch 5, bis sich schließlich Null ergibt. Die Reste ergeben (von unten nach oben gelesen) die gewünschte Zahl im Fünfer-System.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Hinweise zur Lösungsfindung – Aufgabe 6.7‘)

Dividieren Sie die gegebenen Zahlen fortlaufend solange durch 8, bis sich schließlich Null ergibt. Die Reste ergeben (von unten nach oben gelesen) die gewünschte Zahl im Oktalsystem.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Hinweise zur Lösungsfindung – Aufgabe 6.8‘)

Dividieren Sie die gegebenen Zahlen fortlaufend solange durch 16, bis sich schließlich Null ergibt. Die Reste ergeben (von unten nach oben gelesen) die gewünschte Zahl im Hexadezimalsystem. Beachten Sie dabei, dass für dezimale Werte > 9 lateinische Buchstaben (A, B, ..., F) geschrieben werden.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Hinweise zur Lösungsfindung – Aufgabe 6.9‘)

Multiplizieren Sie die Ziffern einzeln **von rechts her** mit ihrer jeweiligen Wertigkeit (also 1, 2, 4, 8, 16, ...) und addieren Sie alle Produkte.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Hinweise zur Lösungsfindung – Aufgabe 6.10‘)

Multiplizieren Sie die Ziffern einzeln **von rechts her** mit ihrer jeweiligen Wertigkeit (also 1, 3, 9, 27, 81, ...) und addieren Sie alle Produkte.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Hinweise zur Lösungsfindung – Aufgabe 6.11‘)

Multiplizieren Sie die Ziffern einzeln **von rechts her** mit ihrer jeweiligen Wertigkeit (also 1, 5, 25, 125, 625, ...) und addieren Sie alle Produkte.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Hinweise zur Lösungsfindung – Aufgabe 6.12‘)

Multiplizieren Sie die Ziffern einzeln **von rechts her** mit ihrer jeweiligen Wertigkeit (also 1, 8, 64, 512, 4.096, ...) und addieren Sie alle Produkte.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Hinweise zur Lösungsfindung – Aufgabe 6.13‘)

Multiplizieren Sie die Ziffern einzeln **von rechts her** mit ihrer jeweiligen Wertigkeit (also 1, 16, 256, 4.096, 65.536, ...) und addieren Sie alle Produkte.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Hinweise zur Lösungsfindung – Aufgabe 6.14‘)

Von rechts her Dreier- bzw. Viererpäckchen bilden und die Päckchen getrennt umwandeln.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Hinweise zur Lösungsfindung – Aufgabe 6.15‘)

Wandeln Sie zunächst ins Zweiersystem und bilden Sie dann von rechts her Dreier- bzw. Viererpäckchen.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Hinweise zur Lösungsfindung – Aufgabe 6.16‘)

Verwenden Sie die „Polynom-Kettenprodukt-Entwicklung“.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Hinweise zur Lösungsfindung – Aufgabe 6.17‘)

In einem b-adischen System mit n Stellen ist die größte darstellbare Zahl $\left(b^n-1\right)_{10}$.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Hinweise zur Lösungsfindung – Aufgabe 6.19‘)

Der Übertrag erfolgt bei der 1: 1+1=10.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Hinweise zur Lösungsfindung – Aufgabe 6.20‘)

Wann erfolgt jeweis der Übertrag? → Wenn b die Basis ist, dann gibt $b+1=10$.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Hinweise zur Lösungsfindung – Aufgabe 6.21‘)

Von links nach rechts jede Ziffer des Multiplikanden mit den Multiplikator-Ziffern von rechts nach links multiplizieren (mit Übertrag); diese Zwischensummen jeweils um eins nach rechts schieben.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Hinweise zur Lösungsfindung – Aufgabe 6.22‘)

Von links nach rechts jede Ziffer des Multiplikanden mit den Multiplikator-Ziffern von rechts nach links multiplizieren (mit Übertrag); diese Zwischensummen jeweils um eins nach rechts schieben.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Hinweise zur Lösungsfindung – Aufgabe 6.23‘)

Von links nach rechts jede Ziffer des Multiplikanden mit den Multiplikator-Ziffern von rechts nach links multiplizieren (mit Übertrag); diese Zwischensummen jeweils um eins nach rechts schieben.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Hinweise zur Lösungsfindung – Aufgabe 6.24‘)

Von links nach rechts jede Ziffer des Multiplikanden mit den Multiplikator-Ziffern von rechts nach links multiplizieren (mit Übertrag); diese Zwischensummen jeweils um eins nach rechts schieben.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Hinweise zur Lösungsfindung – Aufgabe 6.25‘)

Von links nach rechts jede Ziffer des Multiplikanden mit den Multiplikator-Ziffern von rechts nach links multiplizieren (mit Übertrag); diese Zwischensummen jeweils um eins nach rechts schieben.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Hinweise zur Lösungsfindung – Aufgabe 8.4a)

Verwenden Sie die Substitution $j = k - 1$. Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Hinweise zur Lösungsfindung – Aufgabe 8.4b)

Verwenden Sie die Substitution $m = 2n + 1$. Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Hinweise zur Lösungsfindung – Aufgabe 8.4c)

Verwenden Sie die Substitution $k = j - i$. Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Hinweise zur Lösungsfindung – Aufgabe 8.4d)

Verwenden Sie die Substitution $j = n - k + 1$. Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Hinweise zur Lösungsfindung – Aufgabe 8.4e)

Verwenden Sie die Substitution $j = n - k$ und kombinieren Sie die Ergebnisse. Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Hinweise zur Lösungsfindung – Aufgabe 15.4l)

Hier müssen Sie die Produktregel zweimal anwenden (zwei der drei Faktoren klammern und im ersten Schritt als ein Faktor betrachten). Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Hinweise zur Lösungsfindung – Aufgabe 15.4m)

Hier müssen Sie die Produktregel zweimal anwenden (zwei der drei Faktoren klammern und im ersten Schritt als ein Faktor betrachten). Hier geht es zurück zur Aufgabe.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

B. Lösungsvorschläge zu den Übungsaufgaben (alle Teilaufgaben)

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 0.1: Übungsaufgaben

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 1.1: Addition und Subtraktion (1) v1

a) $16 + (-12) = 4$

b) $(-24) - (-13) = -11$

c) $(-18) + 16 = -2$

d) $17 + (-14) = 3$

e) $27 - (-12) = 39$

f) $(-34) + 18 = -16$

g) $(-12) - 24 = -36$

h) $18 - (-12) = 30$

i) $(-19) - (-15) = -4$

j) $12 + (-16) = -4$

k) $(-4) - 7 = -11$

l) $(-14) - (-7) = -7$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 1.2: Addition und Subtraktion (2) v1

a) $2 + 6 - 5 - 2 + 3 - 2 - 1 = 1$

b) $3 + 4 + (-5) + (-2) = 0$

c) $3 + (-8) - (-5) = 0$

d) $\big((1 + 6) - (2 + 3)\big) + 4 = 6$

e) $7 - (-3) - 4 = 6$

f) $10 - 4 + 7 - 3 + 2 - 1 = 11$

g) $8 + 9 - 6 - 3 + 2 = 10$

h) $15 - 7 + 4 - 2 + 3 - 1 = 12$

i) $-2 + 6 - (-4) = 8$

j) $20 + 5 - 3 - 1 + 4 - 2 - 1 = 22$

k) $12 - 3 + 6 - 4 + 5 - 2 + 1 = 15$

l) $9 - (-2) + 7 = 18$

m) $25 + 3 - 8 + 2 - 5 + 4 - 1 = 20$

n) $18 - 5 + 7 - 2 + 6 - 3 - 1 = 20$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

o) $-10 + (-5) - (-3) = -12$

p) $15 - (-7) - 8 = 14$

q) $-12 + 3 - (-6) = -3$

r) $30 + 4 - 7 - 2 + 3 - 1 = 27$

s) $22 - 6 + 8 - 3 + 5 - 2 + 1 = 25$

t) $18 - (-5) - (-9) = 32$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 1.3: Multiplikation v1

a) $7 \cdot (-4) \cdot (-2) = 56$

b) $(-4) \cdot 2 \cdot 6 = -48$

c) $5 \cdot (-3) \cdot (-6) = 90$

d) $(-3) \cdot (-4) \cdot (-5) = -60$

e) $(-8) \cdot 5 \cdot 3 = -120$

f) $12 \cdot (-3) \cdot (-4) = 144$

g) $(-3) \cdot 12 \cdot (-5) = 180$

h) $15 \cdot (-4) \cdot 7 = -420$

i) $(-5) \cdot (-16) \cdot 3 = 240$

j) $(-4) \cdot (-8) \cdot (-3) = -96$

k) $20 \cdot 5 \cdot (-9) = -900$

l) $14 \cdot (-5) \cdot (-8) = 560$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 1.4: Division v1

a) $(-5) \div (-1) = 5$

b) $(+6) \div (+2) = 3$

c) $12 \div (-4) = -3$

d) $(-35) \div (-7) = 5$

e) $21 \div (-3) = -7$

f) $(-49) \div 7 = -7$

g) $56 \div (-8) = -7$

h) $108 \div (-12) = -9$

i) $(-75) \div (-15) = 5$

j) $72 \div (-9) = -8$

k) $(-78) \div (-6) = 13$

l) $(-144) \div 12 = -12$

m) $(-128) \div (-8) = 16$

n) $132 \div (-11) = -12$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 1.5: Teilbarkeitsregeln (1) v1

a) $235 \div 3$ → Nein, Quersumme = 10.

b) $5\,517 \div 9$ → Ja, Quersumme = 18.

c) $35\,122 \div 4$ → Nein, $22 \div 4$ geht nicht ohne Rest.

d) $3\,002 \div 4$ → Nein, Endziffern „02“ nicht durch 4 teilbar

e) $3\,111 \div 3$ → Ja. Quersumme = 6 ist durch 3 teilbar

f) $3\,102 \div 6$ → Ja. Um durch 6 teilbar zu sein, müssen 2 Bedingungen erfüllt werden: Teilbarkeit durch 3 (gegeben, da Quersumme 6 durch 3 teilbar) UND Teilbarkeit durch 2 (gegeben, da gerade Zahl).

g) $3\,016 \div 8$ → Ja, Endziffern „016“ sind durch 8 teilbar

h) $3\,192 \div 7$ → Ja, 319-4=315 ⇒31-10=21 ⇒2-2=0 ⇒0/7=0, somit teilbar

i) $441 \div 63$ → Ja, Zu erkennen ist zunächst, dass 63=7·9 ist. Somit muss 441 sowohl durch 9, als auch durch 7 teilbar sein, damit es durch 63 geteilt werden kann.
Quersumme ist 9, damit durch 9 teilbar.
44-2=42, somit 6·7, durch 7 teilbar.
Somit durch 9 UND 7 teilbar, somit auch durch 63.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 1.6: Teilbarkeitsregeln (2) v1

a) Überprüfe, ob die Zahl 425 durch 5 teilbar ist. *Ja.*

b) Überprüfe, ob die Zahl 625 durch 25 teilbar ist. *Ja.*

c) Überprüfe, ob die Zahl 784 durch 7 teilbar ist. *Ja.*

d) Überprüfe, ob die Zahl 864 durch 3 teilbar ist. *Ja.*

e) Überprüfe, ob die Zahl 738 durch 6 teilbar ist. *Ja.*

f) Überprüfe, ob die Zahl 312 durch 4 teilbar ist. *Ja.*

g) Überprüfe, ob die Zahl 572 durch 2 teilbar ist. *Ja.*

h) Überprüfe, ob die Zahl 243 durch 9 teilbar ist. *Ja.*

i) Überprüfe, ob die Zahl 876 durch 4 teilbar ist. *Ja.*

j) Überprüfe, ob die Zahl 542 durch 6 teilbar ist. *Nein.*

k) Überprüfe, ob die Zahl 285 durch 3 teilbar ist. *Ja.*

l) Überprüfe, ob die Zahl 150 durch 2 teilbar ist. *Ja.*

m) Überprüfe, ob die Zahl 672 durch 5 teilbar ist. *Nein.*

n) Überprüfe, ob die Zahl 462 durch 9 teilbar ist. *Nein.*

o) Überprüfe, ob die Zahl 840 durch 4 teilbar ist. *Ja.*

p) Überprüfe, ob die Zahl 189 durch 2 teilbar ist. *Nein.*

q) Überprüfe, ob die Zahl 936 durch 3 teilbar ist. *Ja.*

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 1.7: Die Zahl Null v1

a) Keine Primzahl, da man nicht durch 1 teilen kann

Falsch

b) Ist eine Primzahl, da durch Null teilbar

Falsch

c) Ist eine Primzahl, da eine natürliche Zahl

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Falsch

d) Keine Primzahl, da man nicht durch Null teilen darf

Falsch

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 1.8: Primzahlen v1

a) 221 Nein: $221 = 13 \cdot 17$

b) 247 Nein: $247 = 13 \cdot 19$

c) 331 Ja

d) 439 Ja

e) 473 Nein: $473 = 11 \cdot 43$

f) 569 Ja

g) 588 Nein: $588 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$

h) 637 Nein: $637 = 7 \cdot 7 \cdot 13$

i) 653 Ja

j) 739 Ja

k) 787 Ja

l) 879 Nein: $879 = 3 \cdot 293$

m) 883 Ja

n) 893 Nein: $893 = 19 \cdot 47$

o) 941 Ja

p) 961 Nein: $961 = 31 \cdot 31$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 1.9: Faktorisieren v1

a) 108 537 $3 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 23$

b) 170 170 $2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$

c) 181 203 $3 \cdot 11 \cdot 17^2 \cdot 19$

d) 339.570 $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 11$

e) 341.887 $7 \cdot 13^2 \cdot 17^2$

f) 456.533 $7^3 \cdot 11^3$

g) 485.100 $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11$

h) 582.750 $2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 37$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 1.10: ggT und kgV v1

a) $9; 21$ $\text{ggT} = 3$ $\text{kgV} = 63$

b) $8; 12$ $\text{ggT} = 4$ $\text{kgV} = 24$

c) $13; 26$ $\text{ggT} = 13$ $\text{kgV} = 26$

d) $32; 12$ $\text{ggT} = 4$ $\text{kgV} = 96$

e) $16; 64$ $\text{ggT} = 16$ $\text{kgV} = 64$

f) $8; 12$ $\text{ggT} = 4$ $\text{kgV} = 24$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

g) $5; 7 \quad \text{ggT} = 1 \quad \text{kgV} = 35$

h) $121; 77 \quad \text{ggT} = 11 \quad \text{kgV} = 11 \cdot 11 \cdot 7 = 847$

i) $256; 1024 \quad \text{ggT} = 256 \quad \text{kgV} = 1024$

j) $42; 77 \quad \text{ggT} = 7 \quad \text{kgV} = 6 \cdot 7 \cdot 11 = 462$

k) $81; 49 \quad \text{ggT} = 1 \quad \text{kgV} = 9 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 7 = 3\,969$

l) $342; 63 \quad \text{ggT} = 9 \quad \text{kgV} = 19 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 7 = 2\,394$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 1.11: Teilbarkeitsregeln (3) v1

a) Ermittle eine zweistellige Zahl, die sowohl durch 7 als auch durch 11 teilbar ist.

77

b) Ermittle eine zweistellige Zahl, die sowohl durch 18 als auch durch 27 teilbar ist.

$\text{kgV}(18; 27) = 54$.

c) Ermittle eine zweistellige Zahl, die sowohl durch 9 als auch durch 16 teilbar ist.

$\text{kgV}(9; 16) = 144 \rightarrow$ Eine solche Zahl gibt es nicht.

d) Ermittle eine zweistellige Zahl, die sowohl durch 16 als auch durch 24 teilbar ist.

48 oder 96.

e) Finde die kleinste natürliche Zahl, die sowohl durch 14, 21 und 28 teilbar ist.

$\text{kgV}(14; 21; 28) = 84$.

f) Finde die kleinste natürliche Zahl, die sowohl durch 20, 25 und 30 teilbar ist.

$\text{kgV}(20; 25; 30) = 300$.

g) Finde die kleinste natürliche Zahl, die sowohl durch 12, 15 und 18 teilbar ist.

$\text{kgV}(12; 15; 18 = 180)$.

h) Finde die kleinste natürliche Zahl, die sowohl durch 22, 33 und 44 teilbar ist.

$\text{kgV}(22; 33; 44) = 132$.

i) Finde eine dreistellige Zahl, die sowohl durch 6 als auch durch 9 teilbar ist.

Die kleinste dreistellige Zahl ist 100. Wir rechnen: $100 \div \text{kgV}(6; 9) = 100 \div 18 \approx 5{,}6$ aufgerundet 6. Also ist $18 \cdot 6 = 108$ die kleinstmögliche Lösung.

Analog können wir die größtmögliche Lösung bestimmen: $1000 \div 18 \approx 55{,}6$ abgerundet $55 \rightarrow 18 \cdot 55 = 990$.

j) Bestimme eine vierstellige Zahl, die durch 8 teilbar ist, aber nicht durch 10.

$1\,000 \div 8 = 125$; 125 ist durch 5 teilbar, damit ist $8 \cdot 125$ durch 10 teilbar. Wir nehmen $126 \cdot 8 = 1\,008$.

Analog für die größtmögliche Zahl: $9\,999 \div 8 \approx 1\,249{,}9 \rightarrow 1\,249 \cdot 8 = 9\,992$.

k) Finde eine dreistellige Zahl, die sowohl durch 7 als auch durch 13 teilbar ist.

$\text{kgV}(7; 13) = 91 \rightarrow 182 ... 910$.

l) Bestimme eine vierstellige Zahl, die durch 11 teilbar ist, aber nicht durch 9.

$1\,000 \div 11 \approx 90{,}9 \rightarrow 91$ ist nicht durch 9 teilbar $\rightarrow 91 \cdot 11 = 1\,001 ... 9\,988$.

m) Finde eine dreistellige Zahl, die sowohl durch 12 als auch durch 18 teilbar ist.

108...972.

n) Bestimme eine vierstellige Zahl, die durch 13 teilbar ist, aber nicht durch 15.

$1\,001 ... 9\,997$.

o) Finde eine dreistellige Zahl, die sowohl durch 15 als auch durch 20 teilbar ist.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

kgV$(15;20) = 84$.

p) Bestimme eine vierstellige Zahl, die durch 14 teilbar ist, aber nicht durch 16.

1 008...9 996.

Quelle: https://chat.openai.com/; Abruf 2023-06-09

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 1.12: Tischplatte v1

a) Welche Seitenlänge muss ein solches Plättchen haben?

$\text{ggT}\,(\underbrace{92\text{cm};}_{4\cdot 23}\ \underbrace{68\text{cm};}_{4\cdot 17}) = 4\,\text{cm}$

Die Plättchen müssen eine Seitenlänge von 4 cm haben.

b) Wie viele brauchen Sie davon?

$23 \cdot 17 = 391$ Sie benötigen 391 Plättchen.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 1.13: Neubau v1

a) Wie hoch kann man eine Stufe höchstens machen?

$\text{ggT}\,(\underbrace{255\,\text{cm};}_{17\cdot 15}\ \underbrace{289\,\text{cm};}_{17\cdot 17}) = 17\,\text{cm}$

Die Stufen dürfen höchstens 17 cm hoch sein.

b) Wie viele Stufen sind es dann im Keller?

$289\,\text{cm} \div 17\,\text{cm} = 17$

Im Keller sind 17 Stufen.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 1.14: Punktrechnung vor Strichrechnung v1

a) $5 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 14$

b) $10 + 4 \div 2 \cdot 3 = 16$

c) $12 \cdot 2 - 8 \div 4 = 22$

d) $24 \cdot 2 - 12 \div 3 = 44$

e) $2 + 3 - 4 \cdot 2 = -3$

f) $5 \cdot 4 - 3 \div 2 + 6 = 24{,}5$

g) $8 - 3 \cdot 2 + 4 = 6$

h) $10 + 4 \div 2 - 3 \cdot 2 = 6$

i) $12 \cdot 2 - 8 + 4 \div 2 = 18$

j) $15 - 6 \div 2 + 3 \cdot 4 = 24$

k) $20 + 4 \div 2 - 3 \cdot 2 = 16$

l) $24 \div 3 - 2 + 4 \cdot 2 = 14$

m) $10 - 4 \div 2 + 3 \cdot 2 = 14$

n) $7 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 - 2 \cdot 8 + 12 \div 3 = 1$

o) $2 + 3 - 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 - 6 \cdot 2 + 7 \cdot 4 - 8 \cdot 3 + 9 \cdot 2 = 22$

p) $5 \cdot 4 - 3 \div 2 + 6 \cdot 3 - 7 \cdot 2 + 8 \cdot 4 - 9 \cdot 3 + 10 \cdot 2 = 47{,}5$

q) $8 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 - 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 - 7 \cdot 3 + 9 \cdot 2 - 10 \cdot 4 = -15$

r) $10 + 4 \div 2 - 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 - 6 \cdot 2 + 7 \cdot 4 - 8 \cdot 3 + 9 \cdot 2 - 10 \cdot 4 = -9$

s) $12 \cdot 2 - 8 + 4 \div 2 - 5 \cdot 3 + 6 \cdot 2 - 7 \cdot 4 + 9 \cdot 3 - 10 \cdot 2 + 11 \cdot 4 = 38$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Quelle: https://chat.openai.com/; Abruf 2023-06-10
Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 1.15: Klammern verändern die Berechnungs-Reihenfolge v1

a) $8-3\cdot(4+2)=-10$

b) $15-(6+2)\cdot 3=-9$

c) $20+4\div(2\cdot 3)=20\frac{2}{3}$

d) $(5+3)\cdot(7-2)=40$

e) $6\cdot(4+2)-8=28$

f) $12\div 3+2\cdot(4-1)=10$

g) $(2+3)\cdot(4+2)-8=22$

h) $5\cdot(6-2)+8\div 4=22$

i) $7+2\cdot(5-3)\cdot 4=23$

j) $(20-8)\cdot 2+12\div 3=28$

k) $8\div 4\cdot(6-3)+2=8$

l) $(10-6)\cdot(4+2)+8=32$

m) $12-4\div(2\cdot 3)+5\cdot 2=21\frac{1}{3}$

n) $15\div 3+4\cdot(6-2)=21$

o) $2-3\cdot(2+1)\cdot 3-10\cdot(4-14)\div 4=0$

p) $(5-3)\cdot\big[\{3-2\cdot 2\}\cdot 3-2+3\cdot 2\big]=2$

q) $2-\big((6+4)\div 5\cdot(2-3)-5+2\cdot 3\big)=3$

r) $\big((2-8)\div(5-2)\cdot 3+8\big)\cdot 4-7=1$

s) $(6-9)\div(9-6)\div(9-6)\cdot(6-9)=1$

t) $(6-9)\div\big[(9-6)\div(9-6)\big]\cdot(6-9)=9$

u) $2+3\cdot(4\cdot 5+6-8)-(-8)(-7)=0$

v) $4-2\cdot\big(-3\cdot(5-4)\cdot(-4)\cdot(-1)\big)+(2-7)(7-2)=4-2\cdot(+12)+(-5)\cdot(5)=4+24-25=3$

w) $4-2\cdot\big(-3\cdot 5-4\cdot(-4)\cdot(-1)\big)+(2-7)(7-2)=4-2\cdot(-15-16)+(-5)\cdot(5)=4+62-25=41$

Beachten Sie, dass nur eine (!) Klammer gegenüber zuvor fehlt.

Quelle: Vgl. [[**Ross23**]] S. 11 und https://chat.openai.com/ Abruf 2023-06-10
eigene Berechnungen
Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 1.16: Potenzen v1

a) $3^2=9$

b) $5^3=125$

c) $2^8=256$

d) $10^3=1000$

e) $12^2=144$

f) $3{,}14^2=9{,}859\,6$

g) $12{,}5^4=24.414{,}062\,5$

h) $42{,}125^3=74.751{,}470\,703\,125$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

i) $6^7 = 279.936$

j) $7{,}5^4 = 3.164{,}062\,5$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 1.17: Potenz- vor Punkt- vor Strichrechnung v1

a) $2 + \big(4 - 2 \cdot (3^2 - 2^2)\big) + 4 = 0$

b) $((2+2)^2)^2 - 4^4 = (4^2)^2 - 4^4 = 4^4 - 4^4 = 0$

c) $(2^3)^{3+1/3} = 2^{3\cdot 3 + 3\cdot 1/3} = 2^{(9+1)} = 2^{10} = 1024$

d) $2 + 3 \cdot 4^5 = 2 + 3 \cdot 1024 = 2 + 3072 = 3074$

e) $\dfrac{3 \cdot 4^5}{\left(\dfrac{2^{20}}{1024}\right)} - 3 = 0$

f) $3 + \dfrac{3}{64} \cdot 2^6 - 6 = 3 + \dfrac{3}{64} \cdot 64 - 6 = 3 + 3 - 6 = 0$

g) $\dfrac{1\dfrac{3}{64} \cdot 2^6 - 4}{7} = \dfrac{(1 + \dfrac{3}{64}) \cdot 2^6 - 4}{7} = \dfrac{(1 + \dfrac{3}{64}) \cdot 64) - 4}{7} = \dfrac{(64+3) - 4}{7} = \dfrac{63}{7} = 9$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 1.18: Gemischte Potenzaufgaben (1) v1

a) $6^2 \div 9 - (3^3 - 2) \div 5 + 3^2 - 2^2 \cdot 3 + 4 = 0$

b) $3^2 - 2^2 + (-2)^2 - 3^2 - (-3)^3 - 3^3 = 0$

c) $2^2 - 2^4 - (-2)^2 - 2^3 - (-2)^5 - 2^3 = 0$

d) $2^3 \cdot 3^2 \div \big((2+3)^2 - (2^2 + 3^2)\big) - 2^2 = 2$

e) $2557 \cdot 43 \div (-7) \div 2557 \cdot 7 \div (-43) = 1$

f) $-5 + 2 \cdot 2 - 5 + (-5 + 2) \cdot (2 - 5) = 3$

g) $2 - 4^2 + (-4)^2 + 4 \cdot 2 - (-4) \cdot (-2) = 2$

h) $\big(1 \cdot (-2) - 3 \cdot (-4) + 5 \cdot (-6)\big) \div (-10) = 2$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 1.19: Gemischte Potenzaufgaben (2) v1

a) $\big(3 \cdot (-3)^2 - 5^2\big) \cdot \big[\{7 \cdot 6 - 5 \cdot 8\} \cdot 3 - 3 \cdot 2\big] = 0$

b) $2 \cdot (-3) \cdot 4 \cdot (-5) \div (-4) \cdot (-2) \div (3) \div (5) = 4$

c) $\big((2-3) - (4-5) - (6-7)\big) \cdot (-8) \div (-4) = 2$

d) $(3 - 4 \cdot 2 - (2 - 9)) \cdot (4 - 6) = -4$

e) $\big((56 \div 8 \cdot 9) + 9\big) \div (-9) \div (-8) = 1$

f) $\Big(\big((7 \cdot (2-9)\big) + 4\Big) \div (-3)^2 - 4) \div (-3) = 3$

g) $9 \cdot 8 - 7 \cdot 6 - 5 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4$

h) $\big((2 - 20 + 4) \div (-7) - 5\big) \cdot (-2) = 6$

i) $3^3 \div (-3)^3 \cdot 2^5 \div (-2)^5 = 1$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 1.20: Wurzeln (1) v1

a) $\sqrt[3]{-27} = -3$

b) $\sqrt[4]{16} = +/- 2$

c) $\sqrt[5]{-32} = -2$

d) $\sqrt[6]{64} = +/- 2$

e) $\sqrt[4]{256} = +/- 4$

f) $\sqrt[3]{-125} = -5$

g) $\sqrt[2]{144} = +/- 12$

h) $\sqrt[2]{625} = +/- 25$

i) $\sqrt[2]{361} = +/- 19$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 1.21: Wurzeln (2) v1

a) $\sqrt[3]{45} \approx 3,556893$

b) $\sqrt[3]{10} \approx 2,15443469003188$

c) $\sqrt[4]{20} \approx 2,11474252688113$

d) $\sqrt[3]{8} \approx 2,0$

e) $\sqrt[2]{9} \approx 3,0$

f) $\sqrt[1,5]{5} \approx 2,92401773821287$

g) $\sqrt[11]{11} \approx 1,24357522791237$

h) $\sqrt[365]{1,1} \approx 1,00026115787607$

i) $\sqrt[12]{5,5} \approx 1,15264850358049$

j) $\sqrt[30]{2} \approx 1,02337389199677$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 1.22: Logarithmen (1) v1

a) $\log_{10} 10 = 1$

b) $\log_2(8) = 3$

c) $\mathrm{ld}(32) = 5$

d) $\ln(\mathrm{e}) = 1$

e) $\log_{10}(1) = 0$

f) $\log_2(4^4) = 8$

g) $\log_3\left(1/9\right) = \log_3(1) - \log_3(9) = 0 - 2 = -2$

h) $\ln\left(1/\mathrm{e}\right) = -1$

i) $\mathrm{ld}(32 \cdot 256) = \mathrm{ld}(32) + \mathrm{ld}(256) = 5 + 8 = 13$

j) $\mathrm{ld}(x \cdot 4) = \mathrm{ld}(x) + 2$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 1.23: Logarithmen (2) v1

a) $2^6 = 64 \qquad \rightarrow \log_2 64 = 6$

b) $3^3 = 27 \qquad \rightarrow \log_3 27 = 3$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

c) $4^4 = 256$ $\rightarrow \log_4 256 = 4$

d) $9^0 = 1$ $\rightarrow \log_9 1 = 0$

e) $8^1 = 8$ $\rightarrow \log_8 8 = 1$

f) $3^{-1} = 1/3$ $\rightarrow \log_3 1/3 = -1$

g) $10^{-3} = 0{,}001$ $\rightarrow \log_{10} 0{,}001 = -3$

h) $2^{-5} = 1/32$ $\rightarrow \log_2 1/32 = -5$

i) $36^{0,5} = 6$ $\rightarrow \log_{36} 6 = 1/2$

j) $243^{0,2} = 3$ $\rightarrow \log_{243} 3 = 1/5$

Quelle: http://www.vorwerg-net.de/Mathematik/1.Algebra/1.7.A.Logarithmen.pdf; Abruf 2023-05-18
Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 1.24: Logarithmen (3) v1

a) $\log_3 81 = 4$ $\rightarrow 3^4 = 81$

b) $\log_4 64 = 3$ $\rightarrow 4^3 = 64$

c) $\log_6 36 = 2$ $\rightarrow 6^2 = 36$

d) $\log_2 64 = 6$ $\rightarrow 2^6 = 64$

e) $\log_8 1 = 0$ $\rightarrow 8^0 = 1$

f) $\log_5 5 = 1$ $\rightarrow 5^1 = 5$

g) $\log_3 9 = 2$ $\rightarrow 3^2 = 9$

h) $\log_7 49 = 2$ $\rightarrow 7^2 = 49$

i) $\log_9 3 = 0{,}5$ $\rightarrow 9^{0,5} = 3$

j) $\log_{64} 2 = 1/6$ $\rightarrow 64^{1/6} = 2$

Quelle: http://www.vorwerg-net.de/Mathematik/1.Algebra/1.7.A.Logarithmen.pdf; Abruf 18-MAI-2023
Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 1.25: Logarithmen (4) v1

a) $\log_2 8 =$ $\rightarrow 3$ denn $2^3 = 8$

b) $\log_{10} 100 =$ $\rightarrow 2$ denn $10^2 = 100$

c) $\log_3 81 =$ $\rightarrow 4$ denn $3^4 = 81$

d) $\log_5 \frac{1}{25} =$ $\rightarrow -2$ denn $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

e) $\log_6 1 =$ $\rightarrow 0$ denn $6^0 = 1$

f) $\log_2 \sqrt[3]{16} =$ $\rightarrow \frac{4}{3}$ denn $2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}$

g) $\log_2 16 =$ $\rightarrow 4$

h) $\log_3 27 =$ $\rightarrow 3$

i) $\log_{10} 10000 =$ $\rightarrow 4$

j) $\log_{10} 0{,}1 =$ $\rightarrow -1$

k) $\log_{10} 0{,}001 =$ $\rightarrow -3$

l) $\log_5 0{,}2 =$ $\rightarrow -1$

m) $\log_2 0{,}5 =$ $\rightarrow -1$

n) $\log_2 0{,}125 =$ $\rightarrow -3$

o) $\log_3 1/27 =$ $\rightarrow -3$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

p) $\log_2 {}^1\!/_{256} = \qquad \to -8$

Quelle: a) … f): https://mathe.aufgabenfuchs.de/potenz/logarithmus.shtml; Abruf 18-MAI-2023
Quelle: g) … p): http://www.vorwerg-net.de/Mathematik/1.Algebra/1.7.A.Logarithmen.pdf; Abruf 18-MAI-2023
Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 1.26: Gemischte Aufgaben v1

a) $2 \cdot \mathrm{ld}(1024) - 8 = 12$

b) $\dfrac{\mathrm{e}^{\ln(\pi)}}{33^{\log_{33}\pi}} = \dfrac{\pi}{\pi} = 1$

c) $\dfrac{2^3}{9-4} \cdot \mathrm{e}^{\ln 5/8} = \dfrac{8}{5} \cdot \dfrac{5}{8} = 1$

d) $\pi + \ln \dfrac{\mathrm{e}^5}{\mathrm{e}^\pi} - \dfrac{2^3+7}{3} = \pi + \ln \mathrm{e}^5 - \ln \mathrm{e}^\pi - \dfrac{8+7}{3} = \pi + 5 - \pi - \dfrac{15}{3} = \pi + 5 - \pi - 5 = 0$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 1.27: Rechnen mit Logarithmen v1

a) Bestimme $\log_{10}(100)$. $\log_{10}(100) = 2$

Erklärung: $10^2 = 100$

b) Bestimme $\log_2(16)$. $\log_2(16) = 4$

Erklärung: $2^4 = 16$

c) Bestimme $\log_3(27)$. $\log_3(27) = 3$

Erklärung: $3^3 = 27$

d) Bestimme $\log_5(125)$. $\log_5(125) = 3$

Erklärung: $5^3 = 125$

e) Bestimme $\log_2(32)$. $\log_2(32) = 5$

Erklärung: $2^5 = 32$

f) Bestimme $\log_{10}(1000)$. $\log_{10}(1000) = 3$

Erklärung: $10^3 = 1000$

g) Bestimme $\log_4(64)$. $\log_4(64) = 3$

Erklärung: $4^3 = 64$

h) Bestimme $\log_2(8)$. $\log_2(8) = 3$

Erklärung: $2^3 = 8$

i) Bestimme $\log_{10}(1)$. $\log_{10}(1) = 0$

Erklärung: $10^0 = 1$

j) Bestimme $\log_7(49)$. $\log_7(49) = 2$

Erklärung: $7^2 = 49$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 1.28: Textbeispiele aus der Umformung v1

Quelle: nach [**OpenAI2024e**]

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

a) Ein Stahlblock wird von 7 m auf 140 m zu einer Schiene gewalzt. Wie sind die Umformgrade in der Länge und im mittleren Querschnitt?
Länge: $\phi_l = ln(140/7) = ln(20)$
Querschnitt im Mittel: wegen $\Sigma_\phi = 0$ folgt $\phi_Q = -ln(20)$

b) Eine Bramme wird in einer Walzanlage über 24 Stufen von 80 cm auf 20 cm reduziert. Es findet keine Breitung statt. Wie sind die Umformgrade in Länge, Breite und Höhe, wie viel länger ist das Stück nach dem Walzen?
Höhe: $h_n = 1/4h_v \quad \phi_h = -ln(4)$
Breite: $b_n = b_v \quad \phi_b = ln(1) = 0$
Länge: wg. Volumenkonstanz: $l_n = 4l_v \quad \phi_l = ln(4)$

c) Ein Alu-Blech wird in 54 Schritten von 50 mm auf 0,05 mm heruntergewalzt. Breitung wird vernachlässigt. Es wird mit 1 m/s eingezogen. Wie schnell kommt es heraus? Berechnen Sie die Umformgrade.
Höhe: $h_n = 1/1000h_v \quad \phi_h = -ln(1000)$
Breite: $b_n = b_v \quad \phi_b = ln(1) = 0$
Länge: wg. Volumenkonstanz: $l_n = 1000l_v \quad \phi_l = ln(1000)$
Geschwindigkeit: aus Volumenkonstanz folgt Volumenstromkonstanz: $V_n = 1000V_v = 1000\,m/s$

d) Ein Alu-Block wird in einem Schritten zum Profil eines Fußballtores strangepresst. Der Durchmesser des Blocks sind 270 mm. Die Querschnittsfläche des Profils beträgt ca. 573 mm^2.
Er wird mit 1 m/s Vorschub eingepresst. Wie schnell kommt es heraus? Berechnen Sie die Umformgrade.
Querschnitt Block: $Q_v = 57255,5\,mm^2 \approx 57300\,mm^2$
Querschnitt Profil: $Q_n = 573\,mm^2$
Umformgrad Querschnitt: $\phi_q = -ln(100)$
Länge: wg. Volumenkonstanz: $l_n = 100l_v \quad \phi_l = ln(100)$
Geschwindigkeit: aus Volumenkonstanz folgt Volumenstromkonstanz: $V_n = 100V_v = 100\,m/s$

e) Für einen Werkstoff ist als maximaler Umformgrad 1 angegeben. Danach muss er zwischengeglüht werden, um wieder umformbar zu sein.
Sie wollen einen Stab auf die 6-fache Länge ziehen. Sie beginnen im geglühten Zustand. Wie oft müssen Sie zwischenglühen?
$\phi_l = ln(6) \approx 1,79$ daraus folgt, dass Sie einmal Zwischenglühen müssen.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 1.29: Variable v1

a) $-(-x) - 2x + x = 0$

b) $x \cdot x^3 + 2x^2x^2 - 5x^4 = -2x^4$

c) $(-x)(-y) = xy$

d) $(a^b)^{(c+d)} = a^{[bc+bd]}$

e) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

f) $(e^{\ln(x^2)} - 2x^2) \cdot x + x^3 = (x^2 - 2x^2) \cdot x + x^3 = -x^2 \cdot x + x^3 = -x^3 + x^3 = 0$

g) $(x-y)^2 - y^2 + 2xy = x^2 - 2xy + y^2 - y^2 + 2xy = x^2$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 1.30: Terme v2

Gegeben sind die Terme $T_1 = 2 + 7$, $T_2 = 4 \cdot x - 1$, $T_3 = 8 \cdot y + 5$, $T_4 = -2 \cdot x - 3 \cdot y + 25$.

Fassen Sie so weit wie möglich zusammen:

a) $T_1 - T_2 + T_3 = \underbrace{(2+7)}_{T_1} - \underbrace{(4 \cdot x - 1)}_{T_2} + \underbrace{(8 \cdot y + 5)}_{T_3} = 9 - 4x + 1 + 8y + 5 = \boxed{-4x + 8y + 15}$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

b) $-T_2 + T_4 = -\underbrace{(4 \cdot x - 1)}_{T_2} + \underbrace{(-2 \cdot x - 3 \cdot y + 25)}_{T_4} = \boxed{-6x - 3y + 26}$

c) $T_2 + T_3 - T_4 = \underbrace{(4 \cdot x - 1)}_{T_2} + \underbrace{(8 \cdot y + 5)}_{T_3} - \underbrace{(-2 \cdot x - 3 \cdot y + 25)}_{T_4} = \boxed{6x + 11y - 21}$

d) $T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = \underbrace{(2+7)}_{T_1} + \underbrace{(4 \cdot x - 1)}_{T_2} + \underbrace{(8 \cdot y + 5)}_{T_3} + \underbrace{(-2 \cdot x - 3 \cdot y + 25)}_{T_4} =$
$2+7+4x-1+8y+5+(-2x-3y+25) = 9+4x-1+8y+5-2x-3y+25 = 4x-2x+8y-3y+9-1+25 =$
$\boxed{2x + 5y + 38}$

e) $T_1 \cdot T_2 + T_3 \cdot T_4 = \underbrace{(2+7)}_{T_1} \cdot \underbrace{(4 \cdot x - 1)}_{T_2} + \underbrace{(8 \cdot y + 5)}_{T_3} \cdot \underbrace{(-2 \cdot x - 3 \cdot y + 25)}_{T_4} =$

Zuerst lösen wir den Term T_1 auf:

$$9 \cdot (4x - 1) + (8y + 5) \cdot (-2x - 3y + 25)$$

Multiplizieren wir die Terme aus:

$$9 \cdot 4x - 9 \cdot 1 + (8y) \cdot (-2x) + (8y) \cdot (-3y) + (8y) \cdot 25 + 5 \cdot (-2x) + 5 \cdot (-3y) + 5 \cdot 25$$

$$= 36x - 9 - 16xy - 24y^2 + 200y - 10x - 15y + 125$$

Nun fassen wir ähnliche Terme zusammen:

$$(36x - 10x) + (-16xy) + (-24y^2) + (200y - 15y) + (-9 + 125)$$

$$= \boxed{26x - 16xy - 24y^2 + 185y + 116}$$

Das ist die vereinfachte Lösung des Ausdrucks.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 1.31: Rechnen mit Termen (1) v1

a) Vereinfache den Term: $3x + 4x - 2x + 5$. $3x + 4x - 2x + 5 = 5x + 5$

Erklärung: Die Terme mit x werden zusammengefasst: $3x + 4x - 2x = 5x$.

b) Berechne den Term für $x = 2$: $2x^2 + 3x - 5$. $2x^2 + 3x - 5$ für $x = 2$:
$2(2)^2 + 3(2) - 5 = 2(4) + 6 - 5 = 8 + 6 - 5 = 9$.

c) Vereinfache den Term: $5a - 3b + 2a + 7b$. $5a - 3b + 2a + 7b = 7a + 4b$

Erklärung: Die Terme mit a und b werden jeweils zusammengefasst: $5a + 2a = 7a$, $-3b + 7b = 4b$.

d) Multipliziere aus: $(x + 2)(x - 3)$. $(x + 2)(x - 3) = x^2 - 3x + 2x - 6 = x^2 - x - 6$

Erklärung: Multipliziere die Terme aus und fasse dann zusammen.

e) Faktorisieren Sie den Term: $x^2 - 9$. $x^2 - 9 = (x - 3) \cdot (x + 3)$

Erklärung: Dies ist eine binomische Formel ($a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$).

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 1.32: Rechnen mit Termen (2) v1

a) $-(-x) - 2x + x = 0$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

b) $(-x)(-y) = xy$

c) $\sqrt{25} - \sqrt{9} - \sqrt{4} = 0$

d) $(s+t)(s+t) + (s-t)(s-t) + 2(s+t)(s-t) = 4s^2$

e) $(2s-3t)(3s-2t) - 6(s-t)(s+t) - 12t(t-s) + st = 0$

f) $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) + \beta^2 = \alpha^2$

g) $64x^{12}y + 128x^{11}y - 32x^{10}y = 32x^{10}y(2x^2+4x-1)$

h) $2\cos(a)\cos(b) + \cos(a)^2 + \cos(b)^2 =$

(Gedanklicher) Zwischenschritt: Definiere $x := \cos(a); y := \cos(b)$

$2\cos(a)\cos(b) + \cos(a)^2 + \cos(v)^2 \overset{\text{Substitution}}{\Longleftrightarrow} 2xy + x^2 + y^2 = (x+y)^2$

$\overset{\text{Re-Substitution}}{\Longleftrightarrow} \big(\cos(a) + \cos(b)\big)^2$

i) $\ln(1) \cdot \left[\cosh\big(\ln(\mathrm{e}^y)\big) \cdot \sin(\mathrm{e}^{\ln y}) + \dfrac{1}{\cosh\big(\ln(\mathrm{e}^y)\big) \cdot \sin\big(\mathrm{e}^{\ln y}\big)}\right] = 0$, da $\ln(1) = 0$

Immer den Überblick behalten!

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 1.33: Zins und Zinseszins v1

a) Ein Anleger investiert 1.000 Euro zu einem Zinssatz von 5% pro Jahr. Wie hoch ist das Kapital nach 3 Jahren bei jährlicher Verzinsung?
Das Kapital nach 3 Jahren beträgt: $K = 1000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^3 = 1000 \cdot 1.157625 = 1157,63$ Euro

b) Ein Betrag von 5.000 Euro wird für 4 Jahre zu einem Zinssatz von 3% pro Jahr angelegt. Wie hoch ist das Endkapital?
Das Endkapital nach 4 Jahren beträgt: $K = 5000 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^4 = 5000 \cdot 1.125509 = 5627,54$ Euro

c) Ein Kredit von 10.000 Euro wird mit 7% verzinst. Wie viel Zinsen fallen nach 2 Jahren an?
Die Zinsen betragen: $Z = 10000 \cdot \frac{7}{100} \cdot 2 = 1400$ Euro

d) Ein Betrag von 8.000 Euro wird für 5 Jahre bei einem Zinssatz von 4% pro Jahr angelegt. Berechne das Endkapital bei jährlicher Verzinsung.
Das Endkapital beträgt: $K = 8000 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^5 = 8000 \cdot 1.216653 = 9733,22$ Euro

e) Ein Anleger möchte nach 6 Jahren 15.000 Euro erhalten. Zu welchem Zinssatz muss er einen Betrag von 12.000 Euro anlegen?
$15000 = 12000 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^6$; $\left(1 + \frac{r}{100}\right) = \sqrt[6]{\frac{15000}{12000}} \approx 1,03789$ $r = 3,79\%$

f) Ein Kredit über 20.000 Euro wird mit 5% verzinst. Wie hoch ist das Kapital nach 3 Jahren bei Zinseszinsberechnung?
Das Kapital nach 3 Jahren beträgt: $K = 20000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^3 = 20000 \cdot 1.157625 = 23152,50$ Euro

g) Ein Anleger investiert 15.000 Euro für 7 Jahre zu einem Zinssatz von 4%. Wie hoch ist der Zinsertrag nach 7 Jahren?
Der Zinsertrag beträgt: $Z = 15000 \cdot \left(\left(1 + \frac{4}{100}\right)^7 - 1\right) = 15000 \cdot (1,31593177923584 - 1) = 4.738,98$ Euro

h) Ein Betrag von 25.000 Euro wird für 8 Jahre zu einem Zinssatz von 3% angelegt. Welcher Betrag muss nach 8 Jahren zurückgezahlt werden?
Der Rückzahlungsbetrag beträgt: $K = 25000 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^8 = 25000 \cdot 1.26677 = 31669,25$ Euro

i) Ein Darlehen von 30.000 Euro wird für 5 Jahre zu 6% verzinst. Wie hoch ist der Endbetrag bei jährlicher Verzinsung?
Der Endbetrag beträgt: $K = 30000 \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right)^5 = 30000 \cdot 1.338225 = 40146,75$ Euro

j) Ein Investor legt 50.000 Euro für 10 Jahre zu einem Zinssatz von 4% pro Jahr an. Wie hoch ist das Kapital nach 10 Jahren?

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Das Kapital beträgt: $K = 50000 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^{10} = 50000 \cdot 1.48024 = 74012,00$ Euro

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 2.1: Logische Aussagen v1

Welche der folgenden sprachlichen Sätze sind Aussagen?

a) Prost! → Nein.

b) Wie viel Uhr ist es? → Nein (Frage).

c) Gustav liebt Hilda. → Ja.

d) $5 \cdot 10 + x^2$. → Nein.

e) Morgen ist Sonntag. → Nein.[a]

f) Mach doch bitte die Tür hinter Dir zu. → Nein (Aufforderung).

g) Mein Name ist Hase. → Ja.

h) Zu Fuß ist es weiter als über den Berg. → Nein.

i) Gute Nacht, Freunde! → Nein.

j) Es gibt keine gerade Primzahl. → Ja.

k) Wie spät ist es? → Nein (Frage).

l) Das Auto ist 3 Jahre alt. → Ja.

m) Alle Menschen sind verheiratet. → Ja.

n) $5 + 4 = 9$. → Ja.

o) Das Regal wiegt 80 kg. → Ja.

p) Nachts ist es kälter als draußen. → Nein.

q) Alle Tappel sind Deppel. → Ja.

r) 5+7+8+9+10. → Nein.

s) Morgen wird die Sonne wieder scheinen. → Nein (Aussageform).

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 2.2: Wahrheitsgehalt logischer Aussagen v1

a) Paris ist eine Hauptstadt. → Wahr.

b) Alle Primzahlen sind gerade. → Falsch.

c) 1970 ist eine ganze Zahl. → Wahr.

d) $10 > 100$. → Falsch.

e) $6 < 7 < 5$. → Falsch.

f) $\sqrt{7} = 3$. → Falsch

g) Berlin liegt in Bayern. → Falsch.

h) Frankfurt liegt am Rhein. → Falsch.

i) Alle Menschen sind gesund. → Falsch.

j) Alle Rechtecke sind Parallelogramme. → Wahr.

k) Die Quadratur des Kreises ist mit Zirkel und Lineal möglich. → Falsch.

l) Brüssel ist die Hauptstadt von Belgien. → Wahr.

m) Manche Menschen sind größer als andere. → Wahr.

[a] Formal: Aussageform, da „Morgen“ eine Variable ist; dies wird aber häufig fälschlich als Aussage bezeichnet.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

n) Der Februar hat mehr Tage als der Januar. → Falsch.

o) $5 + 7 + 8 = 20$. → Wahr.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 2.3: Aussageformen v1

Dies sind Beispiele – bei einigen Teilaufgaben sind viele andere Lösungen möglich.

a) X ist eine Hauptstadt. → X=Berlin.

b) Z hat mehr Tage als der Februar. → Z=Januar.

c) A ist eine Primzahl. → A=13.

d) Y ist eine ganze Zahl. → Y=42.

e) Z liegt am Rhein. → Z=Köln.

f) D ist die Hauptstadt von Italien. → D=Rom.

g) x ist kleiner als 25. → x=24.

h) V war deutscher Bundeskanzler. → V=Willy Brandt.

i) X und Y sind Module im ersten Semester. → X=Mathematik, Y=Physik.

j) X ist doppelt so groß wie Y. → X=84, Y=42.

k) a ist durch x teilbar. → a=15, x=3.

l) Wenn eine Zahl durch $a \cdot b$ teilbar ist, dann ist sie auch durch a und b teilbar.
→ a=7, b=11.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 2.4: Tautologien (1) v1

a) Tautologien sind Tautologien. → Ja.

b) Wenn x eine Primzahl ist, dann ist x nicht durch 2 teilbar. → Nein: $x = 2$ ist prim.

c) $a + b = b + a$. → Ja (Kommutativgesetz).

d) Wenn der Hahn kräht auf dem Mist, ändert sich das Wetter – oder es bleibt, wie es ist.
→ Ja.

e) Wenn es regnet, dann regnet es. → Ja.

f) $\sqrt{4} = 2$. → Nein: ± 2.

g) Wenn eine Zahl durch $a \cdot b$ teilbar ist, dann ist sie auch durch a und b teilbar.
→ Ja.

h) Heute ist Montag oder ein anderer Wochentag. → Ja.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 2.5: Kontradiktionen v1

a) Äpfel sind Birnen. → Ja.

b) Äpfel sind Rosengewächse. → Nein. Äpfel sind tatsächlich Rosengewächse.

c) Granatäpfel sind Äpfel. → Ja. Der Granatapfel zählt nicht zu den Äpfeln.

d) Ich bin ein Gelbfuß - Gelbfüße lügen immer.
→ Ja.

e) Ich bin ein Schwarzfuß - Schwarzfüße sagen immer die Wahrheit.
→ Nein.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

f) 1 ist 0. → Ja.

g) Wahr ist Falsch. → Ja.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 2.6: Korrekte Syntax v1

a) $\big(C \wedge (A \neg B)\big)$
→ Syntaktisch nicht korrekt, weil $(A \neg B)$ keine Formel ist.

b) $\Big(\big((\neg A) \vee B\big) \wedge \big((C \wedge A) \vee (C \vee D)\big)\Big)$
→ Ist eine syntaktisch korrekte Formel über A, B, C und D, **nicht aber** über A, B und C, weil D nicht definiert war.

c) $\Big(\Big(\neg\big((\neg B) \vee (\neg B)\big)\Big) \wedge \Big(\big(\neg\,(C \vee A)\big)\Big)$
→ Syntaktisch nicht korrekt, weil eine abschließende Klammer fehlt..

d) $\big(\neg(A \vee B \vee C)\big)$ Syntaktisch korrekt.

e) $\big(\neg(A \vee B \vee C)\big) \wedge \big((A \vee B \vee C)\big)$ Syntaktisch korrekt.

f) $\big(\neg(A \vee (\neg B) \vee (\neg C))\big) \wedge \big(((\neg A) \vee B \vee C)\big)$ Syntaktisch korrekt.

g) $\big(\neg(A \vee (\neg B) \vee (\neg C))\big) \wedge \big(((\neg A) \vee E \vee C)\big)$ Syntaktisch korrekt über A, B, C, aber nicht über E, weil E nicht definiert war.

h) $\big(\neg(A \vee (\neg B) \vee (\neg C))\big) \leftrightarrow \big(((\neg A) \vee B \vee C)\big)$ Syntaktisch korrekt, jedoch mathematisch falsch.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 2.7: Aussagenlogische Formeln v1

a) $A \vee B$
→ Wahr.

b) $A \wedge B$
→ Falsch.

c) $(\neg A) \vee B$
→ Wahr.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 2.8: Formalisieren sprachlicher Aussagen v1

Wir definieren die Aussagen:

A= „Ein hartgekochtes Ei wird mit kaltem Wasser abgeschreckt.“
B= „Die Schale klebt am Eiweiß.“
C= „Das Ei lässt sich gut schälen.“

Damit erhalten wir die Formalisierung:
$(\neg A) \rightarrow \big(B \wedge (\neg C)\big) = \big(\neg\,(\neg A)\big) \vee \big(B \wedge (\neg C)\big)$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 2.9: Wahrheitstafel v1

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

A	B	C	$(B \wedge C)$	$A \wedge (B \wedge C)$	$(A \wedge B)$	$(A \wedge C)$	$(A \wedge B) \wedge (A \wedge C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

Linke und rechte Seite der Äquivalenz sind gleich und alle Fälle sind erfasst → Die Aussage ist eine Tautologie.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 2.10: Tautologien (2) v1

Quelle: http://www.namzu.de/skripte/logik/Tautologie.html; Abruf 07-MAI-2023

a) $A \vee (A \wedge B) \quad \rightarrow \quad A$
→ Ja: http://www.namzu.de/skripte/logik/Tautologie.html Aufgabe 1

b) $A \wedge \big((\neg A) \vee B\big) \quad \rightarrow \quad A \wedge B$
→ Ja: http://www.namzu.de/skripte/logik/Tautologie.html Aufgabe 4

c) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \quad \rightarrow \quad A \wedge (B \vee C)$
→ Ja: http://www.namzu.de/skripte/logik/Tautologie.html Aufgabe 8

d) $(A \wedge B) \vee (C \wedge D) \quad \rightarrow \quad (A \vee C) \wedge (B \vee C) \wedge (A \vee D) \wedge (B \vee D)$
→ Ja: http://www.namzu.de/skripte/logik/Tautologie.html Aufgabe 9

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 2.11: äquivalente Formeln v1

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 2.12: Bedienungsanleitung v1

Quelle: https://homepages.thm.de/~hg8070/dm15/ueb01.pdf; Abruf 07-MAI-2023.

- Die fünf zusammen gesetzten Aussagen unter 1.a), 1.b), 1.c), 2. und 3. werden mit den vier atomaren Aussagen L, Q, B und N formuliert:

  1.a) wird zu: $\neg L \rightarrow Q$
  1.b) wird zu: $\neg L \rightarrow B$
  1.c) wird zu: $\neg L \leftrightarrow N$
  2. wird zu: $\neg Q \rightarrow B$
  3. wird zu: $\neg B$

  Wir haben vier atomare Aussagen. Eine Wahrheitstafel muss also 16 Zeilen haben, damit alle möglichen Belegungen der atomaren Aussagen mit Wahrheitswerten enthalten sind.

- Für jede der 16 Zeilen müssen wir die Wahrheitswerte der obigen 5 Aussagen bestimmen.

  Wenn es mindestens eine Zeile gibt, in der die 5 Aussagen alle wahr sind, dann sind die Spezifikationen konsistent.

  Ist aber in jeder Zeile der Wahrheitstafel mindestens eine der obigen Aussagen falsch, dann enthalten die Spezifikationen einen inneren Widerspruch, da sie nicht alle gleichzeitig erfüllbar sind, d. h. die Spezifikationen sind inkonsistent.

  Stellt man die Wahrheitstafel auf, so zeigt sich, dass bei genau einer Belegung von L, Q, D und N mit Wahrheitswerten alle Spezifikationen erfüllt werden können, d. h. die Spezifikationen sind

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

konsistent.

- Fallunterscheidung: Fall 1: B ist wahr. Dann ist die letzte Formel ($\neg B$) falsch. Eine konsistente Spezifikation ist damit nicht möglich, so dass wir Fall 1 nicht weiter zu untersuchen brauchen.

  Fall 2: B ist falsch. Die Aussagen 1.b) und 2. können nur dann wahr sein, wenn $\neg L$ und $\neg Q$ falsch, d. h. L und Q wahr sind.

  Wenn L wahr ist, d. h. $\neg L$ falsch, dann kann Aussage 1.c) nur wahr sein, wenn N falsch ist. Die Spezifikationen können also nur konsistent sein, wenn L wahr, Q wahr, B falsch und N falsch sind.

  Wir sind noch nicht fertig!

  Wir wissen: die Aussagen 1.b), 1.c), 2. und 3. sind wahr. Aber 1.a) muss noch überprüft werden!

  Bei der hergeleiteten Belegung von L, Q, B und N ist aber auch 1.a) wahr.

  Also ist das System konsistent, und darüber hinaus ist die Belegung der atomaren Aussagen eindeutig.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 2.13: Prädikatenlogik (1) v1

Quelle: a) ... e) OpenAI ChatGPT

a) Zeigen Sie, dass die folgende Aussage wahr ist: $\forall x\,(x^2 \geq 0)$.

Die Aussage lautet „Für alle x gilt $x^2 \geq 0$“. Diese Aussage ist wahr, da das Quadrat einer beliebigen Zahl immer größer oder gleich null ist. Das bedeutet, dass x^2 immer nicht negativ ist, egal welchen Wert x annimmt. Daher ist die Aussage wahr.

b) Beweisen Sie die folgende Existenzbehauptung: $\exists x\,(x^2 = 4)$.

Die Aussage lautet „Es existiert ein x, so dass $x^2 = 4$“. Die Werte, die diese Gleichung erfüllen, sind $x = 2$ und $x = -2$. Da es mindestens einen Wert für x gibt, der die Gleichung erfüllt, ist die Aussage wahr.

c) Überprüfen Sie die Gültigkeit der Aussage

$$\forall x\,\big(\exists y\,(y = x + 1)\big).$$

Präzisierung: Wir lesen die Quantoren mit einer festen Grundmenge D und schreiben

$$\forall x \in D\ \exists y \in D\ (y = x + 1).$$

Direkter Beweis (für $D \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$): Sei $x \in D$ beliebig. Definiere $y := x + 1$. Da die genannten Zahlbereiche unter der Operation $z \mapsto z + 1$ abgeschlossen sind, gilt $y \in D$. Nach der Definition von y ist $y = x + 1$. Also existiert zu jedem $x \in D$ ein $y \in D$ mit $y = x + 1$. Da x beliebig war, folgt

$$\forall x \in D\ \exists y \in D\ (y = x + 1).$$

Damit ist die Aussage *wahr* über $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$. ■

Hinweis zur Domäne: Ist D *nicht* unter $+1$ abgeschlossen, kann die Aussage *falsch* sein. Gegenbeispiel: Wähle $D = \{0\}$. Für $x = 0$ gäbe es ein $y \in D$ mit $y = 0 + 1 = 1$, aber $1 \notin D$. Also gilt in diesem D die Aussage nicht.

d) Widerlegen oder bestätigen Sie die folgende Aussage: $\exists x\,\forall y\,(x \geq y)$.

Die Aussage lautet „Es existiert ein x, so dass $x \geq y$ für alle y gilt“. Diese Aussage ist falsch, da es kein einzelnes x gibt, das größer oder gleich jedem y ist. Zum Beispiel gibt es keinen größten Wert für x, der größer oder gleich jedem anderen y ist. Daher ist die Aussage falsch.

e) Bestimmen Sie den Wahrheitsgehalt der folgenden Aussage: $\forall x\,\exists y\,(y > x)$.

Die Aussage lautet „Für alle x gibt es ein y, so dass $y > x$“. Diese Aussage ist wahr, da für jede Zahl x immer eine größere Zahl y gefunden werden kann (zum Beispiel $y = x + 1$). Daher ist die Aussage wahr.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 2.14: Prädikatenlogik (2) v1

Quelle: a) ... e) OpenAI ChatGPT; f) ... h) vgl. [[MERZ21]] S. 15f.

a) Negieren Sie die folgende Aussage: $\forall x\,(x^2 > 0)$.

Die Negation eines Allquantors $\forall x\,P(x)$ ist $\exists x\,\neg P(x)$. Die Negation der Aussage „Für alle x gilt $x^2 > 0$“ lautet also: $\exists x\,(x^2 \leq 0)$.

Das bedeutet, es gibt mindestens ein x, für das x^2 kleiner oder gleich null ist. Diese Aussage ist wahr, weil zum Beispiel $x = 0$ $x^2 = 0$ ist.

b) Negieren Sie die folgende Aussage: $\exists x\,(x^2 = 4)$.

Die Negation eines Existenzquantors $\exists x\,P(x)$ ist $\forall x\,\neg P(x)$. Die Negation der Aussage „Es existiert ein x, so dass $x^2 = 4$“ lautet also: $\forall x\,(x^2 \neq 4)$.

Das bedeutet, für jedes x gilt, dass x^2 nicht gleich 4 ist. Diese Aussage ist falsch, weil es konkrete Werte für x gibt (z.B. $x = 2$ und $x = -2$), für die $x^2 = 4$ gilt.

c) Negieren Sie die folgende Aussage: $\forall x\,(\exists y\,(y \geq x))$.

Die Negation eines Allquantors mit einem inneren Existenzquantor $\forall x\,(\exists y\,P(x,y))$ ist $\exists x\,\forall y\,\neg P(x,y)$. Die Negation der Aussage „Für alle x existiert ein y, so dass $y \geq x$“ lautet also: $\exists x\,\forall y\,(y < x)$.

Das bedeutet, es gibt mindestens ein x, so dass für alle y gilt, dass y kleiner als x ist. Diese Aussage ist falsch, weil für jede Zahl x immer eine größere Zahl y gefunden werden kann.

d) Negieren Sie die folgende Aussage: $\exists x\,\forall y\,(x > y)$.

Die Negation eines Existenzquantors mit einem inneren Allquantor $\exists x\,\forall y\,P(x,y)$ ist $\forall x\,\exists y\,\neg P(x,y)$. Die Negation der Aussage „Es existiert ein x, so dass $x > y$ für alle y gilt“ lautet also: $\forall x\,\exists y\,(x \leq y)$.

Das bedeutet, für jede Zahl x gibt es mindestens ein y, so dass x kleiner oder gleich y ist. Diese Aussage ist wahr, weil es immer ein y geben kann, das größer oder gleich jedem gegebenen x ist.

e) Negieren Sie die folgende Aussage: $\forall x\,\exists y\,(y = x + 2)$.

Die Negation eines Allquantors mit einem inneren Existenzquantor $\forall x\,\exists y\,P(x,y)$ ist $\exists x\,\forall y\,\neg P(x,y)$. Die Negation der Aussage „Für alle x existiert ein y, so dass $y = x + 2$“ lautet also: $\exists x\,\forall y\,(y \neq x + 2)$.

Das bedeutet, es gibt mindestens ein x, so dass für alle y gilt, dass y nicht gleich $x + 2$ ist. Diese Aussage ist falsch, da für jedes x immer ein y gefunden werden kann, das gleich $x + 2$ ist.

f) Negieren Sie die folgende Aussage: $n \geq n_0 \;\Rightarrow\; |\,a_n\,| < \varepsilon$.

Diese Aussage ist eine Implikation $(B \Rightarrow C)$. Also:

$$\begin{aligned}
\overline{B \Rightarrow C} &= \overline{\overline{B} \vee C} && \text{(Ersetzen der Implikation)} \\
&= \overline{\overline{B}} \wedge \overline{C} && \text{(de Morgan)} \\
&= B \wedge \overline{C} && \text{(doppelte Verneinung)}
\end{aligned}$$

Die Negation von $n \geq n_0 \;\Rightarrow\; |\,a_n\,| < \varepsilon$ ist also $n \geq n_0 \;\wedge\; |\,a_n\,| \geq \varepsilon$.

g) Negieren Sie die folgende Aussage: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N} A(n, n_0)$ gilt.

$$\begin{aligned}
\overline{\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ A(n,n_0)} &= \exists \varepsilon > 0\ \overline{\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ A(n,n_0)} \\
&= \exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \ \overline{\forall n \in \mathbb{N},\ A(n,n_0)} \\
&= \exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \ \exists n \in \mathbb{N},\ \overline{A(n,n_0)}
\end{aligned}$$

h) Negieren Sie die folgende Aussage: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n \geq n_0 \;\Rightarrow\; |\,a_n\,| < \varepsilon$. Beschreiben Sie mit Worten, was die inhaltliche Bedeutung dieser Aussage ist.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Bedeutung: (a_n) ist eine Nullfolge. Negieren:

$$\begin{aligned}&\overline{\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ \ \big(n \geq n_0\ \Rightarrow\ |a_n| < \varepsilon\big)}\\ =&\exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \ \exists n \in \mathbb{N}\ \ \big(n \geq n_0\ \wedge\ |a_n| \geq \varepsilon\big)\end{aligned}$$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 2.15: Direktes Beweisen v1

a) Vereinfache den Bruch $^{18}/_{24}$. Zähler und Nenner durch ihren größten gemeinsamen Teiler (GGT) teilen.
GGT(18, 24) = 6.
$18 \div 6 = 3$, $24 \div 6 = 4$.
Ergebnis: $^{18}/_{24} = {}^{3}/_{4}$.

b) Beweise die Gültigkeit der Aussage: Wenn eine Zahl positiv ist, dann ist sie größer als 0. Beweis per Logik, kein Code nötig
Prämisse: Positiv bedeutet größer als 0.
Schlussfolgerung: Wenn $x > 0$, dann $x > 0$.
Das ist eine triviale Identität: Die Bedingung führt direkt zur Folgerung.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 2.16: Indirektes Beweisen v1

a) Behauptung P: Es gibt keine größte natürliche Zahl. Beweis durch Widerspruch:
Annahme $\neg P$: Es gibt eine größte natürliche Zahl N.
Dann ist $N + 1$ eine natürliche Zahl, und per Annahme müsste $N + 1 \leq N$ gelten, da N die größte Zahl ist. Das führt zu einem Widerspruch.
Also ist die Annahme falsch; es gibt keine größte natürliche Zahl.

b) Behauptung P: Es gibt keine reelle Zahl x mit $0 < x < 1$, die die Gleichung $x^2 = x$ erfüllt. (Klarstellung: Die Gleichung $x^2 = x$ hat im Intervall $[0, 1]$ genau die Lösungen $x = 0$ und $x = 1$.) Beweis (Widerspruch): Angenommen, die Behauptung sei falsch. Dann existiert ein x mit $0 < x < 1$ und $x^2 = x$. Daraus folgt

$$0 = x^2 - x = x(x - 1).$$

Nach der Nullproduktregel ist dann $x = 0$ oder $x = 1$. Beides steht im Widerspruch zu $0 < x < 1$. Also kann es kein $x \in]0, 1[$ mit $x^2 = x$ geben. Damit hat $x^2 = x$ in $[0, 1]$ genau die Lösungen $x = 0$ und $x = 1$. ■

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 2.17: Vollständige Induktion (1) v1

Induktionsanfang: Linke Seite $\sum_{k=1}^{1}(2 \cdot 1 - 1) = 1$; Rechte Seite: $1^2 = 1$ ✓

Induktionsvoraussetzung: $\sum_{k=1}^{n}(2 \cdot k - 1) = n^2$

Induktionsbehauptung: $\sum_{k=1}^{n+1}(2 \cdot k - 1) = (n + 1)^2$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Induktionsschritt:
$$\sum_{k=1}^{n+1}(2\cdot k-1) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n}(2\cdot k-1)}_{=n^2 \text{ lt. Voraussetzung}} + \big(2\cdot(n+1)-1\big)$$
$$= n^2+2\cdot n+2-1 = n^2+2\cdot n+1 = (n+1)^2 \qquad \blacksquare$$

Quelle: https://de.wikibooks.org/wiki/Aufgabensammlung_Mathematik:_Summe_%C3%BCber_ungerade_Zahlen; Abruf 25-OKT-2021
Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 2.18: Vollständige Induktion (2) v1

Induktionsanfang: Linke Seite $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1$;

Rechte Seite: $\frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1)}{6} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = 1$ ✓

Induktionsvoraussetzung: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6}$

Induktionsbehauptung: $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(2\cdot n+3)}{6}$

Induktionsschritt:
$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^2}_{=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6} \text{ lt. Voraussetzung}} + (n+1)^2$$
$$= \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)+6\cdot(n+1)^2}{6}$$
$$= \frac{(n+1)\cdot\big(n\cdot(2\cdot n+1)+6\cdot(n+1)\big)}{6} = \frac{(n+1)\cdot(2\cdot n^2+n+6\cdot n+6)}{6}$$
$$= \frac{(n+1)\cdot(2\cdot n^2+3\cdot n+4\cdot n+6)}{6} = \frac{(n+1)\cdot\big(n\cdot(2\cdot n+3)+2\cdot(2\cdot n+3)\big)}{6}$$
$$= \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(2\cdot n+3)}{6} \qquad \blacksquare$$

Quelle: https://de.wikibooks.org/wiki/Aufgabensammlung_Mathematik:_Summe_%C3%BCber_Quadratzahlen; Abruf 25-OKT-2021
Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 2.19: Vollständige Induktion (3) v1

Beweis mittels vollständiger Induktion.

(Wolfram|Alpha: » prove by induction sum_{k=1}^n k^3 = (n^2 (n+1)^2) / 4 «)

Induktionsanfang für $n = 1$:

Linke Seite der Behauptung:

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1$$

Rechte Seite der Behauptung:

$$\frac{1^2\cdot(1+1)^2}{4} = 1$$

Das stimmt überein. Somit formulieren wir die **Voraussetzung**:

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$ sei bewiesen für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Schluss von n auf $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + \sum_{k=n+1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \underbrace{\frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}}_{\text{gemäß Voraussetzung}} + (n+1)^3$$

$$= \frac{n^4 + 2 \cdot n^3 + n^2}{4} + \frac{4 \cdot n^3 + 12 \cdot n^2 + 12 \cdot n + 4}{4} = \frac{n^4 + 6 \cdot n^3 + 13 \cdot n^2 + 12 \cdot n + 4}{4}$$

Polynomdivision des Zählers:

$$n^4 + 6 \cdot n^3 + 13 \cdot n^2 + 12 \cdot n + 4 : (n+1)^2$$
$$= n^4 + 6 \cdot n^3 + 13 \cdot n^2 + 12 \cdot n + 4 : (n^2 + 2 \cdot n + 1) = n^2 + 4 \cdot n + 4$$

Damit erhalten wir:

$$\frac{n^4 + 6 \cdot n^3 + 13 \cdot n^2 + 12 \cdot n + 4}{4} = \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2}{4}$$

Das ist die Behauptung für $n+1$. ■

Quelle: https://de.wikibooks.org/wiki/Aufgabensammlung_Mathematik:_Summe_%C3%BCber_Kubikzahlen; Abruf 20-OKT-2021
Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 2.20: Vollständige Induktion (4) v1

Induktionsanfang: Linke Seite $\cos(1 \cdot \pi) = \cos(\pi) = -1$; Rechte Seite: $(-1)^1 = -1$ ✓

Induktionsvoraussetzung: $\cos(n \cdot \pi) = (-1)^n$

Induktionsbehauptung: $\cos\big((n+1) \cdot \pi\big) = (-1)^{n+1}$

Induktionsschritt: $\cos\big((n+1) \cdot \pi\big) = \cos(n \cdot \pi + \pi)$

$$= \underbrace{\cos(n \cdot \pi)}_{=(-1)^n \text{ lt. Voraussetzung}} \cdot \underbrace{\cos(\pi)}_{=(-1)} - \sin(n \cdot \pi) \cdot \underbrace{\sin(\pi)}_{=0}$$
$$= (-1)^n \cdot (-1) - 0 = (-1)^{n+1}$$ ■

Quelle: https://de.wikibooks.org/wiki/Aufgabensammlung_Mathematik:_Beweis_einer_Identit%C3%A4t; Abruf 25-OKT-2021Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 2.21: Vollständige Induktion (5) v1

Induktionsanfang: $0^5 - 0 = 0$; 0 ist durch jede Zahl (außer 0) teilbar. ✓

Induktionsvoraussetzung: $n^5 - n$ ist durch 5 teilbar.

Induktionsbehauptung: $(n+1)^5 - (n+1)$ ist durch 5 teilbar.

Induktionsschritt: $(n+1)^5 - (n+1) = n^5 + 5 \cdot n^4 + 10 \cdot n^3 + 10 \cdot n^2 + 5 \cdot n + 1 - n - 1$

$$= \underbrace{(n^5 - n)}_{\text{durch 5 teilbar lt. Voraussetzung}} + \underbrace{5 \cdot (n^4 + 2 \cdot n^3 + 2 \cdot n^2 + n)}_{\text{offensichtlich durch 5 teilbar}}$$ ■

Quelle: https://de.wikibooks.org/wiki/Aufgabensammlung_Mathematik:_Teilbarkeit_durch_5; Abruf 25-OKT-2021
Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 2.22: Vollständige Induktion (6) v1

http://www.wolframalpha.com/input/?i=prove+by+induction+that+sum+i%3D1+to+n+i+*+i!+%3D+(n%2B1)!+-+1

Beweis mit Hilfe der vollständigen Induktion:

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

1. Induktionsanfang für $n = 1$:

Linke Seite: $1 \cdot 1! = 1 \cdot 1 = 1$

Rechte Seite: $(1+1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1$ $\Rightarrow$ Die Behauptung ist für $n = 1$ wahr.

2. Induktionsvoraussetzung:

Die Behauptung

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$$

sei für ein bestimmtes n bewiesen.

3. Induktionsschluss von $n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! && + \sum_{k=n+1}^{n+1} k \cdot k! \\
&= \underbrace{(n+1)! - 1}_{\text{laut Voraussetzung}} && + (n+1) \cdot (n+1)! \\
&= -1 + (n+1)! + n \cdot (n+1)! + (n+1)! \\
&= -1 + 2 \cdot (n+1)! + n \cdot (n+1)! \\
&= \underbrace{(n+1)! \cdot (n+2)}_{(n+2)!} - 1 \\
&= (n+2)! - 1 \qquad \Rightarrow \text{Das ist die Behauptung für } n+1
\end{aligned}$$

■

Quelle: https://www.emath.de/Referate/induktion-aufgaben-loesungen.pdf; Nr. B 14; Abruf 20-OKT-2021
Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 2.23: Vollständige Induktion (7) v1

Induktionsanfang: $n = 0: \quad x^0 = \dfrac{x^1 - 1}{x - 1} = 1$ ✓

Induktionsvoraussetzung: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$

Induktionsbehauptung: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \frac{x^{n+2} - 1}{x - 1}$

Beweis: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k + \sum_{k=n+1}^{n+1} x^k = \underbrace{\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}}_{\text{lt. Voraussetzung}} + x^{n+1}$

$$= \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} + \frac{(x^{n+1}) \cdot (x - 1)}{x - 1} = \frac{x^{n+1} - 1 + x^{n+2} - x^{n+1}}{x - 1} = \frac{x^{n+2} - 1}{x - 1}$$

■

Quelle: http://www.carsten-erdmann.de/files/Analysis_1_1_Uebungsskript.pdf; Nr. 4.7 (Seite 54); Abruf 27-OKT-2021
Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 2.24: Vollständige Induktion (8) v1

Induktionsbeginn für $n = 2$: Linke Seite $\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$; Rechte Seite $\dfrac{1}{2}$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Induktionsvoraussetzung: Es gelte $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{n}$

Induktionsschluss: $\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\underbrace{\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)}_{=\frac{1}{n}\text{lt. Vorauss.}}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1-1}{n+1}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$$ ■

Quelle: https://www.emath.de/Referate/induktion-aufgaben-loesungen.pdf; Nr. C2; Abruf 25-OKT-2021.
Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 2.25: Vollständige Induktion (9) v1

Induktionsanfang für $n=1$:

$(1+h)^1 \geq 1+1\cdot h \quad \rightarrow$ wahr.

Induktionsvoraussetzung:

Für ein gewisses n sei bereits bewiesen: $(1+h)^n \geq 1+n\cdot h$.

Schluss von n auf $n+1$:

Aus $1+h\geq 0$ (da $h\geq -1$) folgt:

$$(1+h)^{n+1}=(1+h)^n\cdot(1+h)\geq \underbrace{(1+n\cdot h)}_{\text{Voraussetzung}}\cdot(1+h)=1+(n+1)\cdot h+n\cdot h^2\geq 1+(n+1)\cdot h$$

Der ganz rechts stehende Term ist die Behauptung für $n+1$. ■

Quelle: https://www.emath.de/Referate/induktion-aufgaben-loesungen.pdf Nr. D 17; Abruf 20-OKT-2021.
Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 2.26: Vollständige Induktion (10) v1

Induktionsanfang für $n=3$:

$n\cdot\sqrt{n}=3\cdot\sqrt{3}\approx 5{,}196$; $n+\sqrt{n}=3+\sqrt{3}\approx 4{,}732 \Rightarrow 3\cdot\sqrt{3}>3+\sqrt{3} \quad \rightarrow$ wahr.

Induktionsvoraussetzung:

Für ein gewisses n sei bereits bewiesen: $n\cdot\sqrt{n}>n+\sqrt{n}$.

Schluss von n auf $n+1$:

$$\begin{aligned}(n+1)\cdot\sqrt{n+1}&=n\cdot\sqrt{n+1}+1\cdot\sqrt{n+1}\\ &> \underbrace{n\cdot\sqrt{n}}_{\text{linker Voraussetzungsterm}} +\sqrt{n+1} \quad (\text{da } n>2\Rightarrow\sqrt{n+1}>\sqrt{n})\\ &> \underbrace{n+\sqrt{n}}_{\text{laut Voraussetzung}} +\sqrt{n+1}\\ &> n+1+\sqrt{n+1} \quad (\text{da } n>2\Rightarrow\sqrt{n}>1)\end{aligned}$$

Der ganz unten stehende Term ist die Behauptung für $n+1$. ■

Quelle: https://www.emath.de/Referate/induktion-aufgaben-loesungen.pdf; Nr. D 14; Abruf 20-OKT-2021
Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 2.27: Vollständige Induktion (11) v1

Induktionsanfang für $n=1$:

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

$1+a < \dfrac{1}{1-a} \Leftrightarrow 1-a^2 < 1 \qquad \rightarrow$ wahr für alle $a \neq 0$.

Induktionsvoraussetzung:

Für ein gewisses n sei bereits bewiesen: $1+a+a^2+a^3+\cdots+a^n < \dfrac{1}{1-a}$.

Induktionsschluss:

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt durch Multiplikation mit a:

$$a+a^2+a^3+\ldots+a^{n+1} < \frac{a}{1-a}$$

Dann gilt:

$$1+a+a^2+a^3+\ldots+a^{n+1} < 1+\frac{a}{1-a} = \frac{1-a+a}{1-a} = \frac{1}{1-a}$$

Das ist die Behauptung für $n+1$. ■

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 2.28: Vollständige Induktion (12) v1

Beweis mit Hilfe der vollständigen Induktion:

Anfang für $n=1$:

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^1 \overbrace{=}^{???} \begin{pmatrix}1&n&\frac{n\cdot(n-1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix} \overbrace{=}^{\text{Für } n=1} \begin{pmatrix}1&1&\frac{1\cdot(1-1)}{2}\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Die Behauptung ist für $n=1$ wahr.

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für ein beliebiges n.

Schritt $n \longmapsto n+1$:

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{n} \cdot \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1&n&\frac{n\cdot(n-1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}}_{\text{Laut Voraussetzung}} \cdot \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1&n+1&n+\frac{n\cdot(n-1)}{2}\\0&1&n+1\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&n+1&\frac{2\cdot n}{2}+\frac{n^2-n}{2}\\0&1&n+1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1&n+1&\frac{n^2+n}{2}\\0&1&n+1\\0&0&1\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1&n&\frac{n\cdot(n-1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}}_{\text{Das ist die Behauptung für } n+1} \qquad \text{q.e.d.}$$

Quelle: https://www.emath.de/Referate/induktion-aufgaben-loesungen.pdf; Nr. G 9; Abruf 20-OKT-2021

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 2.29: Vollständige Induktion (13) v1

Induktionsanfang für $n = 1$:

$$\boldsymbol{A}^1 = 3^{1-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}$$

Induktionsvoraussetzung:

Für n gelte: $\boldsymbol{A}^n = 3^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Induktionsschluss von n auf $n+1$:

$$\boldsymbol{A}^{n+1} = \boldsymbol{A}^n \cdot \boldsymbol{A} = \underbrace{3^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{gemäß Voraussetzung}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 3^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} = 3^{n-1} \cdot 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3^n \cdot \boldsymbol{A} \qquad \blacksquare$$

Quelle: https://www.emath.de/Referate/induktion-aufgaben-loesungen.pdf; Nr. G 11; Abruf 20-OKT-2021

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 3.1: Natürliche Zahlen (1) v1

a) $F = \{\, x \mid x \text{ gerade } \wedge\ x \text{ Primzahl} \,\}$ $\rightarrow F = \{\, 2 \,\}$

b) $E = \{\, x \mid -5 \leq x \leq 5 \,\}$ $\rightarrow E = \{\, 1, 2, 3, 4, 5 \,\}$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 3.2: Einfache Mengenoperationen auf natürlichen Zahlen v1

a) $A \cap B$ $\rightarrow \{1, 5\}$

b) $A \cup B$ $\rightarrow \{1, 3, 5, 7, 9, 10, 15, 20\}$

c) $B \setminus C$ $\rightarrow \{1, 5, 10, 20\}$

d) $(C \cap B) \setminus A$ $\rightarrow \{15\}$

e) $(A \cup B) \setminus (C \cup D)$ $\rightarrow \{1, 7, 20\}$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 3.3: Natürliche Zahlen (2) v1

$M = \{\, 1, 2 \,\}$ und $N = \{\, 2, 3, 4 \,\}$.

% a) $M \subset N$ $\rightarrow$ Falsch.

b) $N \subset M$ $\rightarrow$ Falsch.

c) $M = N$ $\rightarrow$ Falsch.

d) $M \neq N$ $\rightarrow$ Wahr.

e) $\{\, 2, 4 \,\} \subset N$ $\rightarrow$ Wahr.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

f) $2 \in M$ → Wahr.

g) $3 \subset N$ → Falsch.

h) $\{3\} \subset N$ → Wahr.

i) $\{3\} \in N$ → Falsch.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 3.4: Aussagen zu natürlichen Zahlen v1

$A = \{\text{ungerade Zahlen beim Würfelwurf}\} = \{1, 3, 5\}$
$B = \{\text{Primzahlen beim Würfelwurf}\} = \{2, 3, 5\}$
$\Rightarrow \overline{A} = \{2, 4, 6\};\ \overline{B} = \{1, 4, 6\}$

a) $A \cap B$ → $\{3, 5\}$

b) $A \cup B$ → $\{1, 2, 3, 5\}$

c) $\overline{A} \cap \overline{B}$ → $\{4, 6\}$

d) $\overline{A \cap B}$ → $\{1, 2, 4, 6\}$

e) $\overline{A} \cup \overline{B}$ → $\{1, 2, 4, 6\}$

f) $\overline{A \cup B}$ → $\{4, 6\}$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 3.5: Korrekte Mengenbeschreibung v1

a) $A = \mathbb{Q}$, $B = \{1\}$ → $1 \in \mathbb{Q} \Rightarrow B \subset A$

b) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } x = 4 \cdot n\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist eine gerade Zahl}\}$
→ $2 \in B \wedge 2 \notin A \Rightarrow B \not\subset A$

c) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist eine gerade Zahl}\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } x = 4 \cdot n\}$
→ $\forall x \in B : \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } x = 2 \cdot (2 \cdot n) \Rightarrow B \subset A$

d) $A = \mathbb{Z}$, $B = \{\}$ → Da die leere Menge Teilmenge jeder Menge ist: $\Rightarrow B \subset A$

e) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < -1\}$ → $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < -1\} = \{\} \Rightarrow B \subset A$ (siehe Teilaufgabe d))

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 3.6: Einfache Mengenoperationen (1) v1

a) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 5\}$ → $A \cap B = \{5\}$

b) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > -1\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 1\}$ → $A \cap B = \{x \in \mathbb{Q} \mid -1 < x < 1\}$

c) $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{N}$ → $A \cap B = \mathbb{N}$, da $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$

d) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 5\}$ → $A \cap B = \emptyset$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 3.7: Einfache Mengenoperationen (2) v1

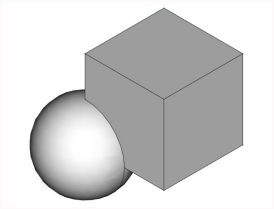
a) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 1\}$ → $A \cup B = \mathbb{Q}$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

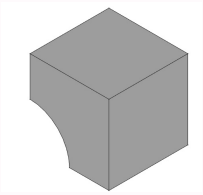
Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 3.8: Volumenoperationen v1

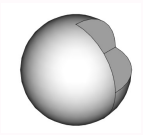
© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

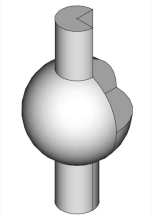
Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

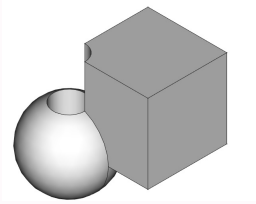
a) $W \cup K \rightarrow$ 

b) $W \cap K \rightarrow$ 

c) $W \setminus K \rightarrow$ 

d) $K \setminus W \rightarrow$ 

e) $(K \cup Z) \setminus W \rightarrow$ 

f) $(W \cup K) \setminus Z \rightarrow$ 

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 4.1: Aussagen zu Zahlenbereichen (1) v1

Aufgabe	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
-5	☐	☒	☒	☐	☒
$4{,}6$	☐	☐	☒	☐	☒
$\sqrt{3}$	☐	☐	☐	☒	☒
6	☒	☒	☒	☐	☒
$-\frac{1}{2}$	☐	☐	☒	☐	☒

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 4.2: Aussagen zu Zahlenbereichen (2) v1

a) -4 ist eine natürliche Zahl. → Falsch.

b) Jede rationale Zahl ist eine natürliche Zahl. → Falsch.

c) Jede ganze Zahl ist eine rationale Zahl. → Richtig.

d) Zwischen zwei natürlichen Zahlen liegt stets mindestens eine weitere natürliche Zahl. → Falsch.

e) Wenn man zwei natürliche Zahlen addiert, erhält man immer eine natürliche Zahl als Ergebnis. → Richtig.

f) Zwischen zwei rationalen Zahlen liegt stets mindestens eine weitere rationale Zahl. → Richtig.

g) Wenn man zwei ganze Zahlen durcheinander dividiert, erhält man stets eine ganze Zahl als Ergebnis. → Falsch.

h) $\sqrt{4}$ ist eine ganze Zahl. → Richtig.

i) Jede reelle Zahl ist eine irrationale Zahl. → Falsch.

j) Jede irrationale Zahl ist eine reelle Zahl. → Richtig.

k) Jede irrationale Zahl ist auch eine rationale Zahl. → Falsch.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 4.3: Zuordnung Zahlenbereiche v1

a) $|-8{,}1+7{,}9| \rightarrow |-8{,}1+7{,}9| \in \mathbb{Q}$

b) $|-\pi| \rightarrow |-\pi| \in \mathbb{R}$

c) $|\operatorname{sgn}(-5)\cdot(-5)| \rightarrow |\operatorname{sgn}(-5)\cdot(-5)| \in \mathbb{N}$

d) $|-\pi\cdot 5| \rightarrow |-\pi\cdot 5| \in \mathbb{R}$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 4.4: Mengenoperationen zu Zahlenbereichen v1

a) $I_1 \cup I_2 I_1 \cup I_2 = [-2, 8[$

b) $I_1 \setminus I_2 I_1 \setminus I_2 = [-2, 0]$

c) $I_1 \cap I_2 I_1 \cap I_2 =]0, 4]$

d) $\overline{I_2 I_2} =]-\infty, 0] \cup [8, \infty[$

Quelle: [Sche21] Nr. 2 3).

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 4.5: Operationen auf Zahlenbereichen v1

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

$$\sup\left\{2-\frac{1}{n^2}\,|n\in\mathbb{R}\right\}=2$$

Quelle: [Sche21] Nr. 2 4).
Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 4.6: Aussagen auf Zahlenbereichseigenschaften v1

Für $x\in[0,\infty[: \frac{3\cdot x+1}{2\cdot x+3}<\frac{3}{2}$ da $\frac{2\cdot(3\cdot x+1)}{3\cdot(2\cdot x+3)}<1$

wegen $6\cdot x+2<6\cdot x+9$

Aus $x\geq 0\Rightarrow \frac{3\cdot x+1}{2\cdot x+3}\geq\frac{1}{3}$

Somit gilt: $M\subset\left[\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right[$ Quelle: [Sche21] Nr. 2 5).
Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 4.7: Weitere Zahlenbereichsoperationen v1

1. $S:=\sup(A)+\sup(B)$ ist obere Schranke von $A+B$:
   Sei $x\in(A+B)$ beliebig. Dann $\exists\, a\in A\wedge\exists\, b\in B: x=a+b$.
   Weil $\sup(A)$ eine obere Schranke (o. S.) von A ist $\Rightarrow a\leq\sup(A)$. Genauso $\Rightarrow b\leq\sup(B)$.
   $\Rightarrow x=a+b\leq S$.
2. S ist kleinste obere Schranke von $A+B$:
   Betrachte $\sup(A)-\frac{\varepsilon}{2}$.
   Dies ist keine o. S. von A, weil $\sup(A)$ die kleinste war
   $\Rightarrow\exists\, a\in A: a>\sup(A)-\frac{\varepsilon}{2}$.
   Genauso $\exists\, b\in B: b>\sup(B)-\frac{\varepsilon}{2}$.
   $\Rightarrow x:=a+b>\sup(A)-\frac{\varepsilon}{2}+\sup(B)-\frac{\varepsilon}{2}=S-\varepsilon$.
   Weil $x\in A+B$, ist $S-\varepsilon$ keine o. S. von $A+B$, also ist S die kleinste. ■

Quelle: [Sche21] Nr. 2 6).
Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 4.8: Rudimentäre Beweisführung auf Zahlenbereichen v1

Zunächst wird gezeigt, dass $\left\{\left(\frac{1}{x}\right)^n \mid n\in\mathbb{N}_0\right\}$ nach oben unbeschränkt ist:

$x<^{\Rightarrow}\frac{1}{x}>1$, setze $\frac{1}{x}-1:=\delta>0\ \Rightarrow\ \left(\frac{1}{x}\right)^n=(1+\delta)^n\geq 1+n\cdot\delta$ (Bernoulli).

Nun betrachten wir $\{x^n\,|\,n\in\mathbb{N}_0\}$: $\Rightarrow x^n\leq\frac{1}{1+n\cdot\delta}$

Sei nun $\varepsilon>0$ beliebig. Es soll gezeigt werden, dass dann für großes n gilt:
$x^n\leq\varepsilon$.

Nach dem Satz von Archimedes $\exists\, n\in\mathbb{N}: n>\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon\cdot\delta}\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow x^n\leq\frac{1}{1+n\cdot\delta}<\frac{1}{1+\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon\cdot\delta}\cdot\delta}=\varepsilon\ \Rightarrow\ \inf\{x^n\,|\,n\in\mathbb{N}_0\}=0$ ■ Quelle: [Sche21] Nr. 2 7).
Hier geht es zurück zur Aufgabe.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 5.1: Zahlenbereichsübergänge (1)

a) $\operatorname{sgn}(-12{,}345) = -1$

b) $\operatorname{sgn}(256) = 1$

c) $\operatorname{sgn}(-3 \cdot \pi) = -1$

d) $\operatorname{sgn}\big((-2{,}5) \cdot (-\pi)\big) = 1$

e) $\operatorname{sgn}(-7 + 2 + 6) = 1$

f) $\operatorname{sgn}(14 - 6 - 8) = 0$

g) $\operatorname{sgn}(-\pi + 3{,}14159) = -1$

h) $\operatorname{sgn}(+\pi - 3{,}14159) = 1$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 5.2: Betragsfunktion [OpenAI2024g]

a) Löse die Gleichung $|x^2 - 4|$ für $x = 3$.

$$\begin{aligned} |3^2 - 4| &= |9 - 4| \\ &= |5| \\ &= 5 \end{aligned}$$

b) Löse die Gleichung $|2x - 5| = 7$.

$$\begin{aligned} 2x - 5 = 7 \quad &\Leftrightarrow \quad x = 6 \\ 2x - 5 = -7 \quad &\Leftrightarrow \quad x = -1 \\ &\Rightarrow \mathcal{L} = \{-1;\ 6\} \end{aligned}$$

c) Löse die Ungleichung $|3x + 2| \leq 8$.

$$\begin{aligned} -8 \leq 3x + 2 &\leq 8 \\ -8 - 2 \leq 3x &\leq 8 - 2 \\ -10 \leq 3x &\leq 6 \\ -\frac{10}{3} \leq x &\leq 2 \end{aligned}$$

d) Bestimme die Schnittpunkte der Funktionen $f(x) = |x - 2|$ und $g(x) = 3 - x$.

$$|x - 2| = 3 - x$$

Fall 1: $x - 2 = 3 - x$

$$\begin{aligned} x - 2 &= 3 - x \\ 2x &= 5 \\ x &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Fall 2: $-(x - 2) = 3 - x$

$$\begin{aligned} -x + 2 &= 3 - x \\ 2 &= 3 \quad \text{(keine Lösung)} \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt ist bei $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

e) Vereinfache den Ausdruck $|x^2 - 4x + 3|$ und bestimme die Nullstellen.

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$$

$$|(x - 1)(x - 3)| = \begin{cases} (x - 1)(x - 3) & \text{für } (x - 1)(x - 3) \geq 0 \\ -(x - 1)(x - 3) & \text{für } (x - 1)(x - 3) < 0 \end{cases}$$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Die Nullstellen sind bei $x = 1$ und $x = 3$.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 5.3: Betragsfunktion

Quelle: [Sche21] Nr. 2 1).

Quelle: Aufgaben 2-6 aus [**OpenAI2024aa**]

a) Was ergibt: $\dfrac{a+b+|a-b|}{2}$?

$$\frac{a+b+|a-b|}{2} = \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq b \\ b, & \text{falls } a < b \end{cases}$$

b) Löse die Gleichung $\frac{|x|}{2} = 1$.

$$\begin{aligned} \frac{|x|}{2} &= 1 \\ |x| &= 2 \\ x = 2 \quad &\text{oder} \quad x = -2 \end{aligned}$$

c) Bestimme die Lösung der Gleichung $\frac{|x-1|}{3} = 2$.

$$\begin{aligned} \frac{|x-1|}{3} &= 2 \\ |x-1| &= 6 \\ x-1 = 6 \quad &\text{oder} \quad x-1 = -6 \\ x = 7 \quad &\text{oder} \quad x = -5 \end{aligned}$$

d) Löse die Gleichung $\frac{|2x+3|}{4} = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \frac{|2x+3|}{4} &= \frac{1}{2} \\ |2x+3| &= 2 \\ 2x+3 = 2 \quad &\text{oder} \quad 2x+3 = -2 \\ 2x = -1 \quad &\text{oder} \quad 2x = -5 \\ x = -\frac{1}{2} \quad &\text{oder} \quad x = -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

e) Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung $\frac{|3x-2|}{x} = 4$.

$$\begin{aligned} \frac{|3x-2|}{x} &= 4 \\ \text{Fall 1:} \quad 3x-2 &= 4x \\ -x = 2 \quad &\Rightarrow \quad x = -2 \\ \text{Fall 2:} \quad -(3x-2) &= 4x \\ -3x+2 = 4x \quad &\Rightarrow \quad x = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

Lösungsmenge: $\{-2, \frac{2}{7}\}$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

f) Löse die Ungleichung $\frac{|4x+1|}{2x-3} > 1$.

Zunächst stört uns links der Nenner.

Wenn wir beide Seiten mit dem Nenner multiplizieren, müssen wir **Fallunterscheidungen** machen: Wenn der Nenner negativ wird, dreht sich das Relationssymbol bekanntlich um.

Für jeden dieser zwei Fälle müssen wir wiederum Fallunterscheidungen machen: Wenn der Term in den Betragsstrichen $4x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1/4$ ist, schreiben wir einfach $4x+1$; anderenfalls ($x < -1/4$) ist er negativ und wir müssen ihn mit -1 multiplizieren, um den Betrag zu erhalten: $|4x+1| \to -4x-1$.

- $2x-3=0$ Dieser Fall ist verboten (Division durch 0).
- $2x-3>0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 3/2 \quad : \dfrac{|4x+1|}{2x-3} > 1 \;\Leftrightarrow\; |4x+1| > 2x-3$
  - $x \geq -1/4$: $4x+1 > 2x-3 \;\Leftrightarrow\; 2x > -4 \;\Leftrightarrow\; x > -2 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x > 3/2}$
  - $x < -1/4$: $-4x-1 > 2x-3 \;\Leftrightarrow\; -6x > -2 \;\Leftrightarrow\; x < 1/3 \;\Rightarrow$ **Keine Lösung**
- $2x-3<0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 3/2 \quad : \dfrac{|4x+1|}{2x-3} < 1 \;\Leftrightarrow\; |4x+1| < 2x-3$
  - $x \geq -1/4$: $4x+1 < 2x-3 \;\Leftrightarrow\; 2x < -4 \;\Leftrightarrow\; x < -2 \;\Rightarrow$ **Keine Lösung**
  - $x < -1/4$: $-4x-1 < 2x-3 \;\Leftrightarrow\; -6x < -2 \;\Leftrightarrow\; x > 1/3 \;\Rightarrow$ **Keine Lösung**

Lösungsmenge: $x \in]3/2; \infty[$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 6.1: Unser gewohntes Zehnersystem

Quelle: Rolf B. Drescher, 19. Oktober 2023

a) $9 = 9 \cdot 10^0$

$$= \quad 9 \cdot 10^0 \qquad \frac{9}{9}$$

b) $40 = 4 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$

$$\begin{array}{rll} & 4 \cdot 10^1 & 40 \\ = + & 0 \cdot 10^0 & + \;\; 0 \\ \hline & & 40 \end{array}$$

c) $007 = 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$

$$\begin{array}{rll} & 0 \cdot 10^2 & 0 \\ & + \;\; 0 \cdot 10^1 & + \;\; 0 \\ = & + \;\; 7 \cdot 10^0 & + \;\; 7 \\ \hline & & 7 \end{array}$$

d) $726 = 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$

$$\begin{array}{rll} & 7 \cdot 10^2 & 700 \\ & + \;\; 2 \cdot 10^1 & + \;\; 20 \\ = & + \;\; 6 \cdot 10^0 & + \;\; 6 \\ \hline & & 726 \end{array}$$

e) $1.857 = 1 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$

$$\begin{array}{rll} & 1 \cdot 10^3 & 1.000 \\ & + \;\; 8 \cdot 10^2 & + \;\; 800 \\ = & + \;\; 5 \cdot 10^1 & + \;\; 50 \\ & + \;\; 7 \cdot 10^0 & + \;\; 7 \\ \hline & & 1.857 \end{array}$$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 6.2: Unser gewohntes Zehnersystem

Quelle: Rolf B. Drescher, 19. Oktober 2023

a) $0 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 = 8$

b) $9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0 = 990$

c) $6 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^0 = 463$

d) $2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 = 2.023$

e) $2 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^2 = 3.992$

f) $7 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 = 77.026$

g) $1 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^4 = 57.010$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 6.3: Ganzzahl-Division mit Rest

Quelle: Rolf B. Drescher, 20. Oktober 2023

a) $7 \div 2 = 3$ Rest 1

b) $4 \div 7 = 0$ Rest 4

c) $9 \div 0 =$ Geht nicht ... durch Null darf man nicht dividieren!

d) $10 \div 4 = 2$ Rest 2

e) $15 \div 5 = 3$ Rest 0

f) $23 \div 3 = 7$ Rest 2

g) $111 \div 22 = 5$ Rest 1

h) $231 \div 14 = 16$ Rest 7

i) $375 \div 68 = 5$ Rest 35

j) $918 \div 7 = 131$ Rest 1

k) $939 \div 236 = 3$ Rest 231

l) $1.234 \div 611 = 2$ Rest 12

m) $2.417 \div 3.659 = 0$ Rest 2.417

n) $12.318 \div 31 = 397$ Rest 11

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 6.4: Wandlung Zehner- in Zweier-System

Quelle: Rolf B. Drescher, 19. Oktober 2023

a) $(8)_{10} = (?)_2$
$8 \div 2 = 4$ Rest 0
$4 \div 2 = 2$ Rest 0
$2 \div 2 = 1$ Rest 0
$1 \div 2 = 0$ Rest 1
$\Rightarrow (8)_{10} = (1000)_2$

b) $(58)_{10} = (?)_2$
$58 \div 2 = 29$ Rest 0
$29 \div 2 = 14$ Rest 1
$14 \div 2 = 7$ Rest 0
$7 \div 2 = 3$ Rest 1
$3 \div 2 = 1$ Rest 1
$1 \div 2 = 0$ Rest 1

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

$\Rightarrow (58)_{10} = (11.1010)_2$

c) $(100)_{10} = (?)_2$
$100 \div 2 = 50$ Rest 0
$50 \div 2 = 25$ Rest 0
$25 \div 2 = 12$ Rest 1
$12 \div 2 = 6$ Rest 0
$6 \div 2 = 3$ Rest 0
$3 \div 2 = 1$ Rest 1
$1 \div 2 = 0$ Rest 1
$\Rightarrow (100)_{10} = (110.0100)_2$

d) $(277)_{10} = (?)_2$
$277 \div 2 = 138$ Rest 1
$138 \div 2 = 69$ Rest 0
$69 \div 2 = 34$ Rest 1
$34 \div 2 = 17$ Rest 0
$17 \div 2 = 8$ Rest 1
$8 \div 2 = 4$ Rest 0
$4 \div 2 = 2$ Rest 0
$2 \div 2 = 1$ Rest 0
$1 \div 2 = 0$ Rest 1
$\Rightarrow (277)_{10} = (1.0001.0101)_2$

e) $(666)_{10} = (?)_2$
$666 \div 2 = 333$ Rest 0
$333 \div 2 = 166$ Rest 1
$166 \div 2 = 83$ Rest 0
$83 \div 2 = 41$ Rest 1
$41 \div 2 = 20$ Rest 1
$20 \div 2 = 10$ Rest 0
$10 \div 2 = 5$ Rest 0
$5 \div 2 = 2$ Rest 1
$2 \div 2 = 1$ Rest 0
$1 \div 2 = 0$ Rest 1
$\Rightarrow (666)_{10} = (10.1001.1010)_2$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 6.5: Wandlung Zehner- in Dreier-System

Quelle: Rolf B. Drescher, 19. Oktober 2023

a) $(8)_{10} = (?)_3$
$8 \div 3 = 2$ Rest 2
$2 \div 3 = 0$ Rest 2
$\Rightarrow (8)_{10} = (22)_3$

b) $(58)_{10} = (?)_3$
$58 \div 3 = 19$ Rest 1
$19 \div 3 = 6$ Rest 1
$6 \div 3 = 2$ Rest 0
$2 \div 3 = 0$ Rest 2
$\Rightarrow (58)_{10} = (2.011)_3$

c) $(100)_{10} = (?)_3$
$100 \div 3 = 33$ Rest 1
$33 \div 3 = 11$ Rest 0
$11 \div 3 = 3$ Rest 2
$3 \div 3 = 1$ Rest 0

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

$1 \div 3 = 0$ Rest 1
$\Rightarrow (100)_{10} = (10.201)_3$

d) $(277)_{10} = (?)_3$
$277 \div 3 = 92$ Rest 1
$92 \div 3 = 30$ Rest 2
$30 \div 3 = 10$ Rest 0
$10 \div 3 = 3$ Rest 1
$3 \div 3 = 1$ Rest 0
$1 \div 3 = 0$ Rest 1
$\Rightarrow (277)_{10} = (101.021)_3$

e) $(666)_{10} = (?)_3$
$666 \div 3 = 222$ Rest 0
$222 \div 3 = 74$ Rest 0
$74 \div 3 = 24$ Rest 2
$24 \div 3 = 8$ Rest 0
$8 \div 3 = 2$ Rest 2
$2 \div 3 = 0$ Rest 2
$\Rightarrow (666)_{10} = (220.200)_3$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 6.6: Wandlung Zehner- in Fünfer-System

Quelle: Rolf B. Drescher, 19. Oktober 2023

a) $(8)_{10} = (?)_5$
$8 \div 5 = 1$ Rest 3
$1 \div 5 = 0$ Rest 1
$\Rightarrow (8)_{10} = (13)_5$

b) $(58)_{10} = (?)_5$
$58 \div 5 = 11$ Rest 3
$11 \div 5 = 2$ Rest 1
$2 \div 5 = 0$ Rest 2
$\Rightarrow (58)_{10} = (213)_5$

c) $(100)_{10} = (?)_5$
$100 \div 5 = 20$ Rest 0
$20 \div 5 = 4$ Rest 0
$4 \div 5 = 0$ Rest 4
$\Rightarrow (100)_{10} = (400)_5$

d) $(277)_{10} = (?)_5$
$277 \div 5 = 55$ Rest 2
$55 \div 5 = 11$ Rest 0
$11 \div 5 = 2$ Rest 1
$2 \div 5 = 0$ Rest 2
$\Rightarrow (277)_{10} = (2.102)_5$

e) $(666)_{10} = (?)_5$
$666 \div 5 = 133$ Rest 1
$133 \div 5 = 26$ Rest 3
$26 \div 5 = 5$ Rest 1
$5 \div 5 = 1$ Rest 0
$1 \div 5 = 0$ Rest 1
$\Rightarrow (666)_{10} = (10.131)_5$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 6.7: Wandlung Zehner- in Achter-System

Quelle: Rolf B. Drescher, 19. Oktober 2023

a) $(8)_{10} = (?)_8$
$8 \div 8 = 1$ Rest 0
$1 \div 8 = 0$ Rest 1
$\Rightarrow (8)_{10} = (10)_8$

b) $(58)_{10} = (?)_8$
$58 \div 8 = 7$ Rest 2
$7 \div 8 = 0$ Rest 7
$\Rightarrow (58)_{10} = (72)_8$

c) $(100)_{10} = (?)_8$
$100 \div 8 = 12$ Rest 4
$12 \div 8 = 1$ Rest 4
$1 \div 8 = 0$ Rest 1
$\Rightarrow (100)_{10} = (144)_8$

d) $(277)_{10} = (?)_8$
$277 \div 8 = 34$ Rest 5
$34 \div 8 = 4$ Rest 2
$4 \div 8 = 0$ Rest 4
$\Rightarrow (277)_{10} = (425)_8$

e) $(666)_{10} = (?)_8$
$666 \div 8 = 83$ Rest 2
$83 \div 8 = 10$ Rest 3
$10 \div 8 = 1$ Rest 2
$1 \div 8 = 0$ Rest 1
$\Rightarrow (666)_{10} = (1.232)_8$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 6.8: Wandlung Zehner- in Sechzehner-System

Quelle: Rolf B. Drescher, 19. Oktober 2023

a) $(8)_{10} = (?)_{16}$
$8 \div 16 = 0$ Rest 8
$\Rightarrow (8)_{10} = (8)_{16}$

b) $(58)_{10} = (?)_{16}$
$58 \div 16 = 3$ Rest 10 (A)
$3 \div 16 = 0$ Rest 3
$\Rightarrow (58)_{10} = (3A)_{16}$

c) $(100)_{10} = (?)_{16}$
$100 \div 16 = 6$ Rest 4
$6 \div 16 = 0$ Rest 6
$\Rightarrow (100)_{10} = (64)_{16}$

d) $(277)_{10} = (?)_{16}$
$277 \div 16 = 17$ Rest 5
$17 \div 16 = 1$ Rest 1
$1 \div 16 = 0$ Rest 1
$\Rightarrow (277)_{10} = (115)_{16}$

e) $(666)_{10} = (?)_{16}$
$666 \div 16 = 41$ Rest 10 (A)
$41 \div 16 = 2$ Rest 9
$2 \div 16 = 0$ Rest 2

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

$\Rightarrow (666)_{10} = (29\mathrm{A})_{16}$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 6.9: Wandlung Zweier- zum Zehnersystem

Quelle: Rolf B. Drescher, 20. Oktober 2023

a) $(1001)_2 = (?)_{10}$
$1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = (9)_{10}$

b) $(10.1111)_2 = (?)_{10}$
$1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = (47)_{10}$

c) $(1101.1010)_2 = (?)_{10}$
$1 \cdot 128 + 1 \cdot 64 + 0 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = (218)_{10}$

d) $(0110.1011.0001)_2 = (?)_{10}$
$0 \cdot 2.048 + 1 \cdot 1.024 + 1 \cdot 512 + 0 \cdot 256 + 1 \cdot 128 + 0 \cdot 64 + 1 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = (1.713)_{10}$

e) $(110.0110.0110.0110)_2 = (?)_{10}$
$1{\cdot}16384{+}1{\cdot}8192{+}0{\cdot}4096{+}0{\cdot}2.048{+}1{\cdot}1.024{+}1{\cdot}512{+}0{\cdot}256{+}0{\cdot}128{+}1{\cdot}64{+}1{\cdot}32{+}0{\cdot}16{+}0{\cdot}8{+}1{\cdot}4{+}1{\cdot}2{+}0{\cdot}1 = (26.214)_{10}$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 6.10: Wandlung Dreier- zum Zehnersystem

Quelle: Rolf B. Drescher, 21. Oktober 2023

a) $(21)_3 = (?)_{10}$
$2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = (7)_{10}$

b) $(1.020)_3 = (?)_{10}$
$1 \cdot 27 + 0 \cdot 9 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 = (33)_{10}$

c) $(222.102)_3 = (?)_{10}$
$2 \cdot 243 + 2 \cdot 81 + 2 \cdot 27 + 1 \cdot 9 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = (713)_{10}$

d) $(011.022.000)_3 = (?)_{10}$
$0 \cdot 6.561 + 1 \cdot 2.187 + 1 \cdot 729 + 0 \cdot 243 + 2 \cdot 81 + 2 \cdot 27 + 0 \cdot 9 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 1 = (3.132)_{10}$

e) $(21.021.021.021)_3 = (?)_{10}$
$2 \cdot 59.049 + 1 \cdot 19.683 + 0 \cdot 6.561 + 2 \cdot 2.187 + 1 \cdot 729 + 0 \cdot 243 + 2 \cdot 81 + 1 \cdot 27 + 0 \cdot 9 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = (143.080)_{10}$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 6.11: Wandlung Fünfer- zum Zehnersystem

Quelle: Rolf B. Drescher, 21. Oktober 2023

a) $(14)_5 = (?)_{10}$
$1 \cdot 5 + 4 \cdot 1 = (9)_{10}$

b) $(323)_5 = (?)_{10}$
$3 \cdot 25 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = (88)_{10}$

c) $(2.001)_5 = (?)_{10}$
$2 \cdot 125 + 0 \cdot 25 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 1 = (251)_{10}$

d) $(034.123)_5 = (?)_{10}$
$0 \cdot 3.125 + 3 \cdot 625 + 4 \cdot 125 + 1 \cdot 25 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = (2.413)_{10}$

e) $(21.433.040)_5 = (?)_{10}$
$2 \cdot 78.125 + 1 \cdot 15.625 + 4 \cdot 3.125 + 3 \cdot 625 + 3 \cdot 125 + 0 \cdot 25 + 4 \cdot 5 + 0 \cdot 1 = (186.645)_{10}$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 6.12: Wandlung Oktal- zum Zehnersystem

Quelle: Rolf B. Drescher, 21. Oktober 2023

a) $(57)_8 = (?)_{10}$
$5 \cdot 8 + 7 \cdot 1 = (47)_{10}$

b) $(602)_8 = (?)_{10}$
$6 \cdot 64 + 0 \cdot 8 + 2 \cdot 1 = (386)_{10}$

c) $(4.336)_8 = (?)_{10}$
$4 \cdot 512 + 3 \cdot 64 + 3 \cdot 8 + 6 \cdot 1 = (2.270)_{10}$

d) $(12.065)_8 = (?)_{10}$
$1 \cdot 4.096 + 2 \cdot 512 + 0 \cdot 64 + 6 \cdot 8 + 5 \cdot 1 = (5.173)_{10}$

e) $(1.200.704)_8 = (?)_{10}$
$1 \cdot 262.144 + 2 \cdot 32.768 + 0 \cdot 4.096 + 0 \cdot 512 + 7 \cdot 64 + 0 \cdot 8 + 4 \cdot 1 = (328.132)_{10}$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 6.13: Wandlung Hexadezimal- zum Zehnersystem

Quelle: Rolf B. Drescher, 21. Oktober 2023

a) $(1A)_{16} = (?)_{10}$
$1 \cdot 16 + 10 \cdot 1 = (26)_{10}$

b) $(BF)_{16} = (?)_{10}$
$11 \cdot 16 + 15 \cdot 1 = (191)_{10}$

c) $(3CD)_{16} = (?)_{10}$
$3 \cdot 256 + 12 \cdot 16 + 13 \cdot 1 = (973)_{10}$

d) $(1F7E)_{16} = (?)_{10}$
$1 \cdot 4.096 + 15 \cdot 256 + 7 \cdot 16 + 14 \cdot 1 = (8.062)_{10}$

e) $(AF0D2)_{16} = (?)_{10}$
$10 \cdot 65.536 + 15 \cdot 4.096 + 0 \cdot 256 + 13 \cdot 16 + 2 \cdot 1 = (717.010)_{10}$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 6.14: Wandlung vom Dual- in das Oktal- und Hexadezimalsystem

Quelle: Rolf B. Drescher, 22. Oktober 2023

a) $(1001)_2 = (?)_8 = (?)_{16}$
$001 \mid 001 \;\rightarrow\; (11)_8 \qquad 1001 \;\rightarrow\; (9)_{16}$

b) $(110101)_2 = (?)_8 = (?)_{16}$
$110 \mid 101 \;\rightarrow\; (65)_8 \qquad 0011 \mid 0101 \;\rightarrow\; (35)_{16}$

c) $(10101101)_2 = (?)_8 = (?)_{16}$
$010 \mid 101 \mid 101 \;\rightarrow\; (255)_8 \qquad 1010 \mid 1101 \;\rightarrow\; (AD)_{16}$

d) $(111010000110)_2 = (?)_8 = (?)_{16}$
$111 \mid 010 \mid 000 \mid 110 \;\rightarrow\; (7.206)_8 \qquad 1110 \mid 1000 \mid 0110 \;\rightarrow\; (E86)_{16}$

e) $(0101100101100101 10)_2 = (?)_8 = (?)_{16}$
$010 \mid 110 \mid 010 \mid 110 \mid 010 \mid 110 \;\rightarrow\; (262.626)_8 \qquad 0001 \mid 0110 \mid 0101 \mid 1001 \mid 0110 \;\rightarrow\; (16.596)_{16}$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 6.15: Wandlung vom Oktal- und Hexadezimalsystem in die „anderen Informatikersysteme“

Quelle: Rolf B. Drescher, 25. Oktober 2023

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

a) $(27)_8 = (?)_{16}$
$(27)_8 = (010.111)_2 = (01.0111)_2 = (17)_{16}$

b) $(1.001)_8 = (?)_{16}$
$(1.001)_8 = (001.000.000.001)_2 = (0010.0000.0001)_2 = (201)_{16}$

c) $(070.707)_8 = (?)_{16}$
$(070.707)_8 = (111.000.111.000.111)_2 = (111.0001.1100.0111)_2 = (7.1C7)_{16}$

d) $(3A)_{16} = (?)_8$
$(3A)_{16} = (11.1010)_2 = (111.010)_2 = (72)_8$

e) $(D05)_{16} = (?)_8$
$(D05)_{16} = (1101.0000.0101)_2 = (110.100.000.101)_2 = (6.405)_8$

f) $(E5AC)_{16} = (?)_8$
$(E.5AC)_{16} = (1110.0101.1010.1100)_2 = (1.110.010.110.101.100)_2 = (162.654)_8$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 6.16: Zahlenwandlung mit dem Horner-Schema

Quelle: Rolf B. Drescher, 28. Oktober 2023

a) $(1101)_2 = (?)_{10}$
$((1 \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1 = (13)_{10}$

b) $(1101)_3 = (?)_{10}$
$((1 \cdot 3 + 1) \cdot 3 + 0) \cdot 3 + 1 = (37)_{10}$

c) $(21.201)_3 = (?)_{10}$
$(((2 \cdot 3 + 1) \cdot 3 + 2) \cdot 3 + 0) \cdot 3 + 1 = (208)_{10}$

d) $(21.201)_5 = (?)_{10}$
$(((2 \cdot 5 + 1) \cdot 5 + 2) \cdot 5 + 0) \cdot 5 + 1 = (1.426)_{10}$

e) $(30.364)_7 = (?)_{10}$
$(((3 \cdot 7 + 0) \cdot 7 + 3) \cdot 7 + 6) \cdot 7 + 4 = (7.396)_{10}$

f) $(30.364)_9 = (?)_{10}$
$(((3 \cdot 9 + 0) \cdot 9 + 3) \cdot 9 + 6) \cdot 9 + 4 = (19.984)_{10}$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 6.17: Bereichsgrenzen durch beschränkte Stellenzahl

Quelle: Rolf B. Drescher, 19. Oktober 2023

a) $b = 2 \quad n = 7$
$(111.1111)_2 = 2^7 - 1 = 127$

b) $b = 2 \quad n = 32$
$(1111.1111.1111.1111.1111.1111.1111.1111)_2 = 2^{32} - 1 = 4.294.967.295$

c) $b = 3 \quad n = 6$
$(22.2222)_3 = 3^6 - 1 = 728$

d) $b = 4 \quad n = 12$
$(3333.3333.3333)_4 = 4^{12} - 1 = 16.777.216$

e) $b = 8 \quad n = 4$
$(7777)_8 = 8^4 - 1 = 4.095$

f) $b = 12 \quad n = 5$
$(B.BBBB)_{12} = 12^5 - 1 = 248.831$

g) $b = 16 \quad n = 5$
$(F.FFFF)_{16} = 16^5 - 1 = 1.048.575$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 6.18: Bereichsgrenzen durch beschränkte Stellenzahl

a) Führen Sie den Code aus und interpretieren Sie das Ergebnis.
Mit der Zwei-Bit-Zahl kann man nur bis drei zählen; folglich erfolgt bei der Addition $3+1$ der Übertrag in die nächste (nicht vorhandene) Stelle und das Ergebnis springt wieder auf Null.

Analog gilt das für die Dreibit-Zahl ($7+1 \to 0$), Vierbit-Zahl ($15+1 \to 0$) und Fünfbit-Zahl ($31+1 \to 0$).

Man beachte: Das Laufzeitprogramm erzeugt k e i n e Fehlermeldung!

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 6.19: Addition im Zweiersystem

Quelle: Rolf B. Drescher, 28. Oktober 2023

a) $100.101 + 111.010 = 1.011.111$

b) $101.100 + 11.011 = 1.000.111$

c) $100.011 + 010.010 = 110.101$

d) $011.011 + 011.110 = 111.001$

e) $1.011.001 + 100.110 = 1.111.111$

f) $1.001.001 + 100.111 = 1.110.000$

g) $100.101 + 01.101 + 11.100 = 1.001.110$

h) $1.110.111 + 101.011 + 01.101 = 10.101.111$

i) $10.110.010 + 101.101 + 11.010 = 11.111.001$

j) $110.110 + 010.110 + 001.101 + 11.001 = 1.110.010$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 6.20: Addition in verschiedenen Zahlensystemen

Quelle: Rolf B. Drescher, 31. Oktober 2023

a) $01.210 + 111 = 2.021$

b) $01.210 + 222 = 2.202$

c) $212.210 + 02.111 = 222.021$

d) $121.001 + 222.122 = 1.120.200$

e) $11212 + 21120 + 02212 = 120021$

f) $= 22.112 + 12.212 + 201.210 + 22.1121.120.200$

g) $2.131 + 0.111 = 2.302$

h) $12.321 + 23.133 = 102.120$

i) $233.232 + 333.011 = 1.232.303$

j) $23.112 + 12.312 + 01.310 = 110.000$

k) $322.323 + 21.301 + 13.221 + 31.203 = 1.121.320$

l) $30.413 + 24.310 = 110.223$

m) $423.324 + 233.324 = 1.212.203$

n) $341.023 + 22.433 + 01.343 = 420.404$

o) $223.344 + 334.422 + 11.440 + 44.113 = 1.224.424$

p) $4.626 + 3.771 = 10.617$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

q) $32.664 + 77.701 = 132.565$

r) $354.026 + 214.372 + 33.546 = 624.166$

s) $5.377.024 + 427.006 + 00.236 + 22.175 = 6.050.465$

t) $3A6 + BCD = F73$

u) $7.FB3 + 8EA = 8.89D$

v) $9.0B4 + 8.4CF = 11.583$

w) $FF.EED + CC.BBA = 1CC.AA7$

x) $A.702 + 6.FB0 + 3.327 = 14.9D9$

y) $E.F09 + A.7BC + 6.69D = 1F.D62$

z) $37.FB4 + 62.C01 + 49.BBA + 90.92E = 175.09D$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 6.21: Multiplikation im Zweiersystem

Quelle: Rolf B. Drescher, 09. November 2023

a) $101 \cdot 10 = 1.010$

b) $1.101 \cdot 11 = 100.111$

c) $11.101 \cdot 1.011 = 100.111.111$

d) $10.001 \cdot 1.101 = 11.011.101$

e) $00.110.011 \cdot 01.010 = 111.111.110$

f) $10.110.111 \cdot 011.010 = 1.001.010.010.110$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 6.22: Multiplikation im Dreiersystem

Quelle: Rolf B. Drescher, 09. November 2023

a) $102 \cdot 21 = 2.212$

b) $222 \cdot 111 = 110.112$

c) $210 \cdot 221 = 201.110$

d) $222 \cdot 222 = 221.001$

e) $2.010 \cdot 1.020 = 2.120.200$

f) $01.210 \cdot 2.121 = 11.121.110$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 6.23: Multiplikation im Fünfersystem

Quelle: Rolf B. Drescher, 09. November 2023

a) $42 \cdot 23 = 2.121$

b) $432 \cdot 24 = 23.023$

c) $432 \cdot 213 = 204.121$

d) $3.334 \cdot 142 = 1.201.133$

e) $4.321 \cdot 1.234 = 12.114.214$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 6.24: Multiplikation im Oktalsystem

Quelle: Rolf B. Drescher, 09. November 2023

a) $206 \cdot 31 = 6.426$

b) $372 \cdot 254 = 123.770$

c) $736 \cdot 675 = 637.346$

d) $1.477 \cdot 776 = 1.473.602$

e) $7.654 \cdot 4.567 = 45.052.364$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 6.25: Multiplikation im Hexadezimalsystem

Quelle: Rolf B. Drescher, 09. November 2023

a) $37 \cdot \mathrm{E} = 302$

b) $5\mathrm{D} \cdot 23 = \mathrm{CB7}$

c) $\mathrm{FA} \cdot 9\mathrm{A} = 9.664$

d) $\mathrm{AF7} \cdot 3\mathrm{ED} = 2\mathrm{B0.BAB}$

e) $\mathrm{ABCD} \cdot \mathrm{FED} = \mathrm{A.B00.FC9}$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 7.1: Grundlegendes

a) $\underline{z} = 5 + 3\mathrm{j}$; Geben Sie Real- und Imaginärteil an. $\Re(\underline{z}) = 5;\ \Im(\underline{z}) = 3$

b) $\underline{z} = -4 + 7\mathrm{j}$; Geben Sie Real- und Imaginärteil an. $\Re(\underline{z}) = -4;\ \Im(\underline{z}) = 7$

c) $\underline{z} = 8 - \mathrm{j}$; Geben Sie Real- und Imaginärteil an. $\Re(\underline{z}) = 8;\ \Im(\underline{z}) = -1$

d) $\underline{z} = 6 + 2\mathrm{j}$; Geben Sie $\underline{z}^*$ an. $\underline{z}^* = 6 - 2\mathrm{j}$

e) $\underline{z} = -4 - \mathrm{j}$; Geben Sie $\underline{z}^*$ an. $\underline{z}^* = -4 + \mathrm{j}$

f) Was ist der Betrag von $z = -\mathrm{j}$?
$|z| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$

g) Was ist der Betrag von $z = 7 + 6\mathrm{j}$?
$|z| = \sqrt{7^2 + (6)^2} = \sqrt{85} \approx 9{,}22$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 7.2: Grundrechenarten mit komplexen Zahlen

a) Addieren Sie $z_1 + z_2 = z$ mit $z_1 = 3 + 4\mathrm{j}, z_2 = 2 - 3\mathrm{j}$
$z = 5 + \mathrm{j}$

b) Addieren Sie $z_1 + z_2 = z$ mit $z_1 = -5 + 3\mathrm{j}, z_2 = 5 - 5\mathrm{j}$
$z = -2\mathrm{j}$

c) Subtrahieren Sie $z_1 - z_2 = z$ mit $z_1 = 1 - 2\mathrm{j}, z_2 = -4 - \mathrm{j}$
$z = 5 - \mathrm{j}$

d) Subtrahieren Sie $z_1 - z_2 = z$ mit $z_1 = 6 + 5\mathrm{j}, z_2 = 8 - 3\mathrm{j}$
$z = -2 + 8\mathrm{j}$

e) Multiplizieren Sie $z_1 \cdot z_2 = z$ mit $z_1 = -3 - 4\mathrm{j}, z_2 = 7 + 4\mathrm{j}$

$z_1 = -3 - 4\mathrm{j}, \quad z_2 = 7 + 4\mathrm{j}$

$z = z_1 \cdot z_2 = (-3 - 4\mathrm{j}) \cdot (7 + 4\mathrm{j})$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Multiplizieren mit der Distributivregel:

$$z = (-3) \cdot 7 + (-3) \cdot 4\mathrm{j} + (-4\mathrm{j}) \cdot 7 + (-4\mathrm{j}) \cdot 4\mathrm{j}$$

$$z = -21 - 12\mathrm{j} - 28\mathrm{j} - 16\mathrm{j}^2$$

Da $\mathrm{j}^2 = -1$:

$$z = -21 - 12\mathrm{j} - 28\mathrm{j} - 16(-1)$$

$$z = -21 - 12\mathrm{j} - 28\mathrm{j} + 16$$

Kombinieren der Real- und Imaginärteile:

$$z = (-21 + 16) + (-12\mathrm{j} - 28\mathrm{j})$$

$$z = -5 - 40\mathrm{j}$$

Das Ergebnis ist:

$$z = -5 - 40\mathrm{j}$$

f) Multiplizieren Sie $z_1 \cdot z_2 = z$ mit $z_1 = 3 + 2\mathrm{j}, z_2 = 6 - \mathrm{j}$

$$z_1 = 3 + 2\mathrm{j}, \quad z_2 = 6 - \mathrm{j}$$

$$z = z_1 \cdot z_2 = (3 + 2\mathrm{j}) \cdot (6 - \mathrm{j})$$

Multiplizieren mit der Distributivregel:

$$z = 3 \cdot 6 + 3 \cdot (-\mathrm{j}) + 2\mathrm{j} \cdot 6 + 2\mathrm{j} \cdot (-\mathrm{j})$$

$$z = 18 - 3\mathrm{j} + 12\mathrm{j} - 2\mathrm{j}^2$$

Da $\mathrm{j}^2 = -1$:

$$z = 18 - 3\mathrm{j} + 12\mathrm{j} - 2(-1)$$

$$z = 18 - 3\mathrm{j} + 12\mathrm{j} + 2$$

Kombinieren der Real- und Imaginärteile:

$$z = (18 + 2) + (-3\mathrm{j} + 12\mathrm{j})$$

$$z = 20 + 9\mathrm{j}$$

Das Ergebnis ist:

$$z = 20 + 9\mathrm{j}$$

g) Dividieren Sie $z = (-8 + 2\mathrm{j})/(4 - 9\mathrm{j})$

$$z = \frac{-8 + 2j}{4 - 9\mathrm{j}}$$

$$z = \frac{-8 + 2j}{4 - 9\mathrm{j}} * \frac{4 + 9\mathrm{j}}{4 + 9\mathrm{j}}$$

$$z = \frac{-50 - 64\mathrm{j}}{4^2 + 9^2}$$

$$z = \frac{-50}{97} - \frac{64}{97}\mathrm{j}$$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 7.3: Komplex etwas komplexer [OpenAI2024h]

a) Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 4 + 3i$ und $z_2 = 2 - 5i$. Berechne das Produkt $z_1 \cdot z_2$ und stelle das Ergebnis in der Form $a + bi$ dar. **Multiplikation**:

$$\begin{aligned}
z_1 &= 4 + 3i \\
z_2 &= 2 - 5i \\
z_1 \cdot z_2 &= (4 + 3i)(2 - 5i) \\
&= 4 \cdot 2 + 4 \cdot (-5i) + 3i \cdot 2 + 3i \cdot (-5i) \\
&= 8 - 20i + 6i - 15i^2 \\
&= 8 - 14i - 15(-1) \quad (\text{da } i^2 = -1) \\
&= 8 - 14i + 15 \\
&= 23 - 14i
\end{aligned}$$

Das Ergebnis ist $23 - 14i$.

b) Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_3 = -1 + 2i$ und $z_4 = 3 + 4i$. Berechne die Division $\frac{z_3}{z_4}$ und stelle das Ergebnis in der Form $a + bi$ dar. **Division**:

$$\begin{aligned}
z_3 &= -1 + 2i \\
z_4 &= 3 + 4i \\
\frac{z_3}{z_4} &= \frac{-1 + 2i}{3 + 4i} \cdot \frac{3 - 4i}{3 - 4i} \quad (\text{Erweitern mit dem konjugierten Nenner}) \\
&= \frac{(-1 + 2i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} \\
&= \frac{-3 + 4i + 6i - 8i^2}{9 - 16i^2} \\
&= \frac{-3 + 10i + 8}{9 + 16} \quad (\text{da } i^2 = -1) \\
&= \frac{5 + 10i}{25} \\
&= \frac{5}{25} + \frac{10i}{25} \\
&= \frac{1}{5} + \frac{2i}{5} \\
&= 0.2 + 0.4i
\end{aligned}$$

Das Ergebnis ist $0.2 + 0.4i$.

c) Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_5 = 2+i$ und $z_6 = 1-3i$. Berechne das Produkt $(z_5 \cdot z_6) \cdot \overline{z_6}$, wobei $\overline{z_6}$ die konjugierte komplexe Zahl von z_6 ist. Stelle das Ergebnis in der Form $a + bi$ dar. **Multiplikation**

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

mit konjugierter komplexer Zahl:

$$
\begin{aligned}
z_5 &= 2+i \\
z_6 &= 1-3i \\
\overline{z_6} &= 1+3i \\
z_5 \cdot z_6 &= (2+i)(1-3i) \\
&= 2\cdot 1 + 2\cdot(-3i) + i\cdot 1 + i\cdot(-3i) \\
&= 2 - 6i + i - 3i^2 \\
&= 2 - 5i + 3 \quad (\text{da } i^2 = -1) \\
&= 5 - 5i \\
(z_5 \cdot z_6)\cdot \overline{z_6} &= (5-5i)(1+3i) \\
&= 5\cdot 1 + 5\cdot 3i - 5i\cdot 1 - 5i\cdot 3i \\
&= 5 + 15i - 5i - 15i^2 \\
&= 5 + 10i + 15 \quad (\text{da } i^2 = -1) \\
&= 20 + 10i
\end{aligned}
$$

Das Ergebnis ist $20 + 10i$.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 8.1: Lineare Gleichungen

a) $12 - x = 7 \quad \rightarrow x = 5$

b) $13 - x = -4 \quad \rightarrow x = 17$

c) $\dfrac{17 - x}{3} = 5 \quad \rightarrow x = 2$

d) $\dfrac{5\cdot x - 25}{2} = -5 \quad \rightarrow x = 3$

e) $5\cdot x - \dfrac{2\cdot x}{5} = 2\cdot x + 13 \quad \rightarrow x = 5$

f) $6 - \dfrac{8\cdot x}{6} = -2\cdot x + 8 \quad \rightarrow x = 3$

g) $\dfrac{10 - x}{x} = 19 \quad \rightarrow x = 0{,}5$

h) $\dfrac{x + 11}{4 + x} = 2 \quad \rightarrow x = 3$

i) $\dfrac{32\cdot x - 24}{4} = 3\cdot x + 4 \quad \rightarrow x = 2$

j) $\dfrac{24\cdot x}{0{,}75 + 5\cdot x} = 3 \quad \rightarrow x = 0{,}25$

k) $\dfrac{6\cdot(x+1)}{4} = \dfrac{x}{2} + 2{,}5 \quad \rightarrow x = 1$

l) $\dfrac{x}{3} - 3\cdot(3 - x) = 4 + \dfrac{1}{3} \quad \rightarrow x = 4$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 8.2: Summenoperator (1)

a) $\sum_{i=1}^{10} i = 1 + 2 + \cdots + 10 = 55$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

b) $\sum_{k=1}^{10} 100 \cdot k = 100 \cdot \sum_{k=1}^{10} = 100 \cdot 55 = 5500$

c) $\sum_{n=1}^{10} 3 = 3 + 3 + 3 + \cdots + 3 = 10 \cdot 3 = 30$

d) $\sum_{i=2}^{5} (i-1)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$

e) $\sum_{i=1}^{5} \frac{i-1}{i} = 0 + {}^1\!/_2 + {}^2\!/_3 + {}^3\!/_4 + {}^4\!/_5 = {}^{163}\!/_{60} = 2{,}71\overline{6} \approx \mathrm{e}$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 8.3: Summenoperator (2)

a) $\sum_{i=1}^{10} (40 \cdot i - 220) = 40 \cdot \left(\sum_{i=1}^{10} i \right) - 10 \cdot 220 = 0$

b) $\sum_{i=4}^{12} (i^2 - 9 \cdot i) = -12$

c) $\sum_{k=-3}^{6} (k \cdot \frac{k-2}{3}) = 25$

d) $\sum_{k=-3}^{-5} \big(k \cdot (k+1)\big) = 0$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 8.4: Umindizierung (Summenzeichen) v1

a) Hier geht es zu Lösungshinweisen. $\sum_{k=2}^{5} k^2 =$

Substitution: $j = k - 1$, also $k = j + 1$.
Neue Grenzen: $j = 1$ bis $j = 4$.

$\sum_{k=2}^{5} k^2 = \sum_{j=1}^{4} (j+1)^2 = \sum_{j=1}^{4} (j^2 + 2j + 1)$

$= \sum_{j=1}^{4} j^2 + 2 \sum_{j=1}^{4} j + \sum_{j=1}^{4} 1$

$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) + 2(1 + 2 + 3 + 4) + 4$

$= (1 + 4 + 9 + 16) + 2(10) + 4 = 30 + 20 + 4 = 54.$

b) Hier geht es zu Lösungshinweisen. $\sum_{n=0}^{10} (2n+1) =$

Summe der ungeraden Zahlen:

$\sum_{n=0}^{10} (2n+1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + 21.$

Dies ist eine arithmetische Summe mit:
$a_1 = 1$, $d = 2$, $n = 11$.
Die Summe einer arithmetischen Reihe lautet:
$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) = \frac{11}{2} \cdot (1 + 21) = \frac{11}{2} \cdot 22 = 121.$

c) Hier geht es zu Lösungshinweisen. $\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=i}^{5} (i+j) =$

Berechnen Sie die Summe explizit:

$\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=i}^{5} (i+j) = \Bigg(\underbrace{(1+1) + (1+2) + (1+3) + (1+4) + (1+5)}_{20} \Bigg)$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

$$+\left(\underbrace{(2+2)+(2+3)+(2+4)+(2+5)}_{22}\right)$$
$$+\left(\underbrace{(3+3)+(3+4)+(3+5)}_{21}\right)+\left(\underbrace{(4+4)+(4+5)}_{17}\right)$$
$$=20+22+21+17=80.$$

d) Hier geht es zu Lösungshinweisen. $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cdot k=$

Substitution: $j=n-k+1$ verändert das Vorzeichen der Terme:
$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cdot k=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j+1}\cdot j.$
Die Summe ergibt für ungerade n Null und für gerade n den negativen Restterm.

e) Hier geht es zu Lösungshinweisen. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 2^k=$

Dies ist die binomische Formel: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 2^k=(1+2)^n=3^n.$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 8.5: Mehrfachsummen

a) $\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=2}^{4}(2\cdot k+i)=(4+1)+(6+1)+(8+1)+(4+2)+(6+2)+(8+2)=45$
Ausführlich: Wir berechnen die inneren Summen zuerst:
$\sum_{k=2}^{4}(2k+1)=(2\cdot 2+1)+(2\cdot 3+1)+(2\cdot 4+1)=5+7+9=21$
$\sum_{k=2}^{4}(2k+2)=(2\cdot 2+2)+(2\cdot 3+2)+(2\cdot 4+2)=6+8+10=24$
Nun summieren wir die beiden Ergebnisse: $21+24=45$.

b) $\sum_{i=0}^{2}\sum_{k=1}^{3}(i\cdot k)=0+0+0+1+2+3+2+4+6=18$

Ausführlich: Für $i=0:\sum_{k=1}^{3}(0\cdot k)=0+0+0=0$

Für $i=1:\sum_{k=1}^{3}(1\cdot k)=1+2+3=6$

Für $i=2:\sum_{k=1}^{3}(2\cdot k)=2+4+6=12$

Gesamtsumme: $0+6+12=18$.

c) $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3}(i^2+j^2)=$

Wir berechnen für jedes i :

Für $i=1:\sum_{j=1}^{3}(1^2+j^2)=(1+1^2)+(1+2^2)+(1+3^2)=2+5+10=17$

Für $i=2:\sum_{j=1}^{3}(2^2+j^2)=(4+1^2)+(4+2^2)+(4+3^2)=5+8+13=26$

Für $i=3:\sum_{j=1}^{3}(3^2+j^2)=(9+1^2)+(9+2^2)+(9+3^2)=10+13+18=41$

Für $i=4:\sum_{j=1}^{3}(4^2+j^2)=(16+1^2)+(16+2^2)+(16+3^2)=17+20+25=62$

Gesamtsumme: $17+26+41+62=146$.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

d) $\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{i\cdot j}=\frac{12\,019}{3\,600}=3{,}3386\overline{1}$

Ausführlich: Wir berechnen jede innere Summe für jedes i :

Für $i=1$: $\sum_{j=1}^{1}\frac{1}{1\cdot 1}=1$

Für $i=2$: $\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{2\cdot j}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

Für $i=3$: $\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{3\cdot j}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{11}{18}$

Für $i=4$: $\sum_{j=1}^{4}\frac{1}{4\cdot j}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}=\frac{13}{24}$

Für $i=5$: $\sum_{j=1}^{5}\frac{1}{5\cdot j}=\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20}+\frac{1}{25}=\frac{47}{150}$

Gesamtsumme: $1+\frac{3}{4}+\frac{11}{18}+\frac{13}{24}+\frac{47}{150}=\frac{12\,019}{3\,600}=3{,}3386\overline{1}$.

e) $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}(-1)^{i+j}\cdot i\cdot j=4$

Ausführlich: Zuerst berechnen wir die Produkte für jedes Paar (i,j) :

$i=1:(-1)^{1+j}\cdot 1\cdot j=-1+2-3+4=2$

$i=2:(-1)^{2+j}\cdot 2\cdot j=2-4+6-8=-4$

$i=3:(-1)^{3+j}\cdot 3\cdot j=-3+6-9+12=6$

$i=4:(-1)^{4+j}\cdot 4\cdot j=4-8+12-16=-8$

Gesamtsumme: $2-4+6-8=-4+6=4$.

f) $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(i+j+k)=$

Berechnung für jedes Tripel (i,j,k) :

$(i,j,k)=(1,1,1):1+1+1=3,\quad (1,1,2):1+1+2=4$

$(1,2,1):1+2+1=4,\quad (1,2,2):1+2+2=5$

$(2,1,1):2+1+1=4,\quad (2,1,2):2+1+2=5$

$(2,2,1):2+2+1=5,\quad (2,2,2):2+2+2=6$

Gesamtsumme: $3+4+4+5+4+5+5+6=36$.

g) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}i\cdot j\cdot k=$

Gegeben ist die dreifache Summe:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}i\cdot j\cdot k$$

Wir lösen diese Summe schrittweise:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}i\cdot j\cdot k&=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(i\cdot j\cdot(1+2+3))\\&=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(i\cdot j\cdot 6)\\&=6\cdot\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(i\cdot j)\end{aligned}$$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Nun berechnen wir den inneren Teil der doppelten Summe:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(i \cdot j)$$

Zuerst berechnen wir für jedes i die Summe über j:

$$\sum_{j=1}^{3} i \cdot j = i \cdot (1+2+3) = i \cdot 6$$

Somit ergibt sich:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(i \cdot j) = \sum_{i=1}^{3}(i \cdot 6) = 6 \cdot (1+2+3) = 6 \cdot 6 = 36$$

Setzen wir dies in die ursprüngliche Summe ein:

$$6 \cdot 36 = 216$$

Daraus folgt:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} i \cdot j \cdot k = 216$$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 8.6: Einfache Aufgaben zu Produktoperatoren [OpenAI2024ab]

a) Berechnen Sie das Produkt $\prod_{i=1}^{4} i$.

$$\prod_{i=1}^{4} i = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

b) Berechnen Sie das Produkt $\prod_{k=1}^{5} (k+1)$.

$$\prod_{k=1}^{5} (k+1) = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$$

c) Berechnen Sie das Produkt $\prod_{n=2}^{6} (2n-1)$.

$$\prod_{n=2}^{6} (2n-1) = 3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11 = 10395$$

d) Berechnen Sie das Produkt $\prod_{m=1}^{5} \frac{m}{m+1}$.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

$$\prod_{m=1}^{5} \frac{m}{m+1} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

e) Berechnen Sie das Produkt $\prod_{p=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$ für $n = 4$.

$$\begin{aligned}\prod_{p=1}^{4} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) &= \left(1 - \frac{1}{1^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \\ &= 0 \times \frac{3}{4} \times \frac{8}{9} \times \frac{15}{16} = 0\end{aligned}$$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 8.7: Fakultäten

a) $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

b) $10! = 3\,628\,800$

c) $8! - 3! = 40\,320 - 6 = 40\,314$

d) $6! \cdot 4! = 720 \cdot 24 = 17\,280$

e) $\frac{12!}{13!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 12 \cdot 13} = \frac{1}{13}$

f) $\frac{14!}{12!} = 13 \cdot 14 = 182$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 8.8: Aufgaben zum Kopfrechnen

a) $9 \cdot 11 = (10-1) \cdot (10+1) = 10^2 - 1^2 = 100 - 1 = 99$

b) $19^2 = (20-1)^2 = 20^2 - 2 \cdot 20 \cdot 1 + 1^2 = 400 - 40 + 1 = 361$

c) $18 \cdot 22 = (20-2) \cdot (20+2) = 20^2 - 2^2 = 400 - 4 = 396$

d) $25^2 = (20+5)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 5 + 5^2 = 400 + 200 + 25 = 625$

e) $13 \cdot 17 = (15-2) \cdot (15+2) = 15^2 - 2^2 = 225 - 4 = 221$

f) $35^2 = (30+5)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 5 + 5^2 = 900 + 300 + 25 = 1225$

g) $27 \cdot 33 = (30-3) \cdot (30+3) = 30^2 - 3^2 = 900 - 9 = 891$

h) $45^2 = (50-5)^2 = 50^2 - 2 \cdot 50 \cdot 5 + 5^2 = 2500 - 500 + 25 = 2025$

i) $39 \cdot 41 = (40-1) \cdot (40+1) = 40^2 - 1^2 = 1600 - 1 = 1599$

j) $55^2 = (50+5)^2 = 50^2 + 2 \cdot 50 \cdot 5 + 5^2 = 2500 + 500 + 25 = 3025$

k) $49 \cdot 51 = (50-1) \cdot (50+1) = 50^2 - 1^2 = 2500 - 1 = 2499$

l) $65^2 = (60+5)^2 = 60^2 + 2 \cdot 60 \cdot 5 + 5^2 = 3600 + 600 + 25 = 4225$

m) $57 \cdot 63 = (60-3) \cdot (60+3) = 60^2 - 3^2 = 3600 - 9 = 3591$

n) $75^2 = (70+5)^2 = 70^2 + 2 \cdot 70 \cdot 5 + 5^2 = 4900 + 700 + 25 = 5625$

o) $69 \cdot 71 = (70-1) \cdot (70+1) = 70^2 - 1^2 = 4900 - 1 = 4899$

p) $85^2 = (80+5)^2 = 80^2 + 2 \cdot 80 \cdot 5 + 5^2 = 6400 + 800 + 25 = 7225$

q) $77 \cdot 83 = (80-3) \cdot (80+3) = 80^2 - 3^2 = 6400 - 9 = 6391$

r) $95^2 = (100-5)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 5 + 5^2 = 10000 - 1000 + 25 = 9025$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

s) $89 \cdot 91 = (90-1)\cdot(90+1) = 90^2 - 1^2 = 8100 - 1 = 8099$

t) $105^2 = (100+5)^2 = 100^2 + 2\cdot 100\cdot 5 + 5^2 = 10000 + 1000 + 25 = 11025$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 8.9: Binomische Formeln

a) $51 \cdot 51 = 50^2 + 2\cdot 50\cdot 1 + 1^2 = 2500 + 100 + 1 = 2601$

b) $39^2 = (40-1)^2 = 1600 - 80 + 1 = 1521$

c) $1040^2 = (1000+40)^2 = 1000000 + 2\cdot 1000\cdot 40 + 1600 = 1000000 + 80000 + 1600 = 1081600$

d) $(x-y)^2 - (x+y)^2 + 4xy = 0$

e) $(s-t)^2 + 2(s-t)(s+t) + (s+t)^2 - 3s^2 = s^2$

f) $(4s-3t)^2 - (2s+t)^2 + 8st - 2(s-t)(s+t) - 10(s-t)^2 = 0$

g) $xy + \left(-1+\sqrt{xy}\right)\left(-1-\sqrt{xy}\right) = 1$

h) $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{2x^2-4xy+2y^2} + \dfrac{2x^2-4xy+2y^2}{4x^2-8xy+4y^2} = 1$

i) $\dfrac{x^2-y^2}{(x-y)^2} - \dfrac{(x+y)^2}{x^2-y^2} = 0$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 8.10: Binomischer Lehrsatz

a) $(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3 = x^3 + 3\,x^2y + 3\,xy^2 + y^3$

b) $(x-y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2(-y) + \binom{3}{2}x(-y)^2 + \binom{3}{3}(-y)^3 = x^3 - 3\,x^2y + 3\,xy^2 - y^3$

c) $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

d) $\binom{5}{1} = 5$

e) $\binom{1}{5} = 0$

f) $\binom{7}{4} = 35$

g) $\binom{27}{24} = 2\,925$

h) $\binom{319}{317} = 50\,721$

i) $\binom{7}{3} - \binom{6}{2} = 20$

j) $\binom{12}{7} + \binom{9}{4} = 918$

k) $\dfrac{\binom{14}{11}\cdot\binom{7}{5}}{\binom{6}{3}} = \dfrac{1911}{5} = 382{,}2$

l) $(a+\mathrm{j}\cdot b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\mathrm{j}^k = \sum_{\substack{k=0,\\ k\text{ gerade}}}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{\frac{k}{2}}a^{n-k}b^k + \mathrm{j}\cdot\sum_{\substack{k=1,\\ k\text{ ungerade}}}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{\frac{k-1}{2}}a^{n-k}b^k$

wobei j die imaginäre Zahl bzw. imaginäre Einheit ist.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 8.11: Quadratische Gleichungen

a) $x^2 - 6\cdot x + 8 = 0 \to x_1 = 2;\ x_2 = 4$

b) $-3\cdot x^2 + 3\cdot x + 6 = 0 \to x_1 = -1;\ x_2 = 2$

c) $-4\cdot x^2 - 8\cdot x + 15 = 3 \to x_1 = -3;\ x_2 = 1$

d) $10 - 10\cdot x - x^2 = 35 \to x_1 = x_2 = -5$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

e) $2 \cdot x - 2 - 0{,}5 \cdot x^2 = 2 \rightarrow$ keine Lösung in $\mathbb{R}$

f) $4 \cdot x^2 + 7 = 8 \rightarrow x_1 = -0{,}5;\ x_2 = 0{,}5$

g) $x^2 + \frac{1}{12} - \frac{1}{12} \cdot x = \frac{1}{6} \rightarrow x_1 = -\frac{1}{4};\ x_2 = \frac{1}{3}$

h) $5 + x^2 = -(2 \cdot x + 1) \rightarrow$ keine Lösung in $\mathbb{R}$

i) $2 \cdot x - \frac{1}{7} \cdot x^2 = 7 \rightarrow x_1 = x_2 = 7$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 8.12: Bruchrechnung (1)

a) $\frac{12}{15} = \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{4}{5} = 0{,}8$

b) $\frac{45}{18} = \frac{5}{2} = 2{,}5$

c) $\frac{42}{56} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

d) $\frac{65}{15} = \frac{13}{3} = 4{,}\overline{3}$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 8.13: Bruchrechnung (2)

a) $\frac{15 \cdot x \cdot 2 \cdot y}{4 \cdot y \cdot 5 \cdot x \cdot 9} = \frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6}$

b) $\frac{2 \cdot x \cdot y}{(4 \cdot x - 2 \cdot x) \cdot y} = 1$

c) $\frac{2 \cdot x - 4 \cdot y}{x - 2 \cdot y} = \frac{2 \cdot (x - 2 \cdot y)}{(x - 2 \cdot y)} = 2$

d) $\frac{4 \cdot x^2 \cdot y}{2 \cdot x \cdot 2 \cdot y} = x$

e) $\frac{8 \cdot x^2 - 4 \cdot x \cdot y}{16 \cdot x - 8 \cdot y} = \frac{1}{2}x = 0{,}5x$

f) $\frac{3 \cdot x \cdot 4 \cdot y}{4 \cdot x \cdot 3 \cdot y} = 1$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 8.14: Bruchrechnung (3) v1

a) $\frac{1}{12} + \frac{3}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \boxed{2}$

b) $\frac{2}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \boxed{0}$

c) $\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\right) \cdot \left[\frac{3}{5} + \frac{11}{5}\right] = \frac{3}{4} \cdot \frac{14}{5} = \boxed{\frac{21}{10} = 2{,}1}$

d) $\left(\frac{4}{3} - \frac{5}{6}\right) \div \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right] = \frac{3}{6} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{1} = \boxed{2}$

e) $\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{3}{4} - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{12}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{12}{1} = \boxed{2}$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

f) $\dfrac{12 \cdot \left(\dfrac{x}{2}+4\right)}{\dfrac{1}{2 \cdot x} \cdot (6+12 \cdot x) \cdot 4} = \dfrac{\dfrac{12x+96}{2}}{\dfrac{(6+12x) \cdot 4}{2x}} = \dfrac{12x+96}{2} \cdot \dfrac{2x}{(6+12x) \cdot 4} = \dfrac{(3x+24) \cdot x}{12x+6}$

$= \boxed{\dfrac{x \cdot (x+8)}{4x+2}}$

g) $\left(\dfrac{2}{5 \cdot x} - 2 \cdot \dfrac{1}{4 \cdot x}\right) \cdot x + \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{1}{4} = \boxed{0}$

h) $x \cdot \left(\dfrac{11}{12} - \dfrac{1}{6}\right) \cdot \left[\dfrac{4}{5 \cdot x} + \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{8}{15}\right] = \boxed{1}$

i) $\left(\dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{3}\right) \cdot \left(11 - \dfrac{3}{2} - 2\right) = \boxed{2}$

j) $\dfrac{6 \cdot x - 3 \cdot y}{12 \cdot x^2 - 6 \cdot x \cdot y} \div \left[\dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{4 \cdot x}\right] = \boxed{2}$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 8.15: Umwandlung Bruch in Dezimalbruch [OpenAI2024i]

a) Wandle den Bruch $\frac{1234}{5678}$ in einen Dezimalbruch um.

$$\frac{1234}{5678} \approx 0{,}2173$$

b) Wandle den Bruch $\frac{9876}{5432}$ in einen Dezimalbruch um.

$$\frac{9876}{5432} \approx 1{,}8182$$

c) Wandle den Bruch $\frac{7654}{3210}$ in einen Dezimalbruch um.

$$\frac{7654}{3210} \approx 2{,}3841$$

d) Wandle den Bruch $\frac{1357}{2468}$ in einen Dezimalbruch um.

$$\frac{1357}{2468} \approx 0{,}5498$$

e) Wandle den Bruch $\frac{31415}{27182}$ in einen Dezimalbruch um.

$$\frac{31415}{27182} \approx 1{,}1555$$

f) Wandle den Bruch $\frac{14142}{17320}$ in einen Dezimalbruch um.

$$\frac{14142}{17320} \approx 0{,}8163$$

g) Wandle den Bruch $\frac{12345}{6789}$ in einen Dezimalbruch um.

$$\frac{12345}{6789} \approx 1{,}8183$$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

h) Wandle den Bruch $\frac{98765}{4321}$ in einen Dezimalbruch um.

$$\frac{98765}{4321} \approx 22{,}8548$$

i) Wandle den Bruch $\frac{11223}{44556}$ in einen Dezimalbruch um.

$$\frac{11223}{44556} \approx 0{,}2519$$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 8.16: Umwandlung Dezimalbruch in Bruch

a) $0{,}25 = \frac{1}{4}$

b) $0{,}0625 = \frac{1}{16}$

c) $0{,}21875 = \frac{7}{32}$

d) $8{,}734375 = \frac{559}{64} = 8\frac{47}{64}$

e) $0{,}\overline{4} = \frac{4}{9}$

f) $0{,}\overline{53} = \frac{53}{99}$

g) $0{,}\overline{270} = \frac{270}{999} = \frac{10}{37}$

h) $0{,}3\overline{8} = \frac{270}{999} = \frac{7}{18}$

i) $0{,}1\overline{62} = \frac{161}{990}$

j) $3{,}4\overline{334} = \frac{3430}{999} = 3\frac{433}{999}$

k) $2{,}2463\overline{127} = \frac{2\,805\,083}{1\,248\,750} = 2\frac{307\,583}{1\,248\,750}$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 8.17: Kettenbrüche

a) $\frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2}$

b) $\frac{17}{10} = 1 + \frac{7}{10} = 1 + \frac{1}{\frac{10}{7}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{7}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{7}{3}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}$

c) $\frac{37}{11} = 3 + \frac{4}{11} = 3 + \frac{1}{\frac{11}{4}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{3}{4}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{4}{3}}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}$

Quelle: http://groolfs.de/Verschiedenespdf/Kettenbruch.pdf; Abruf 2024-08-28

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

d) $\sqrt{5}$; Ansatz $x = 4 + \frac{1}{x} \rightarrow \sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cdots}}}$

e) $\sqrt{10}$; Ansatz $x = 6 + \frac{1}{x} \rightarrow \sqrt{10} = 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cdots}}}$

f) $\sqrt{3}$; Ansatz $x = 4 - \frac{1}{x} \rightarrow \sqrt{3} = 2 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4 - \cdots}}}$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 8.18: Längere Kettenbrüche [OpenAI2024j]

a) Berechne den Wert des Kettenbruchs mit 10 Gliedern:

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{9 + \frac{1}{10}}}}}}}}}$$

Der Wert des Kettenbruchs mit 10 Gliedern ist:

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{9 + \frac{1}{10}}}}}}}}} \approx 1,61798$$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 8.19: In Kettenbruch entwickeln [OpenAI2024k]

a) Kettenbruchentwicklung von $\frac{365249}{365000}$ Um $\frac{365249}{365000}$ in einen Kettenbruch zu entwickeln, verwenden wir den euklidischen Algorithmus:

$$\frac{365249}{365000} = 1 + \frac{249}{365000}$$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Nun entwickeln wir den Bruch $\frac{249}{365000}$ weiter:

$$\frac{249}{365000} = \frac{1}{1465 + \frac{1}{2.927}}$$

Da die Berechnung des Kettenbruchs etwas aufwendig ist, zeigen wir hier nur die Hauptschritte und das Endergebnis:

$$\frac{365249}{365000} = 1 + \cfrac{1}{1465 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6 + \frac{1}{3}}}}$$

Detailschritte der Berechnung 1. $\frac{365249}{365000} = 1 + \frac{249}{365000}$ 2. $\frac{365000}{249} \approx 1465.46$, also $\frac{249}{365000} = \frac{1}{1465+\frac{46}{249}}$ 3. $\frac{249}{46} \approx 5.41$, also $\frac{46}{249} = \frac{1}{5+\frac{29}{46}}$ 4. $\frac{46}{29} \approx 1.586$, also $\frac{29}{46} = \frac{1}{1+\frac{17}{29}}$ 5. $\frac{29}{17} \approx 1.706$, also $\frac{17}{29} = \frac{1}{1+\frac{12}{17}}$ 6. $\frac{17}{12} \approx 1.416$, also $\frac{12}{17} = \frac{1}{1+\frac{5}{12}}$ 7. $\frac{12}{5} = 2.4$, also $\frac{5}{12} = \frac{1}{2+\frac{2}{5}}$ 8. $\frac{5}{2} = 2.5$, also $\frac{2}{5} = \frac{1}{2+\frac{1}{2}}$ 9. $\frac{2}{1} = 2$, also $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 8.20: Dreisatz und Verhältnisrechnung

a) 5 Arbeiter melken 5 Kühe in 15 Minuten. Wie lange braucht ein Arbeiter für 10 Kühe?

Wenn 5 A 5 K in 15 min melken,
braucht 1 A für 5 K 75 min,
somit 1 A für 10 K 150 min
bzw. 5 K/5 A=15 min | *5
⇔5 K/1 A=75 min | *2
⇔10 K/1 A=150 min
Ein Arbeiter braucht für 10 Kühe 150 min.

b) 2 Walzen formen 10 Äxte in 2 Minuten. Eine fällt aus. Wie viele Äxte können in 30 min produziert werden?

5 A/2 W = 10 min | ·2
⇔ 5 A/1 W=20 min $|\cdot{}^{30}/_{20}$
⇔ 75 A/1 W = 30 min
In 30 min können nach Ausfall einer Walze 75 Äxte gefertigt werden.

c) Pro Auto werden 5 Reifen und 5 Felgen benötigt (Ersatzrad!). Je montierter Felge werden 5 Muttern benötigt. Es werden 1 Mio. Fahrzeuge produziert. Wie viele Reifen und wie viele Muttern werden benötigt?

1 PKW → 5 Reifen → 5 Felgen → 4 montierte Felgen | 5 Muttern je montierter Felge
⇔ 1 PKW → 5 Reifen →5 Felgen → 20 Muttern | 1 Mio. PKW
⇔ 1 Mio. PKW → 5 Mio. Reifen → 5 Mio. Felgen → 20 Mio. Muttern
Es werden 5 Mio. Reifen und 20 Mio. Muttern benötigt.

d) Ein Würfel von 10 cm Kantenlänge wird auf die halbe Höhe gestaucht. Wir gehen von Volumenkonstanz, Gleichmaßumformung und Inkompressibilität aus. Welche Kantenlängen hat das Objekt nach der Stauchung?

$V_{\text{vorher}} = V_{\text{nachher}}$
$\Leftrightarrow L_{\text{vorher}} * B_{\text{vorher}} * H_{\text{vorher}} = L_{\text{nachher}} * B_{\text{nachher}} * H_{\text{nachher}}$
mit
$H_{\text{nachher}} = 1/2 * H_{\text{vorher}}$
und
$L_{\text{nachher}} = l_{\text{L}} * L_{\text{vorher}}$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

$B_{\text{nachher}} = b_{\text{B}} * B_{\text{vorher}}$
$\Leftrightarrow L_{\text{vorher}} * B_{\text{vorher}} * H_{\text{vorher}} = l_{\text{L}} * L_{\text{vorher}} * b_{\text{B}} * B_{\text{vorher}} * H_{\text{vorher}} * 1/2$
$\Leftrightarrow 1 = l_{\text{L}} * b_{\text{B}} * 1/2$
Da wir Gleichmaß annehmen, gilt:
$l_{\text{L}} = b_{\text{B}} = k$
$\Leftrightarrow 1 = k * k * 1/2$
$\Leftrightarrow 2 = k^2$
$\Leftrightarrow k = \sqrt{2}$ | negative Werte physikalisch sinnlos

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 8.21: Prozentrechnung

a) Der Garantiezins einer Lebensversicherung beträgt 0,9 % p. a. Sie schließen am 21. Geburtstag einen Vertrag an, der zum 67. Geburtstag zur Auszahlung fällig wird, mit einer monatlichen Prämie von 150 EUR.

Wie viel Zinsen hat die erste Rate ergeben? Wie viele Zinsen gab es auf die letzte Rate?

Die erste Rate wird 46 Jahre mit 0,9 % p. a. verzinst.
$\rightarrow$ Zinsertrag $= 150\,\text{EUR} \cdot 1{,}009^{46} - 150\,\text{EUR} \approx 76{,}51\,\text{EUR}$
Die letzte Rate wird nur einen Monat lang verzinst.
Der Monatszins ist $\sqrt[12]{1,009} - 1 \approx 0,00075 = 0,075\%$.
Somit erhalten Sie ca. 0,11 EUR Zinsen.

b) Sie schließen einen Kredit für einen Hausbau mit endfälliger Tilgung ab, d. h. Sie zahlen zunächst nur jährlich endfällig Zinsen, die Tilgung am Ende der Laufzeit.
Sie schließen 500.000 EUR Kredit ab, haben 10.000 EUR Gebühren dazu, eine Laufzeit von 10 Jahren und 4 % Zins (6 % ,8 %) p.a.

Wie viele Zinsen zahlen Sie in Summe?

$Kreditsumme = K = 500.000\,EUR + 10.000\,EUR = 510.000\,EUR$

$$Zinsen\ Z = 10_{Jahre} * K * Zinssatz = \begin{cases} 204.000 & 4\% \\ 306.000 & 6\% \\ 408.000 & 8\% \end{cases}$$

Sie haben dann aber immer noch 510.000 EUR Schulden, die sofort fällig sind.
Das übersehen viele und haben dann keine Anschlussfinanzierung.

Quelle: Die nachfolgenden 10 Aufgaben, Lösungen und der Latex-Code wurden mit ChatGPT erstellt.

c) Ein Kapital von € 5.000 wird zu einem Zinssatz von 5 % pro Jahr für 10 Jahre angelegt. Berechnen Sie den Endbetrag. Endbetrag $= 5.000 \times \left(1 + \frac{5}{100}\right)^{10} =$ € 8.144,47

d) Wie viel muss heute angelegt werden, um in 15 Jahren bei einem Zinssatz von 4 % pro Jahr einen Betrag von € 10.000 zu erreichen? Barwert $= \frac{10.000}{(1+\frac{4}{100})^{15}} =$ € 5.536,95

e) Ein Kapital von € 7.000 wird für 8 Jahre zu einem Zinssatz von 3,5 % pro Jahr angelegt. Wie hoch ist der Endbetrag? Endbetrag $= 7.000 \times \left(1 + \frac{3.5}{100}\right)^{8} =$ € 9.124,19

f) Berechnen Sie den Barwert eines Betrags von € 20.000, der in 12 Jahren fällig wird, bei einem Zinssatz von 6 % pro Jahr. Barwert $= \frac{20.000}{(1+\frac{6}{100})^{12}} =$ € 9.928,76

g) Ein Kapital von € 3.500 wird zu einem Zinssatz von 2,5 % pro Jahr für 5 Jahre angelegt. Berechnen Sie den Endbetrag. Endbetrag $= 3.500 \times \left(1 + \frac{2.5}{100}\right)^{5} =$ € 3.957,72

h) Wie viel muss heute angelegt werden, um in 10 Jahren bei einem Zinssatz von 7 % pro Jahr einen Betrag von € 15.000 zu erreichen? Barwert $= \frac{15.000}{(1+\frac{7}{100})^{10}} =$ € 7.624,95

i) Ein Kapital von € 1.000 wird zu einem Zinssatz von 5,5 % pro Jahr für 20 Jahre angelegt. Wie hoch ist der Endbetrag? Endbetrag $= 1.000 \times \left(1 + \frac{5.5}{100}\right)^{20} =$ € 2.918,58

j) Berechnen Sie den Barwert eines Betrags von € 50.000, der in 25 Jahren fällig wird, bei einem Zinssatz von 4,5 % pro Jahr. Barwert $= \frac{50.000}{(1+\frac{4.5}{100})^{25}} =$ € 15.404,96

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

k) Ein Kapital von € 8.000 wird zu einem Zinssatz von 6 % pro Jahr für 10 Jahre angelegt. Berechnen Sie den Endbetrag. Endbetrag $= 8.000 \times \left(1 + \frac{6}{100}\right)^{10} =$ € 14.310,13

l) Wie viel muss heute angelegt werden, um in 30 Jahren bei einem Zinssatz von 3 % pro Jahr einen Betrag von € 100.000 zu erreichen? Barwert $= \frac{100.000}{\left(1+\frac{3}{100}\right)^{30}} =$ € 41.196,75

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 8.22: Gleichungen mit Hochzahlen v1

a) $(1-x)^3 = 27 \rightarrow \boxed{x = -2}$

b) $(x-1)^7 = 128 \rightarrow \boxed{x = 3}$

c) $2(x-2)^5 = 64 \rightarrow \boxed{x = 4}$

d) $(x+27)^{0,2} = 2 \rightarrow \boxed{x = 5}$

e) $\frac{2(85-x)^{0,25}}{3} = 2 \rightarrow \boxed{x = 4}$

f) $\frac{(6-x)^{0,5}+7}{3} = 3 \rightarrow \boxed{x = 2}$

g) $\left(\frac{(x+24)}{3}\right)^{2,5} = 243 \rightarrow \boxed{x = 3}$

h) $\frac{1}{256} \cdot \left(\frac{2x-4}{2}\right)^8 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{256} \cdot (x-2)^8 = 1 \Leftrightarrow (x-2)^8 = 256 \Leftrightarrow x - 2 = \underbrace{\sqrt[8]{256}}_{\pm 2} \Leftrightarrow \boxed{x = 0 \vee x = 4}$

i) $\sqrt{2x-6} = 2 \rightarrow \boxed{x = 5}$

j) $\sqrt[5]{81(x-3)} = 3 \rightarrow \boxed{x = 6}$

k) $\sqrt[3]{2(3x-17)} = 2 \rightarrow \boxed{x = 7}$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 8.23: Potenzen und Wurzeln (1)

a) $\frac{\left(2^2\right)^3 \cdot \left(2^2\right)^4}{2^{14}} = 1$

b) $\frac{5^7 \cdot (2 \cdot 5)^3 \cdot 2^{17}}{(2 \cdot 2 \cdot 5)^{10}} = 1$

c) $\frac{\left(2^2 \cdot 3\right)^2 \cdot 7^4 \cdot (2 \cdot 3)^2}{2 \cdot (7 \cdot 3 \cdot 2)^4} = 2$

d) $\frac{\left(2^3\right)^2 \cdot (2 \cdot 3)^3 \cdot 2^{-3} \cdot 3^{-4} \cdot (2 \cdot 5)^{-9}}{3^8 \cdot (2 \cdot 3)^{-3} \cdot 5^{-7} \cdot 2^2 \cdot 3^{-7} \cdot (2 \cdot 5)^{-2}} = 3$

e) $\frac{(2 \cdot 3)^3 \cdot 3^{-3} \cdot \left(7^{-1} \cdot 2\right)^4 \cdot \left(3^2 \cdot 7^2\right)^2}{\left(2^{-1} \cdot 7 \cdot 2^2\right)^{-1} \cdot \left(2^{-2} \cdot 5^4 \cdot 7^{-1}\right)^{-1} \cdot (3 \cdot 5)^4 \cdot 2^4} = 4$

f) $\frac{\left(2ab^{-1}\right)^3 \cdot \left(2^{-3}ab^{-1}\right)^{-2}}{2ab\left(a^1a^{-2}\right)^2 \cdot \left(2^{-3}a^{-1}b\right)^{-2}} = 4$

g) $4 \cdot a^{(m+1)\cdot n} \cdot a^{m-n} \cdot \left(a^{mn+m}\right)^{-1} = 4$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 8.24: Potenzen und Wurzeln (2)

a) $\sqrt{\sqrt{16a^2x^2}} \cdot \sqrt{a^3x} \cdot \sqrt[3]{a^{-6}x^{-3}} = 2$

b) $\sqrt{2^6y^4} \cdot \left(x^4 \cdot y^8\right)^{-0{,}25} \cdot x \cdot \left(\sqrt{2^4}\right)^{-1} = 2$

c) $\dfrac{\left(x^{0{,}2} \cdot y^2\right)^{-5} \cdot \left(\sqrt{2^{0{,}5} \cdot x} \cdot y^2\right)^4}{\sqrt{y^{-4} \cdot x^2}} = 2$

d) $\left(\sqrt[4]{xy^2}\right)^2 \cdot \dfrac{x^{-0{,}5}}{0{,}5 \cdot y} = 2$

e) $\left(\sqrt[3]{a^{0{,}6}} \cdot \sqrt[4]{a^{-0{,}4}}\right)^{10} = a$

f) $\sqrt[4]{\dfrac{x^2}{81}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{27}{x^{1{,}5}}} = 1$

g) $\sqrt[3]{16xy^4} \cdot \sqrt[3]{4x^2y^2} \cdot \sqrt[3]{x^{-3}y^{-6}} = 4$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 8.25: Logarithmus (Logarithmengesetze) v1

a) $\log_2 a - \log_2 b \to \log_2 {}^a\!/_b \quad \forall a, b \neq 0$

b) $\log(x+y) - \log x \to \log\left(\dfrac{x+y}{x}\right) = \log\left(1 + {}^y\!/_x\right)$

c) $\log_a \dfrac{b}{c} - \log_a b \to \log_a \dfrac{1}{c}$

d) $\log_a \dfrac{b}{c} + \log_a b \to \log_a \dfrac{b^2}{c}$

e) $\left(\log_a a^2\right)^{-3} + \left(\log_a 1\right)^3 \to {}^1\!/_8$

f) $\dfrac{1}{2} \cdot \log 4 + 3 \cdot \log 6 - 2 \cdot \log\left(3 \cdot 2^7\right) \to -\log 341$

g) $2 \cdot \log x + \dfrac{1}{2} \cdot \log x^4 - \log x^2 \to 2 \cdot \log x$

h) $\log_a x^2 + \log_a \dfrac{1}{x^2} \to 0$

i) $-\dfrac{1}{3} \cdot \log\left(x^2 \cdot y^{-2} \cdot z\right) + \dfrac{1}{3} \cdot \log\left(x^{-1} \cdot y \cdot z\right) \to \log {}^y\!/_x$

j) $\log_t \sqrt{a} + \log_t \sqrt{(a \cdot b)^{-1}} + \dfrac{1}{2} \cdot \log_t b \to 0$

Quelle: http://www.vorwerg-net.de/Mathematik/1.Algebra/1.7.A.Logarithmen.pdf; Abruf 18-MAI-2023

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 8.26: Logarithmus

a) $1{,}05^x = 2 \quad \to x \approx 14{,}21$

b) $1{,}1^x = 2 \quad \to x = {}^{\ln 2}\!/_{\ln 1{,}1} \approx 7{,}27$

c) $1{,}05^x = 3 \quad \to x = {}^{\ln 3}\!/_{\ln 1{,}05} \approx 22{,}52$

d) $1{,}1892^x = 4 \quad \to x = {}^{\ln 4}\!/_{\ln 1{,}1892} \approx 8{,}00$

e) $1{,}04^{10} \cdot 1{,}03^x = 3 \quad \to x \approx 23{,}90$

f) $200 \cdot 1{,}02^x = 250 \quad \to x \approx 11{,}27$

g) $\ln\left(e^x\right) = 13 \quad \to x = 13$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

h) $4^{2(x-3)} = 2^4 \quad \rightarrow x = 4$

i) $\left(2^{x-2}\right)^4 = 16 \quad \rightarrow x = 3$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 8.27: Logarithmengleichungen im Körper der reellen Zahlen

Quelle: https://de.serlo.org/mathe/26262/aufgaben-zu-exponential-und-logarithmusgleichungen; Abruf 2024-08-28

a) $\lg(x-2) + \lg(x+2) = 1 \rightarrow$
$\Leftrightarrow \lg\big((x-2)\cdot(x+2)\big) = 1 \Leftrightarrow \lg(x^2-4) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 10 \Leftrightarrow x^2 = 14 \Rightarrow x = \sqrt{14} \approx 3{,}74$
Die zweite Wurzel $-\sqrt{14}$ liegt nicht im Definitionsbereich.

b) $\log_5(x) + \log_5(x-4) = 2 \rightarrow 2 + \sqrt{29} \approx 7{,}385$

c) $\log_3(2x+1) = \log_3(x+4) + 1 \rightarrow$ Keine Lösung im $\mathbb{R}$; in $\mathbb{C}$ wäre $x = -11$

d) $\log_4(x+1) - \log_4(x-3) = 2 \rightarrow \dfrac{49}{15}$

e) $\log_2(3x-5) = \log_2(x+3) + \log_2(2) \rightarrow 11$

f) $2 \cdot \log_7(x-2) = \log_7(3x+1) \rightarrow \dfrac{7+\sqrt{37}}{2} \approx 5{,}54$

g) $\log_5(2x+1) - \log_5(x-3) = 1 \rightarrow \dfrac{16}{3}$

h) $\ln\left(\dfrac{x^2}{(x+1)^2}\right) = 1 \qquad$ für $x > 0$

$\dfrac{x^2}{(x+1)^2} = \mathrm{e}^1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \mathrm{e}\cdot(x^2+2\cdot x+1) \quad \Leftrightarrow \quad (\mathrm{e}-1)\cdot x^2 + 2\cdot\mathrm{e}\cdot x + \mathrm{e} = 0$ Mitternachtsformel:

$x_1 = \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}}}{1-\sqrt{\mathrm{e}}} \approx -2{,}541 \quad \rightarrow$ keine Lösung, da $x \leq 0$.

$x_2 = -\dfrac{\sqrt{\mathrm{e}}}{1-\sqrt{\mathrm{e}}} \approx -0{,}622 \quad \rightarrow$ keine Lösung, da $x \leq 0$.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 8.28: Polynomdivision

a) $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)/(x-1) = x^2 - x - 6$

b) $(3x^3 - 10x^2 + 7x - 12)/(x-3) = 3x^2 - x + 4$

c) $(x^3 - 6x^2 + 11x - 12)/(x-4) = x^2 - 2x + 3$

d) $(-6x^3 + 5x^2 + 14x - 12)/(-2x+3) = 3x^2 + 2x - 4$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 8.29: Partialbruchzerlegung

a) Es soll die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - x^2 + x - 1}$ bestimmt werden.
→ Hierzu werden die beschriebenen Schritte einzeln abgearbeitet.

1. Schritt 1 ist hinfällig, da es sich bereits um eine echt gebrochen rationale Funktion handelt.
2. In Schritt 2 erfolgt die Bestimmung der Nullstellen des Nenners $v(x) = x^3 - x^2 + x - 1$. Durch Ausprobieren findet man die erste Nullstelle $x_1 = 1$. Nun kann mittels Polynomdivision der Linearfaktor $(x-1)$ aus dem Polynom ausgeklammert werden und man erhält als anderen Faktor das Polynom $x^2 + 1$:
   $v(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)\cdot(x^2+1)$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Mithilfe der Mitternachtsformel lassen sich dann die letzten beiden Nullstellen $x_2 = i$ und $x_3 = -i$ finden.

3. Nun, in Schritt 3, werden für diese Nullstellen die Partialbrüche bestimmt. Da es sich bei $x_1 = 1$ um eine einfache reelle Nullstelle handelt ist das zugehörige Polynom $\frac{a_{11}}{x-1}$:
   $x_1 \to \frac{a_{11}}{x-1}$
   Die beiden anderen Nullstellen sind einfach echt komplex und komplex konjugiert zueinander. Zu ihnen gehört demzufolge der gemeinsame Partialbruch
   $\frac{a_{21}x+b_{21}}{(x-i)\cdot(x+i)} = \frac{a_{21}x+b_{21}}{x^2+1}$:
   $x_2, x_3 \to \frac{a_{21}x+b_{21}}{x^2+1}$

4. In Schritt 4 den Ansatz aufzustellen ist nun ein Leichtes:
   $\frac{1}{x^3-x^2+x-1} = \frac{a_{11}}{x-1} + \frac{a_{21}x+b_{21}}{x^2+1}$

5. Durch Multiplikation der Gleichung in Schritt 5 mit dem Nennerpolynom $v(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)\cdot(x^2+1)$ erhält man:
   $1 = a_{11}\cdot(x^2+1) + (a_{21}x + b_{21})\cdot(x-1)$
   Ausklammern und Umordnen ergibt:
   $1 = a_{11}x^2 + a_{11} + a_{21}x^2 + b_{21}x - a_{21}x - b_{21} = (a_{11}+a_{21})x^2 + (b_{21}-a_{21})x + (a_{11}-b_{21})$
   Der Koeffizientenvergleich liefert folgendes Gleichungssystem:
   $a_{11} + a_{21} = 0$
   $b_{21} - a_{21} = 0$
   $a_{11} - b_{21} = 1$
   Die Lösung dieses Systems lautet:
   $a_{11} = \frac{1}{2}, a_{21} = b_{21} = -\frac{1}{2}$.
   Somit besitzt die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion $f(x) = \frac{1}{x^3-x^2+x-1}$ folgende Form:
   $\frac{1}{x^3-x^2+x-1} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}x+-\frac{1}{2}}{x^2+1}$

Eine **alternative Lösung** ergibt sich im Komplexen, wenn man den Nenner vollständig faktorisiert:

Zu zerlegen: $\dfrac{1}{(x^3-x^2+x-1)} = \dfrac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \dfrac{1}{(x-1)(x-\mathrm{j})(x+\mathrm{j})}$.

Ansatz mit komplexen Linearfaktoren: $\dfrac{1}{(x-1)(x-\mathrm{j})(x+\mathrm{j})} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-\mathrm{j}} + \dfrac{C}{x+\mathrm{j}}$.

Auf Hauptnenner bringen: $1 \equiv A(x-\mathrm{j})(x+\mathrm{j}) + B(x-1)(x+\mathrm{j}) + C(x-1)(x-\mathrm{j})$

Bestimmung der Koeffizienten durch Einsetzen der Polstellen:

1) Bei $x = 1$: $\quad 1 = A(1-\mathrm{j})(1+\mathrm{j}) = A\,(1-\mathrm{j}^2) = A\cdot 2 \implies A = \dfrac{1}{2}$.

2) Bei $x = \mathrm{j}$: $\quad 1 = B(\mathrm{j}-1)(\mathrm{j}+\mathrm{j}) = B\,(\mathrm{j}-1)\cdot 2\mathrm{j} = B\,(2\mathrm{j}^2 - 2\mathrm{j}) = B\,(-2-2\mathrm{j})$

$\implies B = \dfrac{1}{-2-2\mathrm{j}} = -\dfrac{1}{2(1+\mathrm{j})} = -\dfrac{1-\mathrm{j}}{2(1+\mathrm{j})(1-\mathrm{j})} = -\dfrac{1-\mathrm{j}}{4} = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{\mathrm{j}}{4}$.

3) Bei $x = -\mathrm{j}$: $\quad 1 = C(-\mathrm{j}-1)(-\mathrm{j}-\mathrm{j}) = C\,(-\mathrm{j}-1)\cdot(-2\mathrm{j}) = C\,(2\mathrm{j}^2 + 2\mathrm{j}) = C\,(-2+2\mathrm{j})$

$\implies C = \dfrac{1}{-2+2\mathrm{j}} = \dfrac{1}{2(\mathrm{j}-1)} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\mathrm{j}-1} = \dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{1+\mathrm{j}}{2}\right) = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{i}{4}$.

Ergebnis (komplexe Linearfaktoren): $\dfrac{1}{x^3-x^2+x-1} = \dfrac{1}{2(x-1)} + \dfrac{-\frac{1}{4}+\frac{\mathrm{j}}{4}}{x-\mathrm{j}} + \dfrac{-\frac{1}{4}-\frac{\mathrm{j}}{4}}{x+\mathrm{j}}$.

Kontrolle: Rückführung auf reelle Zerlegung (Die beiden konjugierten Terme vereinigen sich zu einem reellen Bruch:)

$$\frac{-\frac{1}{4}+\frac{\mathrm{j}}{4}}{x-\mathrm{j}} + \frac{-\frac{1}{4}-\frac{\mathrm{j}}{4}}{x+\mathrm{j}} = -\frac{1}{4}\left(\frac{1-\mathrm{j}}{x-\mathrm{j}} + \frac{1+\mathrm{j}}{x+\mathrm{j}}\right) = -\frac{1}{4}\left(\frac{(1-\mathrm{j})(x+\mathrm{j})}{x^2+1} + \frac{(1+\mathrm{j})(x-\mathrm{j}i)}{x^2+1}\right).$$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

$$= -\frac{1}{4} \cdot \frac{(1-\mathrm{j})(x+\mathrm{j}) + (1+\mathrm{j})(x-\mathrm{j})}{x^2+1} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{2x+2}{x^2+1} = -\frac{x+1}{2(x^2+1)}.$$

Damit (Kontrollform):

$$\frac{1}{x^3-x^2+x-1} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{x+1}{2(x^2+1)}.$$

Quelle: https://studyflix.de/mathematik/partialbruchzerlegung-1499

b) Um die Stammfunktion einer rationalen Funktion zu finden, kann es hilfreich sein, deren Partialbruchzerlegung zu betrachten. Bereiten Sie die Funktion $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3\cdot x+2}$ entsprechend vor. →
Die Nullstellen des Nennerpolynoms $v(x) = x^2 - 3x + 2$ lassen sich mithilfe der Mitternachtsformel berechnen. Sie lauten $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$. Da beides einfache reelle Nullstellen sind, sieht der Ansatz für die Partialbruchzerlegung folgendermaßen aus:
$\frac{x+1}{x^2-3x+2} = \frac{a_{11}}{x-1} + \frac{a_{21}}{x-2}$
Durch Multiplikation mit $v(x) = x^2 - 3x + 2$ ergibt sich:
$x + 1 = a_{11} \cdot (x-2) + a_{21} \cdot (x-1)$
Nach Ausklammern und Umsortieren erhält man:
$x + 1 = (a_{11} + a_{21})x - 2a_{11} - a_{21}$
Koeffizientenvergleich führt zu folgendem Gleichungssystem:
$a_{11} + a_{21} = 1$
$-2a_{11} - a_{21} = 1$
Als Lösung dieses Systems ergibt sich $a_{11} = -2$ und $a_{21} = 3$.
Der Ansatz $\frac{x+1}{x^2-3x+2} = \frac{a_{11}}{x-1} + \frac{a_{21}}{x-2}$ liese sich auch mit Hilfe der sogenannten Zuhaltemethode bestimmen, da das Nennerpolynom nur einfache Nullstellen besitzt. Dazu wird auf der linken Seite der Nenner in seine Linearfaktoren zerlegt:
$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{a_{11}}{x-1} + \frac{a_{21}}{x-2}$
Anschließend wird einer der Faktoren zugehalten. Wird der Faktor $(x-1)$ im Nenner der linken Seite zugehalten, so bleibt nur noch $\frac{x+1}{(x-2)}$ sichtbar. Hierfür wird nun der Grenzwert für $x \to 1$ berechnet. Dieser entspricht dann der Unbekannten, die auf der rechten Seite über dem Nenner $x-1$ steht:
$a_{11} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x+1}{(x-2)} = -2$
Analog gilt:
$a_{21} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x+1}{(x-1)} = 3$
Somit lautet die Partialbruchzerlegung:
$\frac{x+1}{x^2-3x+2} = \frac{-2}{x-1} + \frac{3}{x-2}$
Nun lässt sich die Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$ ganz einfach berechnen:
$F(x) = -2 \cdot \ln|x-1| + 3 \cdot \ln|x-2| + \text{const.}$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Quelle: Quelle für Abbildung: https://www.studienkreis.de/mathematik/permutation-variation-kombination/; Abruf 19-JUL-2023

Quelle: Quelle für Text: https://de.wikipedia.org/wiki/Permutation; Abruf 19-JUL-2023

Quelle: Quelle für Text: https://de.wikipedia.org/wiki/Kombination_(Kombinatorik); Abruf 19-JUL-2023

Quelle: Quelle für Text: https://de.wikipedia.org/wiki/Variation_(Kombinatorik); Abruf 19-JUL-2023

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 8.30: Kombinatorik mit Urnenmodell v1

Quelle: [OpenAI2024ac]

a) In einer Urne befinden sich 3 rote und 2 blaue Kugeln. Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine Kugel zufällig zu ziehen?

Es gibt insgesamt 5 Kugeln, also 5 Möglichkeiten, eine Kugel zu ziehen.

b) In einer Urne befinden sich 4 rote, 3 blaue und 2 grüne Kugeln. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 2

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Kugeln nacheinander zu ziehen, wenn die Kugeln nach dem Ziehen nicht zurückgelegt werden?
Die Anzahl der Möglichkeiten beträgt $\frac{9!}{(9-2)!} = 72$ (ohne Zurücklegen).

c) In einer Urne befinden sich 5 rote und 4 blaue Kugeln. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 3 Kugeln gleichzeitig zu ziehen, wenn die Reihenfolge nicht beachtet wird?
Die Anzahl der Möglichkeiten beträgt $\binom{9}{3} = 84$.

d) In einer Urne befinden sich 6 rote, 4 blaue und 3 grüne Kugeln. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 3 Kugeln nacheinander zu ziehen, wenn die Kugeln nach dem Ziehen zurückgelegt werden?
Die Anzahl der Möglichkeiten beträgt $13^3 = 2\,197$.

e) In einer Urne befinden sich 4 rote, 3 blaue und 2 grüne Kugeln. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 2 Kugeln zu ziehen, wenn die erste Kugel zurückgelegt wird und die Reihenfolge berücksichtigt wird?
Die Anzahl der Möglichkeiten beträgt $9 \times 9 = 81$.

f) In einer Urne befinden sich 7 rote, 5 blaue und 3 grüne Kugeln. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 Kugeln gleichzeitig zu ziehen, wenn die Reihenfolge nicht beachtet wird?
Die Anzahl der Möglichkeiten beträgt $\binom{15}{4} = 1\,365$.

g) In einer Urne befinden sich 5 rote und 6 blaue Kugeln. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 4 Kugeln nacheinander zu ziehen, wenn die Kugeln nach dem Ziehen nicht zurückgelegt werden?
Die Anzahl der Möglichkeiten beträgt $\frac{11!}{(11-4)!} = 7\,920$.

h) In einer Urne befinden sich 8 rote, 5 blaue und 4 grüne Kugeln. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 5 Kugeln gleichzeitig zu ziehen, wenn die Reihenfolge beachtet wird?
Die Anzahl der Möglichkeiten beträgt $\binom{17}{5} = 6\,188$.

i) In einer Urne befinden sich 6 rote und 6 blaue Kugeln. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 3 Kugeln nacheinander zu ziehen, wenn die erste Kugel zurückgelegt wird und die Reihenfolge berücksichtigt wird?
Die Anzahl der Möglichkeiten beträgt $12 \times 12 \times 12 = 1\,728$.

j) In einer Urne befinden sich 10 rote, 8 blaue und 5 grüne Kugeln. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 6 Kugeln gleichzeitig zu ziehen, wenn die Reihenfolge nicht beachtet wird?
Die Anzahl der Möglichkeiten beträgt $\binom{23}{6} = 100\,947$.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 8.31: Kombinatorik

a) In einer Urne befinden sich sechs verschiedenfarbige Kugeln. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Kugeln in einer Reihe anzuordnen?
Es wird keine Auswahl getroffen.→Permutation
Es gibt keine Wiederholung. →$n!$ mit $n = 6$ ergibt sich $n! = 720$ Möglichkeiten

b) In einer Urne befinden sich drei grüne und zwei gelbe Kugeln. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Kugeln in einer Reihe zu ordnen?
Permutation mit Wiederholung

$$\frac{n!}{k_{gelb}! * k_{gruen}!} = \frac{5!}{3! * 2!} = \frac{5 * 4}{2} = 10$$

c) Beim Lotto werden sechs Zahlen aus insgesamt 49 gewählt. Wie viele Möglichkeiten gibt es?
Kombination ohne Wiederholung
Anzahl der ausgewählten Objekte $k = 6$
Anzahl der Gesamtmenge an Objekten $n = 49$
Berechnung der Kombination: $\binom{n}{k} = \binom{49}{6} = 13.983.816$

d) In einem Gefäß befinden sich sechs verschiedenfarbige Kugeln. Es werden drei der Kugeln gezogen, wobei die gezogene Kugel nach jedem Zug wieder zurückgelegt wird (= mit Wiederholung).
Kombination mit Wiederholung
Anzahl der ausgewählten Objekte $k = 3$
Anzahl der Gesamtmenge an Objekten $n = 6$
Berechnung der Kombination: $\binom{n+k-1}{6} = \binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = 56$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

e) In einer Kiste befinden sich sechs verschiedenfarbige Kugeln, von denen vier Kugeln gezogen werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Auswahl von vier Kugeln zu ordnen?
Variation ohne Wiederholung
$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{6!}{(6-4)!} = 360$

f) In einer Kiste befinden sich sechs verschiedenfarbige Kugeln, von denen vier Kugeln gezogen werden. Nach jedem Ziehen wird die gezogene Kugel zurück in die Urne gelegt. Wie viele mögliche Kombinationen an gezogenen Kugeln gibt es? Variation mit Wiederholung
Anzahl n aller Objekte: 6
Anzahl k der ausgewählten Objekte: 4
$n^k = 6^4 = 1296$

Quelle: https://www.studienkreis.de/mathematik/permutation-variation-kombination/ g) Abel wohnt in (0|0) und arbeitet in (8|8). Sein Arbeitskollege Kain wohnt in (4|4). Abel fährt jeden Morgen zur Arbeit und nimmt unterwegs Kain mit. Auf wie viele Arten kann er das tun?

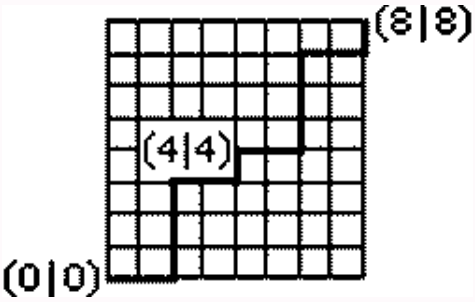


Abbildung B.1.: Wegekarte Kain und Abel

Es ist vorauszusetzen, dass er am Morgen früh keine Umwege macht.
Versuchen wir den Weg von Abel zu Kain zu beschreiben:

2 nach rechts:	r r
3 nach oben:	o o o
2 nach rechts:	r r
1 nach oben:	o
das ergibt eine Kurzform:	r r o o o r r o
oder:	r r r r o o o o
oder:	r o r o r o r o

„aus 8 Stellen werden 4 ausgewählt, um sie mit einem r zu besetzen“:
$\binom{8}{4} = 70$ auf den restlichen Stellen steht ein o.
Wir haben also von Abel zu Kain Möglichkeiten $\binom{8}{4} = 70$
und eben so viele sind es von Kain bis zum Arbeitsplatz.
Total sind Wege möglich $\binom{8}{4} \cdot \binom{8}{4} = 70 * 70 = 4900$

Quelle: Quelle: https://sos-mathe.ch/s/s1/s12/aufg_s12.html h) Sie haben eine Elektronikproduktionslinie, für die 20 dpm (defects per million) auf Lötstellenebene angegeben ist. Sie produzieren Baugruppen mit 2000-3000 Lötstellen. Mit wie viel Ausschuss müssen Sie rechnen? Beachten Sie zunächst, dass bereits eine defekte Lötstelle zum Ausschuss der Baugruppe führt. (Wir lassen Späterkennung im Feld außer Betracht.)
So könnten Sie für jede Fehlerzahl von 1-2000 (3000) die Überlegung anstellen, wie viel Ausschuss bei welcher Fehleranzahl zu erwarten ist.
Für die global Betrachtung ist aber nur wichtig, wie viele Gutteile Sie produzieren, alles andere ist Ausschuss. Somit vereinfacht sich die Betrachtung wie folgt:
Ausschuss=1-Gutteile in Prozent
$Gutteile_{Prozent} = (1 - 20\ dpm)^{Anzahl\ Lötstellen} = (1 - 20 * 10^{-6})^{Anzahl\ Lötstellen}$
bei einem Board mit 2000 (3000) Lötstellen ergibt sich somit ein Ausschuss von
$1 - (0,99998)^{2000} = 1 - 0,960789054831500126498008132522 18$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

$= 0,039210945168499873501991867477 82 \approx 3,9\%$ bzw.
$1-(0,99998)^{3000} = 1-0,941763968518163851808408820321 94$
$= 0,058236031481836148191591179678 06 \approx 5,8\%$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 9.1: Einfache Ungleichungen

a) Lösen Sie nach x auf: $x-8<19 \Rightarrow$

Sie wollen, dass x alleine steht, also müssen Sie -8 von der linken Seite der Ungleichung entfernen. Dies erhalten Sie, indem Sie auf beiden Seiten der Ungleichung $+8$ rechnen.
$x-8<19 \mid +8$
$x<27$
$\Rightarrow L=]-\infty,27[$

b) Löse nach x auf: $7-4\cdot x \geq 2\cdot(5-x)-9 \Rightarrow$

$7-4\cdot x$	$\geq 10-2\cdot x-9$	| Zusammenfassen
$7-4\cdot x$	$\geq 1-2\cdot x$	
$7-4\cdot x$	$\geq 1-2\cdot x$	$\mid -7$
$7-4\cdot x-7$	$\geq 1-2\cdot x-7$	
$-4\cdot x$	$\geq -6-2\cdot x$	$\mid +2\cdot x$
$-2\cdot x$	≥ -6	$\mid \cdot(-1)$
$2\cdot x$	≤ 6	$\mid \div 2$
x	≤ 3	

$\Rightarrow L=]-\infty,3]$

c) Lösen Sie die Ungleichung: $3\cdot x-5<2\cdot x+4 \Rightarrow$

$$3\cdot x-5<2\cdot x+4 \quad\Rightarrow\quad x<9$$

d) Lösen Sie die Ungleichung: $5-2\cdot(x-1)\leq 3\cdot x+7 \Rightarrow$

$$5-2\cdot(x-1)\leq 3\cdot x+7 \quad\Rightarrow\quad 5-2\cdot x+2\leq 3\cdot x+7 \quad\Rightarrow$$
$$7-2\cdot x\leq 3\cdot x+7 \quad\Rightarrow\quad -2\cdot x\leq 3\cdot x \quad\Rightarrow$$
$$0\leq 5\cdot x \quad\Rightarrow\quad 0\leq x$$

e) $7-3(x+2)>4(x-1)+2$

$$7-3(x+2)>4(x-1)+2 \quad\Rightarrow$$
$$7-3x-6>4x-4+2 \quad\Rightarrow$$
$$1-3x>4x-2 \quad\Rightarrow$$
$$1+2>4x+3x \quad\Rightarrow\quad 3>7x \quad\Rightarrow$$
$$\tfrac{3}{7}>x \quad\Rightarrow\quad x<\tfrac{3}{7}$$

f) $5\cdot x-3\leq 2\cdot x+4\cdot x+1$

$$5x-3\leq 2x+4x+1 \quad\Rightarrow\quad 5x-3\leq 6x+1 \quad\Rightarrow$$
$$-3\leq x+1 \quad\Rightarrow\quad -4\leq x \quad\Rightarrow\quad x\geq -4$$

g) $2\cdot(x-4)>3\cdot(x-2)-5$

$$2\cdot(x-4)>3\cdot(x-2)-5 \quad\Rightarrow\quad 2\cdot x-8>3\cdot x-6-5 \quad\Rightarrow$$
$$2\cdot x-8>3\cdot x-11 \quad\Rightarrow\quad -8+11>x \quad\Rightarrow$$
$$3>x \quad\Rightarrow\quad x<3$$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 9.2: Ungleichungen (1) v1

a) Lösen Sie für $x\in\mathbb{R}$ die Ungleichung $|x+3|\leq 2$.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

1. Fall: $x+3 \geq 0 \Rightarrow x+3 \leq 2 \Rightarrow x \leq -1$
aus $x+3 \geq 0 \wedge x \leq -1 \Rightarrow x \in [-3,-1]$
2. Fall: $x+3 < 0 \Rightarrow -(x+3) \leq 2 \Rightarrow x+3 \geq -2 \Rightarrow x \geq -5$
aus $x+3 < 0 \wedge x \geq -5 \Rightarrow x \in [-5,-3[$
$\Rightarrow L = [-5,-1]$

Quelle: [Sche21] Nr. 2 2).

b) Für welche x gilt $x^3 > x^2 \Rightarrow$
$\longleftrightarrow \quad x^3 - x^2 > 0 \longleftrightarrow \quad x^2 \cdot (x-1) > 0$

1. $x < 0$: x^2 ist stets größer Null, x-1 stets kleiner, keine Lösungsmenge
2. $x = 0$: Term ist gleich Null, keine Lösungsmenge
3. $0 < x < 1$: da $x^2 > 0 \longleftrightarrow (x-1) > 0$ keine Lösung
4. $x = 1$: Term ist gleich Null, keine Lösungsmenge
5. $x > 1$: Term ist stets größer Null,

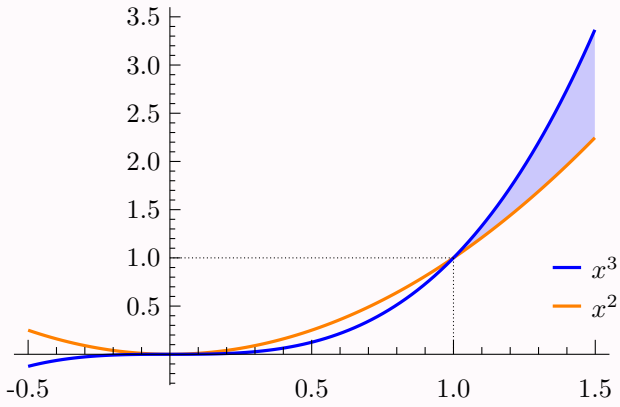
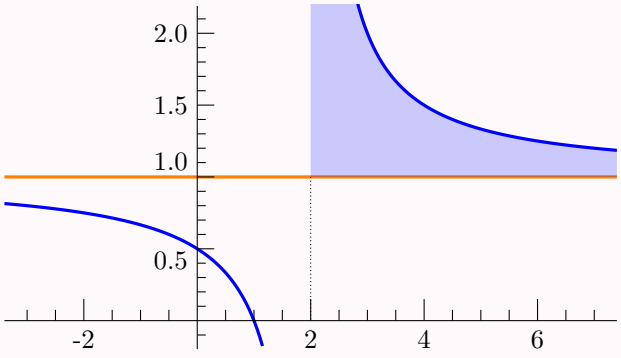


Abbildung B.2.: Graph zu $x^3, x^2, x^3 > x^2$

c) $\dfrac{x-1}{x-2} > 1 \Rightarrow$

1. $x < 1$: $x-1 < 0, x-2 < 0 \Rightarrow x-1 < x-2$ keine Lösung
2. $x = 1$: $0 > 1$ keine Lösung
3. $1 < x < 2$: $x-2 < 0 \Rightarrow x-1 < x-2$ keine Lösung
4. $2 = x$: nicht definiert
5. $2 < x$: $x-1 > 0, x-2 > 0 \Rightarrow x-1 > x-2$ gilt für alle $x > 2$



© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Abbildung B.3.: Graph zu $\frac{x-1}{x-2} > 1$

d) $\frac{2x+3}{4} > \frac{x-1}{2}$

$$\frac{2x+3}{4} > \frac{x-1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2(2x+3) > 4(x-1)$$
$$\Rightarrow \quad 4x+6 > 4x-4 \quad \Rightarrow$$
$$6 > -4 \quad \text{(immer wahr)}$$

e) $-3(2x-1) \geq 5x+8$

$$-3(2x-1) \geq 5x+8 \quad \Rightarrow \quad -6x+3 \geq 5x+8 \quad \Rightarrow$$
$$3 \geq 11x+8 \quad \Rightarrow \quad -5 \geq 11x \quad \Rightarrow \quad x \leq -\tfrac{5}{11}$$

f) $4x-7 < 3x+2x-5$

$$4x-7 < 3x+2x-5 \quad \Rightarrow \quad 4x-7 < 5x-5 \quad \Rightarrow$$
$$-7 < x-5 \quad \Rightarrow \quad -2 < x \quad \Rightarrow \quad x > -2$$

g) $\frac{x+2}{3} \leq \frac{2x-5}{4}$

$$\frac{x+2}{3} \leq \frac{2x-5}{4} \quad \Rightarrow \quad 4(x+2) \leq 3(2x-5) \quad \Rightarrow$$
$$4x+8 \leq 6x-15 \quad \Rightarrow \quad 8 \leq 2x-15 \quad \Rightarrow \quad 23 \leq 2x \quad \Rightarrow \quad x \geq \tfrac{23}{2}$$

h) $\frac{4 \cdot x+1}{2} \geq \frac{3 \cdot x-2}{3}$

$$\frac{4 \cdot x+1}{2} \geq \frac{3 \cdot x-2}{3} \quad \Rightarrow \quad 3(4 \cdot x+1) \geq 2(3 \cdot x-2) \quad \Rightarrow$$
$$12x+3 \geq 6x-4 \quad \Rightarrow \quad 6x+3 \geq -4 \quad \Rightarrow$$
$$6x \geq -7 \quad \Rightarrow \quad x \geq -\tfrac{7}{6}$$

i) Lösen Sie die Ungleichung: $|2 \cdot x-3| \leq 5$

Fallunterscheidung:
Fall 1:
$2x-3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 2x-3 \leq 5$
$2x-3 \leq 5 \quad \Rightarrow \quad 2x \leq 8 \quad \Rightarrow \quad x \leq 4$

Fall 2:
$2x-3 < 0 \quad \Rightarrow \quad -(2x-3) \leq 5$
$-(2x-3) \leq 5 \quad \Rightarrow \quad -2x+3 \leq 5 \quad \Rightarrow \quad -2x \leq 2 \quad \Rightarrow \quad x \geq -1$
Lösung: $-1 \leq x \leq 4$

j) Lösen Sie die Ungleichung: $|x^2-4| < 3$

Fallunterscheidung:
Fall 1:
$x^2-4 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2-4 < 3$
$x^2-4 < 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 < 7 \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{7} < x < \sqrt{7}$

Fall 2:
$x^2-4 < 0 \quad \Rightarrow \quad -(x^2-4) < 3$
$-(x^2-4) < 3 \quad \Rightarrow \quad 4-x^2 < 3 \quad \Rightarrow \quad 1 < x^2 \quad \Rightarrow \quad x < -1 \quad \text{oder} \quad x > 1$
Lösung: $-\sqrt{7} < x < -1 \quad \text{oder} \quad 1 < x < \sqrt{7}$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 9.3: weitere Ungleichungen für Liebhaber [OpenAI2024z]

a) Löse die Ungleichung $x + 3 > 5$.

$x + 3 > 5$

$x > 5 - 3$ Die Lösung ist $x > 2$.

$x > 2$

b) Löse die Ungleichung $2x - 7 \leq 3$.

$2x - 7 \leq 3$

$2x \leq 3 + 7$

$2x \leq 10$ Die Lösung ist $x \leq 5$.

$x \leq \frac{10}{2}$

$x \leq 5$

c) Löse die Ungleichung $-4x + 8 \geq 0$.

$-4x + 8 \geq 0$

$-4x \geq -8$

$x \leq \frac{-8}{-4}$ Die Lösung ist $x \leq 2$.

$x \leq 2$

d) Löse die Ungleichung $3(x - 2) < 2(x + 1)$.

$3(x - 2) < 2(x + 1)$

$3x - 6 < 2x + 2$ Die Lösung ist $x < 8$.

$3x - 2x < 2 + 6$

$x < 8$

e) Löse die Ungleichung $\frac{2x+3}{x-1} > 1$.

Lösung der Ungleichung

Gegeben ist die Ungleichung:

$$\frac{2x + 3}{x - 1} > 1$$

Um diese Ungleichung zu lösen, gehen wir wie folgt vor:

Schritt 1: Subtraktion von 1 auf beiden Seiten

Zuerst bringen wir die Ungleichung auf eine einheitliche Bruchform. Dazu schreiben wir die 1 als $\frac{x-1}{x-1}$ um:

$$\frac{2x + 3}{x - 1} - 1 > 0$$

$$\frac{2x + 3}{x - 1} - \frac{x - 1}{x - 1} > 0$$

$$\frac{2x + 3 - (x - 1)}{x - 1} > 0$$

$$\frac{2x + 3 - x + 1}{x - 1} > 0$$

$$\frac{x + 4}{x - 1} > 0$$

Schritt 2: Bestimmen der Nullstellen und Definitionslücken

Die Nullstelle des Zählers ist:

$$x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -4$$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Die Definitionslücke des Nenners ist:

$$x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

Schritt 3: Bestimmen des Vorzeichens
Nun untersuchen wir das Vorzeichen des Bruchs $\frac{x+4}{x-1}$ in den Intervallen, die durch die Nullstellen und die Definitionslücke entstehen: - Für $x < -4$ (z.B. $x = -5$): $\frac{-5+4}{-5-1} = \frac{-1}{-6} > 0$ - Für $-4 < x < 1$ (z.B. $x = 0$): $\frac{0+4}{0-1} = \frac{4}{-1} < 0$ - Für $x > 1$ (z.B. $x = 2$): $\frac{2+4}{2-1} = \frac{6}{1} > 0$ Schritt 4: Lösung
Die Ungleichung $\frac{x+4}{x-1} > 0$ ist erfüllt für:

$$x < -4 \quad \text{oder} \quad x > 1$$

Somit ist die Lösungsmenge:

$$x \in (-\infty, -4) \cup (1, \infty)$$

f) Löse die Ungleichung $x^2 - 5x + 6 \leq 0$.
Die Lösung ist $2 \leq x \leq 3$.

g) Löse die Ungleichung $4x - x^2 > 0$.
Die Lösung ist $0 < x < 4$.

h) Löse die Ungleichung $x^2 - 4x + 3 \geq 0$.
Die Lösung ist $x \leq 1$ oder $x \geq 3$.

i) Löse die Ungleichung $3 - \frac{5}{x} > 0$.
Die Lösung ist $x > \frac{5}{3}$.

j) Löse die Ungleichung $\frac{1}{x^2-1} \leq 2$.
Die Lösung ist $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$, wobei $x \neq \pm 1$.

k) Löse die Ungleichung $x^3 - 6x^2 + 9x \leq 0$.
Die Lösung ist $x \leq 3$.

l) Löse die Ungleichung $\frac{2x+3}{x^2-4} > 0$.
Die Lösung ist $x < -2$ oder $0 < x < 2$.

m) Löse die Ungleichung $x^4 - 4x^2 > 0$.
Die Lösung ist $x < -\sqrt{2}$ oder $x > \sqrt{2}$.

n) Löse die Ungleichung $|x - 2| < 3$.
Die Lösung ist $-1 < x < 5$.

o) Löse die Ungleichung $\frac{3x-7}{x+2} \leq 1$.
Die Lösung ist $x \geq 7$ oder $x \leq -2$.

p) Löse die Ungleichung $\log(x) \geq 2$.
Die Lösung ist $x \geq 100$.

q) Löse die Ungleichung $e^x \leq 5$.
Die Lösung ist $x \leq \ln(5)$.

r) Löse die Ungleichung $\sin(x) \geq \frac{1}{2}$ im Intervall $[0, 2\pi]$.
Die Lösung ist $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$.

s) Löse die Ungleichung $\cos(2x) < 0$ im Intervall $[0, \pi]$.
Die Lösung ist $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$.

t) Löse die Ungleichung $2^x > x^2$.
Die Lösung ist $x \in]-\infty, -2[\cup]0, \infty[$.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 9.4: weitere Ungleichungen mit Fallunterscheidung [OpenAI2024c]

a) Löse die Ungleichung $|x-3|<5$.
Die Ungleichung $|x-3|<5$ bedeutet: $-5<x-3<5$ Durch Addition von 3 zu allen Seiten erhalten wir: $-2<x<8$ Die Lösung ist also $x\in(-2,8)$.

b) Löse die Ungleichung $|2x+1|\geq 3$.
Die Ungleichung $|2x+1|\geq 3$ bedeutet: $2x+1\geq 3$ oder $2x+1\leq -3$ Fall 1: $2x+1\geq 3$ $2x\geq 2$ $\Rightarrow$ $x\geq 1$ Fall 2: $2x+1\leq -3$ $2x\leq -4$ $\Rightarrow$ $x\leq -2$ Die Lösung ist also $x\leq -2$ oder $x\geq 1$, also $x\in(-\infty,-2]\cup[1,\infty)$.

c) Löse die Ungleichung $\frac{x-2}{x+1}>0$.
Betrachten wir die Fälle:

- Fall 1: $x-2>0$ und $x+1>0$
  $x>2$ und $x>-1$ $\Rightarrow$ $x>2$
- Fall 2: $x-2<0$ und $x+1<0$
  $x<2$ und $x<-1$ $\Rightarrow$ $x<-1$

Die Lösung ist $x\in(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$.

d) Löse die Ungleichung $\frac{x+3}{x-4}\leq 1$.
Schritt 1: Umformen der Ungleichung
Zuerst bringen wir alle Terme auf eine Seite, um eine Bruchungleichung zu erhalten:

$$\frac{x+3}{x-4}-1\leq 0$$

Jetzt schreiben wir den Term 1 als Bruch mit dem Nenner $x-4$:

$$\frac{x+3}{x-4}-\frac{x-4}{x-4}\leq 0$$

Nun fassen wir die Brüche zusammen:

$$\frac{(x+3)-(x-4)}{x-4}\leq 0$$

Vereinfachen der Ausdrücke im Zähler:

$$\frac{x+3-x+4}{x-4}\leq 0$$

$$\frac{7}{x-4}\leq 0$$

Schritt 2: Analyse der Bruchungleichung
Die Ungleichung lautet nun:

$$\frac{7}{x-4}\leq 0$$

Da der Zähler 7 eine positive Konstante ist, hängt das Vorzeichen des Bruchs nur vom Nenner $x-4$ ab. Um die Ungleichung zu erfüllen, muss der Nenner negativ sein.
Schritt 3: Bedingung für den Nenner
Der Nenner $x-4$ muss negativ sein, damit der Bruch kleiner oder gleich null wird:

$$x-4<0$$

Das führt zu:

$$x<4$$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Schritt 4: Ausschluss der Definitionslücke
Die Bruchungleichung ist nicht definiert für $x = 4$, da der Nenner null wird. Daher müssen wir $x = 4$ ausschließen.
Schritt 5: Lösung
Die Lösung der Ungleichung ist:

$$x \in (-\infty, 4)$$

Endergebnis
Die Lösung der Ungleichung $\frac{x+3}{x-4} \leq 1$ ist:

$$x \in (-\infty, 4)$$

e) Löse die Ungleichung $|3x - 4| \leq 2x + 1$.
Betrachten wir die Fälle:

- Fall 1: $3x - 4 \geq 0$, also $x \geq \frac{4}{3}$
  $3x - 4 \leq 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad x \leq 5$ Die Lösung ist $x \in \left[\frac{4}{3}, 5\right]$.
- Fall 2: $3x - 4 < 0$, also $x < \frac{4}{3}$
  $-(3x - 4) \leq 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad -3x + 4 \leq 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad 5x \geq 3 \quad \Rightarrow \quad x \geq \frac{3}{5}$ Die Lösung ist $x \in \left[\frac{3}{5}, \frac{4}{3}\right)$.

Die Gesamtlösung ist $x \in \left[\frac{3}{5}, 5\right]$.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 10.1: Umrechnung verschiedener Winkelmaße

a)	$\alpha = 0°$	$= 0\,\text{rad}$
b)	$\alpha = 45°$	$\approx 0{,}785\,398\,163\,\text{rad}$
c)	$\alpha = 225°$	$\approx 3{,}926\,990\,817\,\text{rad}$
d)	$\alpha = 353°$	$\approx 6{,}161\,012\,26\,\text{rad}$
e)	$\alpha = -42°$	$\approx -0{,}733\,038\,286\,\text{rad}$
f)	$\alpha = -267°$	$\approx -4{,}660\,029\,103\,\text{rad}$
g)	$\alpha = 0$	$= 0°$
h)	$\alpha = \pi/2$	$= 90°$
i)	$\alpha = 5 \cdot \pi/6$	$= 150°$
j)	$\alpha = -7 \cdot \pi/8$	$= -157{,}5°$
k)	$\alpha = 1$	$\approx 57{,}296°$
l)	$\alpha = \text{e}$	$\approx 155{,}746°$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 10.2: Strahlensatz

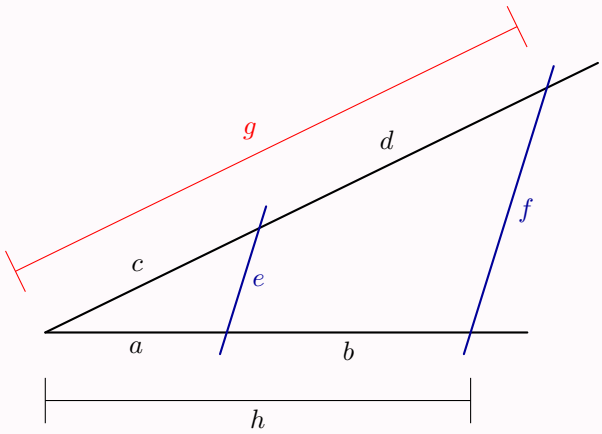
© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

a) Berechne die Länge der Strecke g.

Es sind:

- $a = 3{,}2\,\text{cm}$
- $h = 7{,}5\,\text{cm}$
- $c = 4{,}2\,\text{cm}$.

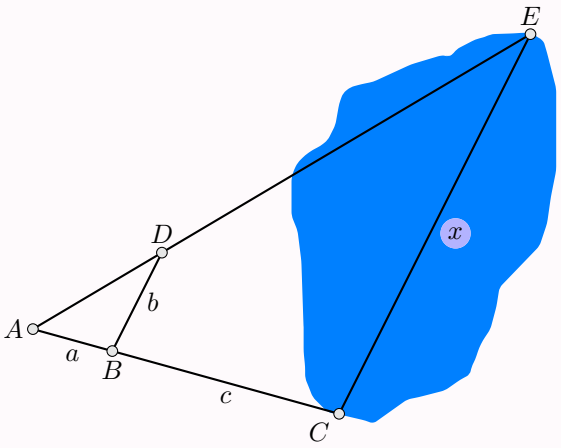


Nach dem 1. Strahlensatz gilt: $\frac{a}{h} = \frac{c}{g} \quad \Leftrightarrow \quad g = c \cdot \frac{h}{a} \quad \Rightarrow \quad g \approx 9{,}8\,cm$

b) Um die Entfernung zwischen den Uferpunkten C und E zu bestimmen, steckt man eine zu CE parallele Strecke BD ab und misst:

$a = 25\,\text{m},\ b = 45\,\text{m}$ und $c = 80\,\text{m}$.

Bestimme die Entfernung x.



Nach dem 2. Strahlensatz gilt:

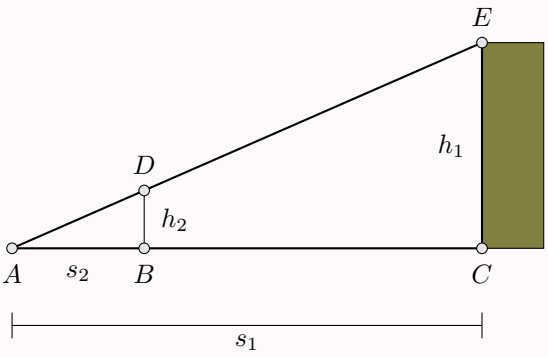
$$\frac{a}{b} = \frac{a+c}{x} \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot x = b \cdot (a+c) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{b \cdot (a+c)}{a} \quad \Rightarrow \quad x \approx 189\,m$$

c) Die Höhe h_1 eines Turms kann man mit Hilfe der Schattenlänge eines Stabes mit der Länge BD bestimmen.

Hierzu wird der Stab senkrecht so aufgestellt, dass das Ende seines Schattens mit dem Schattenende des Turms zusammenfällt (A).

Bestimme die Turmhöhe, wenn gilt:

- $s_1 = 65\,\text{m}$
- $s_2 = 3\,\text{m}$
- $h_2 = 2\,\text{m}$



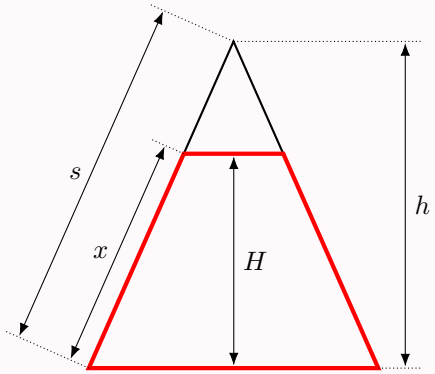
Nach dem 2. Strahlensatz gilt: $\frac{h_1}{s_1} = \frac{h_2}{s_2} \quad \Leftrightarrow \quad h_1 = s_1 \cdot \frac{h_2}{s_2} \quad \Rightarrow \quad h_1 = 43\,{}^1\!/_3\,\text{m}$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

d) In einem Dachgiebel mit $h = 3{,}20\,\text{m}$ und $s = 3{,}50\,\text{m}$ soll in $H = 2{,}10\,\text{m}$ Höhe (gemessen vom Boden des Dachgiebels) eine Decke eingezogen werden.

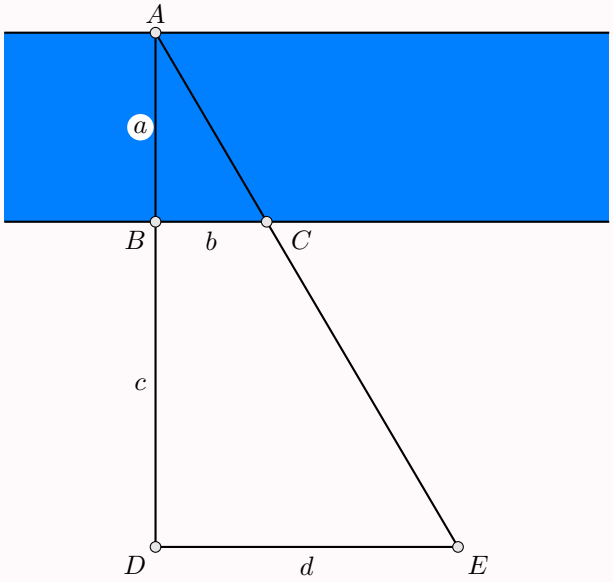
Welche Länge x hat die schräge Wand in dem entstehenden Raum?



Nach dem 1. Strahlensatz gilt: $\frac{x}{s} = \frac{H}{h} \quad \Leftrightarrow \quad x = s \cdot \frac{H}{h} \approx 2{,}3\,\text{m}.$

e) Bestimme die Breite a eines Kanals, wenn folgende Strecken gemessen werden:

- $b = 12\,\text{m}$
- $c = 30\,\text{m}$
- $d = 22\,\text{m}$



Nach dem 1. Strahlensatz gilt: $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot (d-b) = b \cdot c \quad \Rightarrow \quad a = 36\,\text{m}.$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Quelle: http://www.mathe-trainer.de/Klasse9/Strahlensaetze/Block1/Aufgaben.htm

Quelle: https://sos-mathe.ch/pdfg/g44_23.pdfQuelle: https://sos-mathe.ch/

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 10.3: Aufgaben für den Taschenrechner

a) $\alpha = 45°$ $\leftrightarrow 0,785398163$ $\sin(\alpha) = 0,707106781$ $\cos(\alpha) = 0,707106781$
$\rightarrow \tan(\alpha) = 1$ $\cot(\alpha) = 1$

b) $\alpha = 225°$ $\leftrightarrow 3,926990817$ $\sin(\alpha) = -0,707106781$ $\cos(\alpha) = -0,707106781$
$\rightarrow \tan(\alpha) = 1$ $\cot(\alpha) = 1$

c) $\alpha = 353°$ $\leftrightarrow 6,16101226$ $\sin(\alpha) = -0,121869343$ $\cos(\alpha) = 0,992546152$
$\rightarrow \tan(\alpha) = -0,122784561$ $\cot(\alpha) = -8,144346428$

d) $\alpha = 100°$ $\leftrightarrow 1,745329252$ $\sin(\alpha) = 0,984807753$ $\cos(\alpha) = -0,173648178$
$\rightarrow \tan(\alpha) = -5,67128182$ $\cot(\alpha) = -0,176326981$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

e) $\alpha = 344°$ $\leftrightarrow 6,003932627$ $\sin(\alpha) = -0,275637356$ $\cos(\alpha) = 0,961261696$
$\rightarrow \tan(\alpha) = -0,286745386$ $\cot(\alpha) = -3,487414444$

f) $\alpha = -42°$ $\leftrightarrow -0,733038286$ $\sin(\alpha) = -0,669130606$ $\cos(\alpha) = 0,743144825$
$\rightarrow \tan(\alpha) = -0,900404044$ $\cot(\alpha) = -1,110612515$

g) $\alpha = -24°$ $\leftrightarrow -0,41887902$ $\sin(\alpha) = -0,406736643$ $\cos(\alpha) = 0,913545458$
$\rightarrow \tan(\alpha) = -0,445228685$ $\cot(\alpha) = -2,246036774$

h) $\alpha = 0°$ $\leftrightarrow 0$ $\sin(\alpha) = 0$ $\cos(\alpha) = 1$
$\rightarrow \tan(\alpha) = 0$ $\cot(\alpha) = \infty$

i) $\alpha = -220°$ $\leftrightarrow -3,839724354$ $\sin(\alpha) = 0,64278761$ $\cos(\alpha) = -0,766044443$
$\rightarrow \tan(\alpha) = -0,839099631$ $\cot(\alpha) = -1,191753593$

j) $\alpha = 13°$ $\leftrightarrow 0,226892803$ $\sin(\alpha) = 0,224951054$ $\cos(\alpha) = 0,974370065$
$\rightarrow \tan(\alpha) = 0,230868191$ $\cot(\alpha) = 4,331475874$

k) $\alpha = 298°$ $\leftrightarrow 5,201081171$ $\sin(\alpha) = -0,882947593$ $\cos(\alpha) = 0,469471563$
$\rightarrow \tan(\alpha) = -1,880726465$ $\cot(\alpha) = -0,531709432$

l) $\alpha = 19°$ $\leftrightarrow 0,331612558$ $\sin(\alpha) = 0,325568154$ $\cos(\alpha) = 0,945518576$
$\rightarrow \tan(\alpha) = 0,344327613$ $\cot(\alpha) = 2,904210878$

m) $\alpha = -267°$ $\leftrightarrow -4,660029103$ $\sin(\alpha) = 0,998629535$ $\cos(\alpha) = -0,052335956$
$\rightarrow \tan(\alpha) = -19,08113669$ $\cot(\alpha) = -0,052407779$

n) $\alpha = -107°$ $\leftrightarrow -1,8675023$ $\sin(\alpha) = -0,956304756$ $\cos(\alpha) = -0,292371705$
$\rightarrow \tan(\alpha) = 3,270852618$ $\cot(\alpha) = 0,305730681$

o) $\alpha = -25°$ $\leftrightarrow -0,436332313$ $\sin(\alpha) = -0,422618262$ $\cos(\alpha) = 0,906307787$
$\rightarrow \tan(\alpha) = -0,466307658$ $\cot(\alpha) = -2,144506921$

p) $\alpha = 241°$ $\leftrightarrow 4,206243497$ $\sin(\alpha) = -0,874619707$ $\cos(\alpha) = -0,48480962$
$\rightarrow \tan(\alpha) = 1,804047755$ $\cot(\alpha) = 0,554309051$

q) $\alpha = 90°$ $\leftrightarrow 1,570796327$ $\sin(\alpha) = 1$ $\cos(\alpha) = 6,12574E-17$
$\rightarrow \tan(\alpha) = \infty$ $\cot(\alpha) = 0$

r) $\alpha = 160°$ $\leftrightarrow 2,792526803$ $\sin(\alpha) = 0,342020143$ $\cos(\alpha) = -0,939692621$
$\rightarrow \tan(\alpha) = -0,363970234$ $\cot(\alpha) = -2,747477419$

s) $\alpha = -341°$ $\leftrightarrow -5,951572749$ $\sin(\alpha) = 0,325568154$ $\cos(\alpha) = 0,945518576$
$\rightarrow \tan(\alpha) = 0,344327613$ $\cot(\alpha) = 2,904210878$

t) $\alpha = -73°$ $\leftrightarrow -1,274090354$ $\sin(\alpha) = -0,956304756$ $\cos(\alpha) = 0,292371705$
$\rightarrow \tan(\alpha) = -3,270852618$ $\cot(\alpha) = -0,305730681$

u) $\alpha = -242°$ $\leftrightarrow -4,22369679$ $\sin(\alpha) = 0,882947593$ $\cos(\alpha) = -0,469471563$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

$\rightarrow \tan(\alpha) = -1,880726465 \quad \cot(\alpha) = -0,531709432$

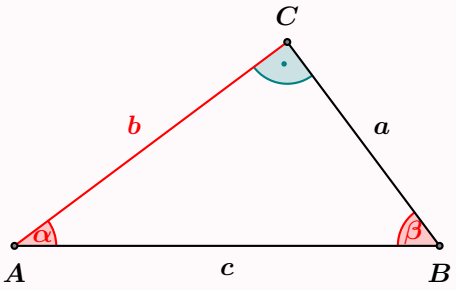
v) $\alpha = 346° \quad \leftrightarrow 6,038839212 \quad \sin(\alpha) = -0,241921896 \quad \cos(\alpha) = 0,970295726$
$\rightarrow \tan(\alpha) = -0,249328003 \quad \cot(\alpha) = -4,010780934$

w) $\alpha = 291° \quad \leftrightarrow 5,078908123 \quad \sin(\alpha) = -0,933580426 \quad \cos(\alpha) = 0,35836795$
$\rightarrow \tan(\alpha) = -2,605089065 \quad \cot(\alpha) = -0,383864035$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 10.4: Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck

a) Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel (rot markiert) der Dreiecke. Mit
$\gamma = 90°$
$a = 12{,}7\,\text{cm}$
$c = 24{,}9\,\text{cm}$



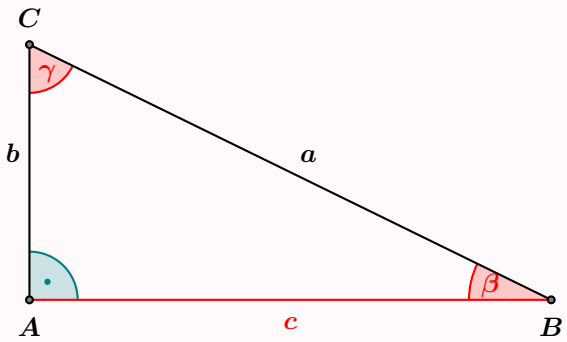
α berechnen $\quad \sin(\alpha) = \dfrac{12{,}7\,\text{cm}}{24{,}9\,\text{cm}} \Leftrightarrow \alpha = \arcsin\left(\dfrac{12{,}7\,\text{cm}}{24{,}9\,\text{cm}}\right) = 30{,}7°$

β berechnen $\quad$ Die Summe aller Winkel im Dreieck ist 180°. $\Rightarrow \quad \beta = 180° - 90° - 30{,}7° = 59{,}3°$

b berechnen $\quad$ b mithilfe des Satzes des Pythagoras ausrechnen.
$(24{,}9\,\text{cm})^2 = (12{,}7\,\text{cm})^2 + b^2 \qquad |-(12{,}7\,\text{cm})^2$
$b^2 = (24{,}9\,\text{cm})^2 - (12{,}7\,\text{cm})^2 = 458{,}72\,\text{cm}^2$
$b \approx 21{,}4\,\text{cm}$

Quelle: https://de.serlo.org/mathe/30680/aufgaben-zum-sinus-kosinus-und-tangens-im-rechtwinkligen-dreieck

b) Berechnen Sie die fehlenden Seiten und Winkel (rot markiert) der Dreiecke. Mit
$\alpha = 90°$
$b = 420\,\text{m}$
$a = 645\,\text{m}$



β berechnen $\quad \sin(\beta) = \dfrac{420\,\text{m}}{645\,\text{m}} \Leftrightarrow \alpha = \arcsin\left(\dfrac{420\,\text{m}}{645\,\text{m}}\right) = 40{,}6°$

γ berechnen $\quad$ Die Summe aller Winkel im Dreieck ist 180°. $\Rightarrow \quad \beta = 180° - 90° - 40{,}6° = 49{,}4°$

c berechnen $\quad$ c mithilfe des Satzes des Pythagoras ausrechnen.
Beachten Sie hier insbesondere,
dass c nicht die Hypotenuse des Dreiecks ist, sondern a (siehe Bild oben),
sodass die Form des Pythagoras zwar ähnlich bleibt,
aber nun a, b und c nicht die bekannten Rollen,
also a,b die Katheten und c die Hypotenuse sind, einnehmen.

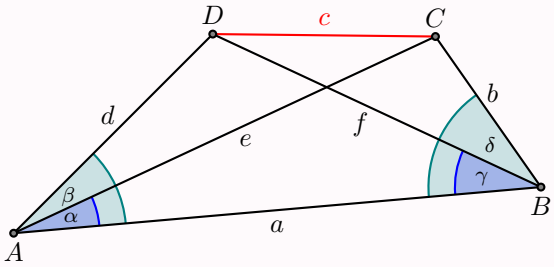
© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

$$(645\,\mathrm{m})^2 = (420\,\mathrm{m})^2 + c^2$$
$$c^2 = (645\,\mathrm{m})^2 - (420\,\mathrm{m})^2$$
$$c^2 = 239625\,\mathrm{m}^2$$
$$c \approx 490\,\mathrm{m}$$

Vorwärtseinschnitt zur Längenermittlung:

Leiten Sie zunächst die Berechnung der Länge c her und setzen Sie danach ein.



c)
$$a = 20\,\mathrm{m}$$
$$\alpha = 20°$$
$$\beta = 40°$$
$$\gamma = 30°$$
$$\delta = 60°$$

Die Berechnung erfolgt durch Auflösung der Dreiecke ABC, ABD und schließlich ACD. Zuerst wird im Dreieck ABC über den Sinussatz die Strecke e berechnet:

$$\frac{e}{\sin\delta} = \frac{a}{\sin(180° - \alpha - \delta)}$$

also

$$e = \frac{a \cdot \sin\delta}{\sin(180° - \alpha - \delta)}$$

Nun kann man im Dreieck ABD über den Sinussatz die Strecke d berechnen:

$$\frac{d}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin(180° - \beta - \gamma)}$$

also

$$d = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin(180° - \beta - \gamma)}$$

Erweiterung des Pythagoras durch den Cosinussatz

$$c^2 = d^2 + e^2 - 2de \cdot \cos(\beta - \alpha)$$

mit den Werten ergibt sich:
$$e \approx 17{,}59\,\mathrm{m}$$
$$d \approx 10{,}64\,\mathrm{m}$$
und somit $$c \approx 8{,}42\,\mathrm{m}$$

Quelle: https://de.serlo.org/mathe/30680/aufgaben-zum-sinus-kosinus-und-tangens-im-rechtwinkligen-dreieck
Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 10.5: Arcusfunktionen

a) $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \pi \cdot k; k \in \mathbb{Z}$

b) $\arccos(1) = 0 + 2 \cdot \pi \cdot k; k \in \mathbb{Z}$

c) $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

d) $\arcsin(\frac{\pi}{4}) = 0{,}903339... + 2 \cdot \pi \cdot k; k \in \mathbb{Z}$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

e) $\arctan(2 \cdot \pi) = 1{,}412965...$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 10.6: Kopfübungen mit Arcus[OpenAI2024m]

a) Berechnen Sie $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$. $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

b) Berechnen Sie $\arccos(0)$. $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$

c) Berechnen Sie $\arctan(1)$. $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

d) Berechnen Sie $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$

e) Berechnen Sie $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$. $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 10.7: Textaufgaben Arcusfunktionen [OpenAI2024l]

a) Ein Baum wirft einen 15 Meter langen Schatten. Der Winkel zwischen der Spitze des Schattens und der Spitze des Baumes beträgt 30 Grad. Berechnen Sie die Höhe des Baumes. Die Höhe des Baumes kann mit dem Tangens von 30 Grad berechnet werden:

$$\text{Höhe} = \tan(30^\circ) \times 15 = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 15 \approx 8.66 \text{ Meter}$$

b) Der Winkel zwischen einer Seilbahn und dem Boden beträgt 45 Grad. Wenn die Seilbahn eine horizontale Entfernung von 100 Metern zurücklegt, wie hoch ist der Berg, auf den die Seilbahn führt? Die Höhe des Berges kann mit dem Tangens von 45 Grad berechnet werden:

$$\text{Höhe} = \tan(45^\circ) \times 100 = 1 \times 100 = 100 \text{ Meter}$$

c) Ein Segelboot segelt in einem 60-Grad-Winkel zur Küstenlinie. Wenn das Boot 500 Meter in gerader Linie segelt, wie weit ist es dann von der Küste entfernt? Die Entfernung des Bootes zur Küste kann mit dem Sinus von 60 Grad berechnet werden:

$$\text{Entfernung} = \sin(60^\circ) \times 500 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 500 \approx 433 \text{ Meter}$$

d) Ein Flugzeug steigt in einem Winkel von 20 Grad auf. Nach 2 Kilometern Flugstrecke in gerader Linie, wie hoch ist das Flugzeug gestiegen? Die Höhe des Flugzeugs kann mit dem Sinus von 20 Grad berechnet werden:

$$\text{Höhe} = \sin(20^\circ) \times 2000 \approx 0.342 \times 2000 \approx 684 \text{ Meter}$$

e) Eine Straße verläuft über eine Brücke im 45-Grad-Winkel zu einem Fluß. Wenn man auf der Straße 200 m von Ufer zu Ufer fahren muß, wie breit ist dann der Fluß? Die Breite des Flusses kann mit dem Sinus von 45 Grad berechnet werden:

$$\text{Breite} = \sin(45^\circ) \times 200 = \sqrt{2}/2 \times 200 \approx 141,4 \text{ Meter}$$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Quelle: http://wiki.math.se/wikis/2009/bridgecourse1-TU-Berlin/index.php/4.4_Trigonometrische_Gleichungen Beispiel 4; Abruf 2023-06-14

Quelle: http://wiki.math.se/wikis/2009/bridgecourse1-TU-Berlin/index.php/4.4_Trigonometrische_Gleichungen Beispiel 5; Abruf 2023-06-14

Quelle: http://wiki.math.se/wikis/2009/bridgecourse1-TU-Berlin/index.php/4.4_Trigonometrische_Gleichungen Beispiel 6; Abruf 2023-06-14

Quelle: http://wiki.math.se/wikis/2009/bridgecourse1-TU-Berlin/index.php/4.4_Trigonometrische_Gleichungen Beispiel 7; Abruf 2023-06-14

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 10.8: Goniometrische Gleichungen

Quelle: http://wiki.math.se/wikis/2009/bridgecourse1-TU-Berlin/index.php/4.4_%C3%9Cbungen

a) $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ $\quad x = \frac{\pi}{6} + 2 \cdot \pi \cdot k$ und $\frac{11 \cdot \pi}{6} + 2 \cdot \pi \cdot k$

b) $\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ $\quad x = \frac{\pi}{5} + 2 \cdot \pi \cdot k$ und $\frac{4 \cdot \pi}{5} + 2 \cdot \pi \cdot k$

c) $\sin(x + 40°) = \sin(65°)$ $\quad x = 25° + k \cdot 360°$ und $75° + k \cdot 360°$

d) $\sin(3 \cdot x) = \sin(15°)$ $\quad x = 5° + k \cdot 120°$ und $55° + k \cdot 120°$

e) $\sin(3 \cdot x) = \sin(x)$ $\quad x = 0 + k \cdot \pi$ und $\frac{\pi}{4} + \frac{k \cdot \pi}{2}$

f) $\tan(x) = \tan(4 \cdot x)$ $\quad x = \frac{k \cdot \pi}{3}$

g) $\cos(5 \cdot x) = \cos(x + \frac{\pi}{5})$ $\quad x = \frac{\pi}{20} + \frac{k \cdot \pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{30} + \frac{k \cdot \pi}{3}$

h) $\sin(x) \cdot \cos(3 \cdot x) = 2 \cdot \sin(x)$ $\quad x = k \cdot \pi$

i) $\sqrt{2} \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) = \cos(x)$ $\quad x = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot \pi \cdot k$ und $\frac{\pi}{2} + \cdot\pi \cdot k$ und $\frac{3 \cdot \pi}{4} + 2 \cdot \pi \cdot k$

j) $\sin(2 \cdot x) = -\sin(x)$ $\quad x = \frac{2 \cdot \pi \cdot k}{3}$ und $\pi + 2 \cdot \pi \cdot k$

k) $\sin(x) = \sqrt{3} \cdot \cos(x)$ $\quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2 \cdot \pi \cdot k$

l) $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 - \tan(x)$ $\quad x = k \cdot \pi$ und $\frac{3 \cdot \pi}{4} + k \cdot \pi$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 10.9: Sinussatz [OpenAI2024w]

a) In einem Dreieck ABC sind $a = 7$, $b = 10$ und $\alpha = 30°$. Bestimme den Winkel β.
Der Sinussatz lautet: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ Einsetzen der gegebenen Werte: $\frac{7}{\sin 30°} = \frac{10}{\sin\beta}$ Da $\sin 30° = 0.5$, ergibt sich: $\frac{7}{0.5} = \frac{10}{\sin\beta} \Rightarrow \sin\beta = \frac{10 \times 0.5}{7} \Rightarrow \sin\beta \approx 0.714 \Rightarrow \beta \approx 45.58°$

b) In einem Dreieck ABC sind $a = 8$, $b = 6$ und $\alpha = 40°$. Bestimme den Winkel β.
Verwendung des Sinussatzes: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ Einsetzen der Werte: $\frac{8}{\sin 40°} = \frac{6}{\sin\beta}$ Berechnung: $\sin\beta = \frac{6 \times \sin 40°}{8} \Rightarrow \sin\beta \approx 0.482 \Rightarrow \beta \approx 28.85°$

c) In einem Dreieck ABC sind $a = 12$, $b = 15$ und $\alpha = 60°$. Bestimme den Winkel β.
Der Sinussatz lautet: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ Einsetzen der Werte: $\frac{12}{\sin 60°} = \frac{15}{\sin\beta}$ Berechnung: $\sin\beta = \frac{15 \times \sin 60°}{12} \Rightarrow \sin\beta \approx 1.082$ Da $\sin\beta > 1$, gibt es keine Lösung. Solch ein Dreieck existiert nicht.

d) In einem Dreieck ABC sind $a = 9$, $b = 5$, $\alpha = 50°$. Berechne den Winkel β.
Verwendung des Sinussatzes: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ Einsetzen der Werte: $\frac{9}{\sin 50°} = \frac{5}{\sin\beta}$ Berechnung: $\sin\beta = \frac{5 \times \sin 50°}{9} \Rightarrow \sin\beta \approx 0.428 \Rightarrow \beta \approx 25.38°$

e) In einem Dreieck ABC sind $a = 14$, $c = 18$ und $\gamma = 70°$. Bestimme den Winkel α.
Der Sinussatz lautet: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$ Einsetzen der Werte: $\frac{14}{\sin\alpha} = \frac{18}{\sin 70°}$ Berechnung: $\sin\alpha = \frac{14 \times \sin 70°}{18} \Rightarrow \sin\alpha \approx 0.731 \Rightarrow \alpha \approx 47.32°$

f) In einem Dreieck ABC sind $a = 13$, $b = 11$ und $\beta = 45°$. Bestimme den Winkel α.
Verwendung des Sinussatzes: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ Einsetzen der Werte: $\frac{13}{\sin\alpha} = \frac{11}{\sin 45°}$ Berechnung: $\sin\alpha = \frac{13 \times \sin 45°}{11} \Rightarrow \sin\alpha \approx 0.834 \Rightarrow \alpha \approx 56.05°$

g) In einem Dreieck ABC sind $a = 15$, $b = 17$ und $\alpha = 55°$. Bestimme den Winkel β.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Der Sinussatz lautet: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ Einsetzen der Werte: $\frac{15}{\sin 55^\circ} = \frac{17}{\sin\beta}$ Berechnung: $\sin\beta = \frac{17\times\sin 55^\circ}{15} \Rightarrow \sin\beta \approx 1.139$ Da $\sin\beta > 1$, existiert solch ein Dreieck nicht.

h) In einem Dreieck ABC sind $a = 10$, $c = 12$ und $\gamma = 80^\circ$. Bestimme den Winkel α.
Verwendung des Sinussatzes: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$ Einsetzen der Werte: $\frac{10}{\sin\alpha} = \frac{12}{\sin 80^\circ}$ Berechnung: $\sin\alpha = \frac{10\times\sin 80^\circ}{12} \Rightarrow \sin\alpha \approx 0.828 \Rightarrow \alpha \approx 55.97^\circ$

i) In einem Dreieck ABC sind $a = 9$, $b = 7$ und $\alpha = 35^\circ$. Bestimme den Winkel β.
Verwendung des Sinussatzes: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ Einsetzen der Werte: $\frac{9}{\sin 35^\circ} = \frac{7}{\sin\beta}$ Berechnung: $\sin\beta = \frac{7\times\sin 35^\circ}{9} \Rightarrow \sin\beta \approx 0.444 \Rightarrow \beta \approx 26.38^\circ$

j) In einem Dreieck ABC sind $a = 11$, $b = 14$ und $\beta = 60^\circ$. Bestimme den Winkel α.
Der Sinussatz lautet: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ Einsetzen der Werte: $\frac{11}{\sin\alpha} = \frac{14}{\sin 60^\circ}$ Berechnung: $\sin\alpha = \frac{11\times\sin 60^\circ}{14} \Rightarrow \sin\alpha \approx 0.682 \Rightarrow \alpha \approx 43.04^\circ$

k) In einem Dreieck ABC sind $a = 18$, $b = 20$, $\alpha = 45^\circ$. Berechne den Winkel β.
Verwendung des Sinussatzes: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ Einsetzen der Werte: $\frac{18}{\sin 45^\circ} = \frac{20}{\sin\beta}$ Berechnung: $\sin\beta = \frac{20\times\sin 45^\circ}{18} \Rightarrow \sin\beta \approx 0.785 \Rightarrow \beta \approx 51.06^\circ$

l) In einem Dreieck ABC sind $a = 12$, $c = 16$ und $\gamma = 75^\circ$. Bestimme den Winkel α.
Verwendung des Sinussatzes: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$ Einsetzen der Werte: $\frac{12}{\sin\alpha} = \frac{16}{\sin 75^\circ}$ Berechnung: $\sin\alpha = \frac{12\times\sin 75^\circ}{16} \Rightarrow \sin\alpha \approx 0.724 \Rightarrow \alpha \approx 46.67^\circ$

m) In einem Dreieck ABC sind $a = 8$, $b = 9$ und $\alpha = 25^\circ$. Bestimme den Winkel β.
Verwendung des Sinussatzes: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ Einsetzen der Werte: $\frac{8}{\sin 25^\circ} = \frac{9}{\sin\beta}$ Berechnung: $\sin\beta = \frac{9\times\sin 25^\circ}{8} \Rightarrow \sin\beta \approx 0.472 \Rightarrow \beta \approx 28.16^\circ$

n) In einem Dreieck ABC sind $a = 5$, $c = 7$ und $\gamma = 40^\circ$. Bestimme den Winkel α.
Der Sinussatz lautet: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$ Einsetzen der Werte: $\frac{5}{\sin\alpha} = \frac{7}{\sin 40^\circ}$ Berechnung: $\sin\alpha = \frac{5\times\sin 40^\circ}{7} \Rightarrow \sin\alpha \approx 0.459 \Rightarrow \alpha \approx 27.34^\circ$

o) In einem Dreieck ABC sind $a = 10$, $b = 12$ und $\alpha = 30^\circ$. Bestimme den Winkel β.
Verwendung des Sinussatzes: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ Einsetzen der Werte: $\frac{10}{\sin 30^\circ} = \frac{12}{\sin\beta}$ Berechnung: $\sin\beta = \frac{12\times 0.5}{10} \Rightarrow \sin\beta = 0.6 \Rightarrow \beta \approx 36.87^\circ$

p) In einem Dreieck ABC sind $a = 13$, $c = 15$ und $\gamma = 50^\circ$. Bestimme den Winkel α.
Der Sinussatz lautet: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$ Einsetzen der Werte: $\frac{13}{\sin\alpha} = \frac{15}{\sin 50^\circ}$ Berechnung: $\sin\alpha = \frac{13\times\sin 50^\circ}{15} \Rightarrow \sin\alpha \approx 0.667 \Rightarrow \alpha \approx 41.81^\circ$

q) In einem Dreieck ABC sind $a = 6$, $b = 10$ und $\alpha = 25^\circ$. Bestimme den Winkel β.
Verwendung des Sinussatzes: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ Einsetzen der Werte: $\frac{6}{\sin 25^\circ} = \frac{10}{\sin\beta}$ Berechnung: $\sin\beta = \frac{10\times\sin 25^\circ}{6} \Rightarrow \sin\beta \approx 0.705 \Rightarrow \beta \approx 44.93^\circ$

r) In einem Dreieck ABC sind $a = 11$, $b = 13$ und $\alpha = 40^\circ$. Bestimme den Winkel β.
Verwendung des Sinussatzes: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ Einsetzen der Werte: $\frac{11}{\sin 40^\circ} = \frac{13}{\sin\beta}$ Berechnung: $\sin\beta = \frac{13\times\sin 40^\circ}{11} \Rightarrow \sin\beta \approx 0.844 \Rightarrow \beta \approx 57.5^\circ$

s) In einem Dreieck ABC sind $a = 14$, $c = 17$ und $\gamma = 60^\circ$. Bestimme den Winkel α.
Der Sinussatz lautet: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$ Einsetzen der Werte: $\frac{14}{\sin\alpha} = \frac{17}{\sin 60^\circ}$ Berechnung: $\sin\alpha = \frac{14\times\sin 60^\circ}{17} \Rightarrow \sin\alpha \approx 0.713 \Rightarrow \alpha \approx 45.52^\circ$

t) In einem Dreieck ABC sind $a = 16$, $b = 14$ und $\alpha = 35^\circ$. Bestimme den Winkel β.
Verwendung des Sinussatzes: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ Einsetzen der Werte: $\frac{16}{\sin 35^\circ} = \frac{14}{\sin\beta}$ Berechnung: $\sin\beta = \frac{14\times\sin 35^\circ}{16} \Rightarrow \sin\beta \approx 0.500 \Rightarrow \beta \approx 30^\circ$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 10.10: Goniometrische Aufgaben [OpenAI2024y]

a) Löse die Gleichung $\sin(x) = \frac{1}{2}$ für x im Intervall $[0, 2\pi]$.
Die Lösung ist $x = \frac{\pi}{6}$ und $x = \frac{5\pi}{6}$.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

b) Bestimme alle Lösungen der Gleichung $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ für x im Intervall $[0, 2\pi]$.
Die Lösungen sind $x = \frac{2\pi}{3}$ und $x = \frac{4\pi}{3}$.

c) Löse die Gleichung $\tan(x) = 1$ für x im Intervall $[0, 2\pi]$.
Die Lösungen sind $x = \frac{\pi}{4}$ und $x = \frac{5\pi}{4}$.

d) Finde die allgemeinen Lösungen der Gleichung $\sin(2x) = 0$.
Die allgemeinen Lösungen sind $x = \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

e) Löse die Gleichung $\cos(2x) = \cos(x)$ für x im Intervall $[0, 2\pi]$.
Die Lösungen sind $x = 0$, $x = \frac{2\pi}{3}$, $x = \frac{4\pi}{3}$ und $x = 2\pi$.

f) Bestimme die Lösungen der Gleichung $\sin(x) + \cos(x) = 0$ für x im Intervall $[0, 2\pi]$.
Die Lösungen sind $x = \frac{3\pi}{4}$ und $x = \frac{7\pi}{4}$.

g) Finde die Lösungen der Gleichung $2\sin(x) - \sqrt{3} = 0$ für x im Intervall $[0, 2\pi]$.
Die Lösungen sind $x = \frac{\pi}{3}$ und $x = \frac{5\pi}{3}$.

h) Löse die Gleichung $\tan^2(x) = 3$ für x im Intervall $[0, 2\pi]$.
Die Lösungen sind $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{2\pi}{3}$, $x = \frac{4\pi}{3}$ und $x = \frac{5\pi}{3}$.

i) Löse die Gleichung $\cos(2x) + \sin(x) = 0$ im Intervall $[0, 2\pi]$.
Die Lösungen sind $x = \frac{\pi}{6}$ und $x = \frac{5\pi}{6}$.

j) Bestimme die Lösungen der Gleichung $2\sin^2(x) - \sin(x) = 0$ für x im Intervall $[0, 2\pi]$.
Die Lösungen sind $x = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$ und $x = \frac{5\pi}{6}$.

k) Löse die Gleichung $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{4}$ für x im Intervall $[0, 2\pi]$.
Die Lösungen sind $x = \frac{\pi}{12}$, $x = \frac{5\pi}{12}$, $x = \frac{13\pi}{12}$ und $x = \frac{17\pi}{12}$.

l) Finde die Lösungen der Gleichung $1 + 2\cos(x) = 3\sin^2(x)$ für x im Intervall $[0, 2\pi]$.
Die Lösungen sind $x = \frac{\pi}{3}$ und $x = \frac{5\pi}{3}$.

m) Bestimme die Lösungen der Gleichung $\cos(3x) = 0$ für x im Intervall $[0, 2\pi]$.
Die Lösungen sind $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{6}$, $x = \frac{7\pi}{6}$, $x = \frac{3\pi}{2}$ und $x = \frac{11\pi}{6}$.

n) Löse die Gleichung $\tan(x) + \cot(x) = 2$ für x im Intervall $[0, 2\pi]$.
Die Lösungen sind $x = \frac{\pi}{4}$ und $x = \frac{5\pi}{4}$.

o) Finde die Lösungen der Gleichung $\sin^2(x) - \sin(x) + \frac{1}{4} = 0$ für x im Intervall $[0, 2\pi]$.
Die Lösungen sind $x = \frac{\pi}{6}$ und $x = \frac{5\pi}{6}$.

p) Bestimme die allgemeinen Lösungen der Gleichung $\cos(2x) = \sin(x)$.
Die allgemeinen Lösungen sind $x = \frac{2n\pi}{3} \pm \frac{\pi}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

q) Löse die Gleichung $\tan(x) = 2\sin(x)$ für x im Intervall $[0, 2\pi]$.
Die Lösungen sind $x = \arctan(2\sin(x))$ für $x \in [0, 2\pi]$.

r) Finde die allgemeinen Lösungen der Gleichung $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$.
Die allgemeinen Lösungen sind $x = \frac{2n\pi}{5} \pm \frac{\pi}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$.

s) Löse die Gleichung $\sin(2x) + \cos(2x) = \frac{1}{2}$ für x im Intervall $[0, 2\pi]$.
Die Lösungen sind $x = \frac{\pi}{8}$, $x = \frac{7\pi}{8}$, $x = \frac{9\pi}{8}$ und $x = \frac{15\pi}{8}$.

t) Finde die Lösungen der Gleichung $4\sin(x)\cos(x) = 1$ für x im Intervall $[0, 2\pi]$.
Die Lösungen sind $x = \frac{\pi}{12}$, $x = \frac{11\pi}{12}$, $x = \frac{13\pi}{12}$ und $x = \frac{23\pi}{12}$.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 11.1: Einfache Vektorrechnung

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \\ 21 \\ 33 \\ 101 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ 0 \\ 7 \\ 11 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 5 \\ 28 \\ 44 \\ 90 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \\ 21 \\ 33 \\ 101 \end{pmatrix} + 2 * \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ 0 \\ 7 \\ 11 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 21 \\ 5 \\ 35 \\ 55 \\ 79 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \\ 21 \\ 33 \\ 101 \end{pmatrix} * 2 * \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ 0 \\ 7 \\ 11 \\ -11 \end{pmatrix} = 2 * \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \\ 21 \\ 33 \\ 101 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ 0 \\ 7 \\ 11 \\ -11 \end{pmatrix} =$

$2 * (-9 * 9 + 7 * 7 + 5 * 0 + 21 * 7 + 33 * 11 - 11 * 101) =$

$2 * (-81 + 49 + 0 + 147 + 363 - 1111) = 2 * (-633) = -1266$

e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 * 16 - 4 * 8 \\ 4 * 2 - 1 * 16 \\ 1 * 8 - 2 * 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 - 32 \\ 8 - 16 \\ 8 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 53 \\ 87 \\ 1024 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 159 \\ 261 \\ 3072 \end{pmatrix} = 0$

g) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \\ 21 \\ 33 \\ 101 \end{pmatrix} \quad a = |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} * \vec{a}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \\ 21 \\ 33 \\ 101 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \\ 21 \\ 33 \\ 101 \end{pmatrix}} =$

$\sqrt{81 + 49 + 25 + 21^2 + 33^2 + 101^2} = \sqrt{11886} \approx 109,0229334$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Polarkoordinaten

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 11.2: Polarkoordinaten (1) v1

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 11.3: Polarkoordinaten (2) v1

a) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 180° \end{pmatrix} \longleftrightarrow \vec{k} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 270° \end{pmatrix} \longleftrightarrow \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 225° \end{pmatrix} \longleftrightarrow \vec{k} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

d) $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 45° \end{pmatrix} \longleftrightarrow \vec{k} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

e) $\vec{k} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \longleftrightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -45° \end{pmatrix}$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Quelle: https://mathepedia.de/Zylinderkoordinaten.html

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 11.4: Zylinderkoordinaten v1

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Kugelkoordinaten

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 11.5: Kugelkoordinaten (1) v1

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0° \\ 0° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 90° \\ 0° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0° \\ 90° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 90° \\ 90° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 180° \\ 90° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 \\ 90° \\ 180° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 90° \\ 0° \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 90° \\ 45° \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 45° \\ 90° \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 45° \\ 0° \end{pmatrix}$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 11.6: Kugelkoordinaten (2) v1

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 156° \\ 130° \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0{,}26145 \\ 0{,}31158 \\ -0{,}91355 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 5 \\ 175° \\ 88° \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}01521 \\ 0{,}43551 \\ -4{,}98097 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 29° \\ 6° \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1{,}44646 \\ 0{,}15203 \\ 2{,}62386 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -0{,}0145919630365078 \\ -0{,}13883325443188 \\ -3{,}99756330807638 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4 \\ 178° \\ -96° \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -0{,}0338186095456131 \\ -0{,}483628648377863 \\ -0{,}874619707139396 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 151° \\ -94° \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 2{,}01593267743729 \\ -0{,}655016233178915 \\ -3{,}3921923846257 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4 \\ 148° \\ -18° \end{pmatrix}$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 11.7: Spezielle Matrizen

Quelle: ChatGPT: bitte latexcode: 10 aufgaben mit lösungen zum erkennen spezieller matrizen, wie bsp. symmetrische, antisymmetrische, einheits-, hermitesche usw. a) Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie, ob A symmetrisch ist.A ist symmetrisch, da $A^T = A$.

b) Überprüfen Sie, ob die Matrix $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ antisymmetrisch ist.B ist antisymmetrisch, da $B^T = -B$.

c) Ist die Matrix $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ eine Einheitsmatrix? Begründen Sie Ihre Antwort.C ist eine Einheitsmatrix, da C die Identitätsmatrix I ist.

d) Bestimmen Sie, ob die Matrix $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ symmetrisch ist.D ist symmetrisch, da $D^T = D$.

e) Überprüfen Sie, ob die Matrix $E = \begin{pmatrix} 3 & 2i \\ -2i & 3 \end{pmatrix}$ eine Hermitesche Matrix ist.E ist eine Hermitesche Matrix, da $E^\dagger = E$.

f) Gegeben ist die Matrix $F = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ist F antisymmetrisch?F ist antisymmetrisch, da $F^T = -F$.

g) Überprüfen Sie, ob die Matrix $G = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ eine skalare Matrix ist.G ist eine skalare Matrix, da G das Produkt der Einheitsmatrix mit einem Skalar ist ($G = 5I$).

h) Bestimmen Sie, ob die Matrix $H = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ symmetrisch ist.H ist symmetrisch, da $H^T = H$.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

i) Überprüfen Sie, ob die Matrix $I = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ eine Hermitesche Matrix ist.I ist eine Hermitesche Matrix, da $I^\dagger = I$.

j) Ist die Matrix $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ symmetrisch?J ist symmetrisch, da $J^T = J$.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 11.8: Allgemeines zu Matrizen (2)

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 11.9: Einfache Matrizenoperationen

a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & -3+3 & 2+5 \\ 1+2 & 2+1 & 7+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 32 & 12 & 53 & 99 & 5 \\ 62 & 3 & 64 & 15 & 87 \\ 25 & 56 & 49 & 28 & 39 \\ 15 & 63 & 82 & 16 & 70 \\ 61 & 9 & 61 & 58 & 17 \\ 18 & 96 & 39 & 68 & 41 \\ 64 & 43 & 52 & 64 & 100 \\ 18 & 60 & 79 & 42 & 61 \\ 74 & 95 & 36 & 14 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 84 & 35 & 53 & 70 & 74 \\ 31 & 73 & 60 & 86 & 55 \\ 99 & 80 & 91 & 19 & 10 \\ 73 & 74 & 85 & 45 & 82 \\ 57 & 69 & 63 & 78 & 91 \\ 47 & 96 & 77 & 71 & 7 \\ 44 & 59 & 87 & 1 & 7 \\ 10 & 50 & 88 & 4 & 46 \\ 47 & 19 & 62 & 7 & 44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 116 & 47 & 106 & 169 & 79 \\ 93 & 76 & 124 & 101 & 142 \\ 124 & 136 & 140 & 47 & 49 \\ 88 & 137 & 167 & 61 & 152 \\ 118 & 78 & 124 & 136 & 108 \\ 65 & 192 & 116 & 139 & 48 \\ 108 & 102 & 139 & 65 & 107 \\ 28 & 110 & 167 & 46 & 107 \\ 121 & 114 & 98 & 21 & 45 \end{pmatrix}$

c) $5 * \begin{pmatrix} 0 & 78 & 89 & 73 & 19 \\ 45 & 48 & 92 & 49 & 90 \\ 39 & 99 & 50 & 6 & 14 \\ 24 & 18 & 52 & 37 & 93 \\ 94 & 87 & 92 & 32 & 72 \\ 5 & 75 & 51 & 43 & 57 \\ 50 & 37 & 28 & 2 & 93 \\ 78 & 49 & 4 & 98 & 96 \\ 51 & 98 & 62 & 91 & 79 \end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix} 50 & 93 & 25 & 52 & 82 \\ 79 & 47 & 45 & 71 & 56 \\ 23 & 90 & 71 & 40 & 61 \\ 11 & 70 & 15 & 6 & 79 \\ 13 & 70 & 46 & 10 & 30 \\ 98 & 74 & 16 & 91 & 41 \\ 28 & 60 & 89 & 46 & 46 \\ 17 & 28 & 101 & 1 & 96 \\ 78 & 51 & 46 & 41 & 29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 & 1134 & 645 & 781 & 751 \\ 857 & 616 & 820 & 813 & 898 \\ 379 & 1215 & 818 & 350 & 558 \\ 208 & 650 & 380 & 233 & 1097 \\ 574 & 995 & 828 & 240 & 600 \\ 809 & 967 & 383 & 943 & 613 \\ 474 & 665 & 852 & 378 & 833 \\ 526 & 469 & 828 & 498 & 1248 \\ 879 & 898 & 678 & 783 & 627 \end{pmatrix}$

d) Dreh- oder Rotationsmatrizen beschreiben die Drehung um eine Achse.

$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ beschreibt die Drehung um die x-Achse des kartesischen Koordinatensystems.

Was ergibt jeweils die Rotation um 45° der Einheitsvektoren?

mit $\alpha = 45°$ ergibt sich $R_x(45°) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 45° & -\sin 45° \\ 0 & \sin 45° & \cos 45° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

Die Multiplikation erfolgt von links, somit $\vec{e}_{gedreht} = R_x(\alpha) * \vec{e}_{ungedreht}$

$\vec{e}_{x,gedreht} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} * \vec{e}_{x,ungedreht} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

, was logisch ist, denn jegliche Drehung des $\vec{e}_x$ um sich, fällt auf ihn selbst.
entsprechend

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+0 \\ 0+\frac{\sqrt{2}}{2}+0 \\ 0+\frac{\sqrt{2}}{2}+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+0 \\ 0+0-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0+0+\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

, was beides der Anschauung entspricht.

e) Multiplikation: Denken Sie an das Schema Zeile · Spalte!

$$\begin{pmatrix} 29 & 11 & 63 & 23 & 78 \\ 48 & 3 & 84 & 83 & 41 \\ 74 & 28 & 57 & 39 & 28 \\ 10 & 95 & 57 & 48 & 36 \\ 99 & 59 & 27 & 100 & 31 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 82 & 23 & 43 & 6 & 53 \\ 89 & 45 & 1 & 20 & 20 \\ 42 & 14 & 68 & 11 & 11 \\ 51 & 44 & 30 & 5 & 79 \\ 44 & 65 & 44 & 93 & 47 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10608 & 8126 & 9664 & 8456 & 7933 \\ 13768 & 8732 & 12073 & 5500 & 12012 \\ 14175 & 7296 & 9488 & 4430 & 9506 \\ 15701 & 9755 & 7425 & 6175 & 8541 \\ 20967 & 11725 & 10516 & 5454 & 16081 \end{pmatrix}$$

f) Multiplikation: Denken Sie an das Schema Zeile · Spalte!

$$\begin{pmatrix} 67 & 91 & 31 & 93 & 42 \\ 79 & 57 & 85 & 92 & 83 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 45 & 14 & 92 & 86 \\ 94 & 25 & 29 & 2 & 54 \\ 31 & 15 & 95 & 8 & 88 \\ 88 & 61 & 24 & 73 & 1 \\ 19 & 7 & 57 & 34 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19368 & 11722 & 11148 & 14811 & 14589 \\ 18693 & 12448 & 17773 & 17600 & 19602 \end{pmatrix}$$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 11.10: Zwei-Punkte-Form

a) $P = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\rightarrow g = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$; $Q = \begin{pmatrix} -7 \\ -21 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow g = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -21 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

c) $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\rightarrow g = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $P = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$; $Q = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow g = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e) $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\rightarrow g = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

f) $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow g = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

g) $P = \begin{pmatrix} 42 \\ -37 \\ -4 \end{pmatrix}$; $Q = \begin{pmatrix} 6 \\ -25 \\ 14 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow g = \begin{pmatrix} 42 \\ -37 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -25 \\ 14 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 11.11: Schnittpunkt zweier Geraden

a) $g = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $h = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \vec{S} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) $g = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $h = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$

→ Kein Schnittpunkt, die Geraden sind zueinander parallel.

c) $g = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $h = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \vec{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

d) $g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$; $h = \begin{pmatrix} -2 \\ 22 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \vec{S} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

e) $g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $h = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$

→ Kein Schnittpunkt, die Geraden sind zueinander parallel.

f) $g = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$; $h = \begin{pmatrix} 2 \\ -6\frac{1}{3} \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \vec{S} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix}$$

g) $g = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$; $h = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \vec{S} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

h) $g = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$; $h = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$

→ Unendlich viele Schnittpunkte, die Geraden sind identisch.

i) $g = \begin{pmatrix} -7 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$; $h = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \vec{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

j) $g = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $h = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

→ Kein Schnittpunkt, die Geraden sind zueinander windschief.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

k) $g = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $h = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \vec{S} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

l) $g = \begin{pmatrix} -14 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $h = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \vec{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 12.1: Lineare Gleichungssysteme (1)

a) $\begin{array}{l} 1 \cdot x - 1 \cdot y = 0 \\ 0 \cdot x + 2 \cdot y = 2 \end{array}$ $\rightarrow\ x = 1;\ y = 1$

b) $\begin{array}{rl} 2x + 3y = & -12 \\ -x - y = & 10 \end{array}$ $\rightarrow\ x = -18;\ y = 8$

c) $\begin{array}{rl} x + 2y = & 4 \\ -2x - 3y = & -8 \end{array}$ $\rightarrow\ x = 4;\ y = 0$

d) $\begin{array}{rl} 2x + 3y = & -7 \\ x + 2y = & 16 \end{array}$ $\rightarrow\ x = -62;\ y = 39$

e) $\begin{array}{rl} x + 2y + 3z = & 1 \\ 2x + 0y + 6z = & 8 \\ 3x - y + 4z = & 18 \end{array}$ $\rightarrow\ x = 0;\ y = -1; z = 1$

f) $\begin{array}{rl} 3x + 2y + 3z = & 2 \\ x - 3y - 2z = & -10 \\ -5x + 2y - z = & -2 \end{array}$ $\rightarrow\ x = -19;\ y = -29; z = 39$

g) $\begin{array}{rl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = & -7 \\ -x_1 + 0x_2 + 6x_3 - 2x_4 = & -20 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 0x_4 = & 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = & 2 \end{array}$ $\rightarrow\ x_1 = 2;\ x_2 = 0; x_3 = -3; x_4 = 0$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 12.2: Lineare Gleichungssysteme (2)

a) $\begin{array}{l} 1 \cdot x - 1 \cdot y = 0 \\ 0 \cdot x + 2 \cdot y = 2 \end{array}$ $\rightarrow\ x = 1;\ y = 1$

b) $\begin{array}{rl} 2x + 3y = & -12 \\ -x - y = & 10 \end{array}$ $\rightarrow\ x = -18;\ y = 8$

c) $\begin{array}{rl} x + 2y = & 4 \\ -2x - 3y = & -8 \end{array}$ $\rightarrow\ x = 4;\ y = 0$

d) $\begin{array}{rl} 2x + 3y = & -7 \\ x + 2y = & 16 \end{array}$ $\rightarrow\ x = -62;\ y = 39$

e) $\begin{array}{rl} x + 2y + 3z = & 1 \\ 2x + 0y + 6z = & 8 \\ 3x - y + 4z = & 18 \end{array}$ $\rightarrow\ x = 0;\ y = -1; z = 1$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

f) $\begin{array}{rcl} 3x+2y+3z &=& 2 \\ x-3y-2z &=& -10 \\ -5x+2y-z &=& -2 \end{array}$ $\rightarrow\ x=-19;\ y=-29; z=39$

g) $\begin{array}{rcl} x_1+2x_2+3x_3+4x_4 &=& -7 \\ -x_1+0x_2+6x_3-2x_4 &=& -20 \\ 3x_1+x_2+x_3-0x_4 &=& 0 \\ 4x_1+4x_2+2x_3-3x_4 &=& 2 \end{array}$ $\rightarrow\ x_1=2;\ x_2=0; x_3=-3; x_4=0$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 12.3: Lineare Gleichungssysteme (3)

a) $\begin{array}{rcl} 1\cdot x-1\cdot y &=& 0 \\ 0\cdot x+2\cdot y &=& 2 \end{array}$ $\rightarrow\ x=1;\ y=1$

b) $\begin{array}{rcl} 2x+3y &=& -12 \\ -x-y &=& 10 \end{array}$ $\rightarrow\ x=-18;\ y=8$

c) $\begin{array}{rcl} x+2y &=& 4 \\ -2x-3y &=& -8 \end{array}$ $\rightarrow\ x=4;\ y=0$

d) $\begin{array}{rcl} 2x+3y &=& -7 \\ x+2y &=& 16 \end{array}$ $\rightarrow\ x=-62;\ y=39$

e) $\begin{array}{rcl} x+2y+3z &=& 1 \\ 2x+0y+6z &=& 8 \\ 3x-y+4z &=& 18 \end{array}$ $\rightarrow\ x=0;\ y=-1; z=1$

f) $\begin{array}{rcl} 3x+2y+3z &=& 2 \\ x-3y-2z &=& -10 \\ -5x+2y-z &=& -2 \end{array}$ $\rightarrow\ x=-19;\ y=-29; z=39$

g) $\begin{array}{rcl} x_1+2x_2+3x_3+4x_4 &=& -7 \\ -x_1+0x_2+6x_3-2x_4 &=& -20 \\ 3x_1+x_2+x_3-0x_4 &=& 0 \\ 4x_1+4x_2+2x_3-3x_4 &=& 2 \end{array}$ $\rightarrow\ x_1=2;\ x_2=0; x_3=-3; x_4=0$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 12.4: Lineare Gleichungssysteme (4)

a) Die Differenz der Quadrate von zwei natürlichen Zahlen mit dem Unterschied 3 beträgt 381. Wie heißt die kleinere der beiden Zahlen? Die Zahlen: x bzw $x+3$ und ihre Quadrate: x^2 bzw $(x+3)^2$
Es gilt:
$(x+3)^2-x^2=381$
$x^2+6x+9-x^2=381$
$6x+9=381$
$6x=372$
$x=62$
Die kleinere Zahl ist 62.

Quelle: **https://sos-mathe.ch

b) Die Fahrzeuge A, B und C legen dieselbe Strecke zurück. B ist um 6 km/h schneller undbraucht 11 Minuten weniger als A. C ist um 4 km/h langsamer und braucht 9 Minuten mehr als A.
Berechnen Sie die Fahrzeit und die mittlere Geschwindigkeit von A.
Beachten Sie: die Geschwindigkeit wird in km/h gemessen, deshalb müssen Sie die Minuten in Stunden

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

verwandeln.

	Zusammenstellung		
	A	B	C
Geschwindigkeit v	x	$x+6$	$x-4$
Zeit t	y	$y-\frac{11}{60}$	$y+\frac{9}{60}$
Strecke $s=vt$	xy	$(x+6)(y-\frac{11}{60})$	$(x-4)(y+\frac{9}{60})$

Tabelle B.1.: Fahrdaten zur Übung

Nun sind aber alle drei Strecken gleich!

$$\left|\begin{array}{rcl}(x+6)(y-\frac{11}{60}) &=& xy\\ (x-4)(y+\frac{9}{60}) &=& xy\end{array}\right| \quad | \text{ Ausmultiplizieren}$$

$$\left|\begin{array}{rcl}xy-\frac{11}{60}x+6y-\frac{66}{60} &=& xy\\ xy+\frac{9}{60}x-4y-\frac{36}{60} &=& xy\end{array}\right| \quad | \text{ Zusammenfassen}$$

$$\Rightarrow\left|\begin{array}{rcl}-\frac{11}{60}x+6y &=& \frac{66}{60}\\ \frac{9}{60}x-4y &=& \frac{36}{60}\end{array}\right| \quad | \text{ 1. Zeile *2, 2. Zeile *3}$$

$$\Rightarrow\left|\begin{array}{rcl}-\frac{22}{60}x+12y &=& \frac{132}{60}\\ \frac{27}{60}x-12y &=& \frac{106}{60}\end{array}\right| \quad | \text{ Addiere 1.+2. Zeile}$$

$$\Rightarrow\left|\frac{5}{60}x = \frac{240}{60}\right|$$

$$\Rightarrow|5x = 240| \Rightarrow x=48 \longleftrightarrow \text{v in km/h}$$

damit: $\left|-\frac{22}{60}48+12y = \frac{132}{60}\right| \Rightarrow y=\frac{99}{60}$ Zeit in h

A fährt mit 48 km/h und ist 1 h 39 min unterwegs.

Quelle: **https://sos-mathe.ch

c) Löse

$$\left|\begin{array}{rrrrcl}w & +x & -y & +z & = & 16\\ 3w & -2x & +9y & -z & = & 11\\ 4w & -3x & +6y & +2z & = & 13\\ 6w & -4x & +2y & +3z & = & 10\end{array}\right|$$

| z eliminieren (kleinste Zahlen, am wenigsten Multiplikationen nötig)

$$\Rightarrow\left|\begin{array}{rrrcl}4w & -x & +8y & = & 27\\ 10w & -7x & +24y & = & 35\\ 15w & -10x & +29y & = & 43\end{array}\right|$$

|x eliminieren (weil es in einer Gleichung nur 1 mal vorkommt):

$$\Rightarrow\left|\begin{array}{rrcl}-18w & -32y & = & -154\\ -25w & -51y & = & -227\end{array}\right| \quad |\text{kürzen:}$$

$$\Rightarrow\left|\begin{array}{rrcl}9w & +16y & = & 77\\ -25w & -51y & = & -227\end{array}\right| \quad |\text{w eliminieren :}$$

$\Rightarrow -59y=-118 \Rightarrow y=2$

Rückwärts einsetzen $w=5 \quad x=9 \quad z=4$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Quelle: **https://sos-mathe.ch
Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 12.5: Einfache Aufgaben mit Gaußschem Eliminationsverfahren v1

a) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 4 \\ 2x - y + 3z &= 9 \\ x + y + z &= 6 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 = Z_3 - Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 = Z_1 \cdot (-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -4 & -2 & -8 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2 = Z_2 + Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -4 & -2 & -8 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2 \leftrightarrow Z_3]{Z_1 = Z_1 \div (-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2 = Z_2 \cdot (-5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & -10 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 = Z_3 + Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array}\right)$$

Das gaußsche Eliminationsverfahren endet mit einer oberen Dreiecksmatrix.
Wir können sofort ablesen: $z = -9$; die zweite Zeile ergibt $y = -2$.
Eingesetzt in die erste Zeile (Gleichung) erhält man $x = 17$ und mithin die Lösung:

$$\boxed{x = 17, y = -2, z = -9}$$

b) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 3 \\ x - y + 2z &= 4 \\ 3x + y + z &= 5 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \leftrightarrow Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_3 = Z_3 - 3Z_1]{Z_2 = Z_2 - 2Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & -5 \\ 0 & 4 & -5 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 = Z_3 - 4/3 Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & -1/3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 = 3/5 Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 \end{array}\right)$$

Aus der letzten Zeile folgt sofort $z = -1/5$.
Eingesetzt in die zweite Zeile $3y - 5z = -5 \Rightarrow 3y + 1 = -5 \Rightarrow y = -2$.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Schließlich aus der ersten Zeile $x-(-2)+2\cdot(-1/5)=4 \Rightarrow x+8/5=4 \Rightarrow x=12/5$.

$$\boxed{x=12/5, \quad y=-2, \quad z=-1/5}$$

c) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 3x+y+2z&=5\\ 2x-2y+z&=-3\\ x+3y-z&=2 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 5\\ 2 & -2 & 1 & -3\\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1\leftrightarrow Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 1 & -3\\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{;;Z_2=Z_2-2Z_1 \;\; Z_3=Z_3-3Z_1;;} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2\\ 0 & -8 & 3 & -7\\ 0 & -8 & 5 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3=Z_3-Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2\\ 0 & -8 & 3 & -7\\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3=1/2Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2\\ 0 & -8 & 3 & -7\\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Aus der letzten Zeile folgt $z=3$.
In Zeile 2: $-8y+3\cdot 3=-7 \Rightarrow -8y+9=-7 \Rightarrow y=2$.
Zeile 1: $x+3\cdot 2-3=2 \Rightarrow x+3=2 \Rightarrow x=-1$.

$$\boxed{x=-1, y=2, z=3}$$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 12.6: Aufgaben zur Lösung von Gleichungssystemen mit Gaußschen Eliminationsverfahren v1

a) Gegeben sei das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5+6x_6+7x_7+8x_8+9x_9+10x_{10}&=55\\
2x_1+3x_2+4x_3+5x_4+6x_5+7x_6+8x_7+9x_8+10x_9+x_{10}&=55\\
3x_1+4x_2+5x_3+6x_4+7x_5+8x_6+9x_7+10x_8+x_9+2x_{10}&=55\\
4x_1+5x_2+6x_3+7x_4+8x_5+9x_6+10x_7+x_8+2x_9+3x_{10}&=55\\
5x_1+6x_2+7x_3+8x_4+9x_5+10x_6+x_7+2x_8+3x_9+4x_{10}&=55\\
6x_1+7x_2+8x_3+9x_4+10x_5+x_6+2x_7+3x_8+4x_9+5x_{10}&=55\\
7x_1+8x_2+9x_3+10x_4+x_5+2x_6+3x_7+4x_8+5x_9+6x_{10}&=55\\
8x_1+9x_2+10x_3+x_4+2x_5+3x_6+4x_7+5x_8+6x_9+7x_{10}&=55\\
9x_1+10x_2+x_3+2x_4+3x_5+4x_6+5x_7+6x_8+7x_9+8x_{10}&=55\\
10x_1+x_2+2x_3+3x_4+4x_5+5x_6+6x_7+7x_8+8x_9+9x_{10}&=55
\end{aligned}$$

Zunächst schreiben wir das Gleichungssystem in Matrixform:

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 10 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 55 \\ 55 \\ 55 \\ 55 \\ 55 \\ 55 \\ 55 \\ 55 \\ 55 \\ 55 \end{pmatrix}$$

Wir wenden das Gaußsche Eliminationsverfahren an, um die Matrix $\mathbf{A}$ in eine obere Dreiecksform zu bringen, und lösen dann das resultierende Gleichungssystem durch Rückwärtseinsetzen.

Nach Anwendung des Gaußschen Eliminationsverfahrens:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & -7 & -8 & -19 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}' = \begin{pmatrix} 55 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Durch Rückwärtseinsetzen erhalten wir:

$$x_{10} = \frac{55}{-1} = -55$$

$$x_9 = 0, \quad x_8 = 0, \quad x_7 = 0, \quad x_6 = 0, \quad x_5 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 55$$

$$\text{Lösung: } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 55 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -55 \end{pmatrix}$$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

b) Gegeben sei das folgende Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 + 6x_6 + x_7 + 8x_8 + 9x_9 + 10x_{10} &= 70 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 4x_7 + 4x_8 + 5x_9 + 5x_{10} &= 35 \\
4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 + 6x_6 + 4x_7 + 7x_8 + 5x_9 + 8x_{10} &= 84 \\
3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 2x_5 + 5x_6 + 3x_7 + 4x_8 + 5x_9 + 7x_{10} &= 72 \\
5x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 6x_5 + 4x_6 + 5x_7 + 3x_8 + 2x_9 + 1x_{10} &= 80 \\
6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 6x_6 + 4x_7 + 5x_8 + 2x_9 + 3x_{10} &= 90 \\
7x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 3x_6 + 6x_7 + 4x_8 + 5x_9 + 2x_{10} &= 100 \\
8x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4x_5 + 2x_6 + 3x_7 + 6x_8 + 4x_9 + 5x_{10} &= 110 \\
9x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 5x_5 + 4x_6 + 2x_7 + 3x_8 + 6x_9 + 4x_{10} &= 120 \\
10x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 7x_4 + 6x_5 + 5x_6 + 4x_7 + 2x_8 + 3x_9 + 6x_{10} &= 130
\end{aligned}
$$

Zunächst schreiben wir das Gleichungssystem in Matrixform:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix}
2 & 3 & 1 & 4 & 1 & 6 & 1 & 8 & 9 & 10 \\
1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 \\
4 & 3 & 2 & 5 & 3 & 6 & 4 & 7 & 5 & 8 \\
3 & 2 & 3 & 6 & 2 & 5 & 3 & 4 & 5 & 7 \\
5 & 4 & 2 & 3 & 6 & 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \\
6 & 5 & 4 & 2 & 3 & 6 & 4 & 5 & 2 & 3 \\
7 & 6 & 5 & 4 & 2 & 3 & 6 & 4 & 5 & 2 \\
8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 2 & 3 & 6 & 4 & 5 \\
9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 2 & 3 & 6 & 4 \\
10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 2 & 3 & 6
\end{pmatrix}, \quad
\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{pmatrix}, \quad
\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 70 \\ 35 \\ 84 \\ 72 \\ 80 \\ 90 \\ 100 \\ 110 \\ 120 \\ 130 \end{pmatrix}
$$

Wir wenden das Gaußsche Eliminationsverfahren an, um die Matrix $\mathbf{A}$ in eine obere Dreiecksform zu bringen, und lösen dann das resultierende Gleichungssystem durch Rückwärtseinsetzen.

Nach Anwendung des Gaußschen Eliminationsverfahrens:

$$
\mathbf{A}' = \begin{pmatrix}
2 & 3 & 1 & 4 & 1 & 6 & 1 & 8 & 9 & 10 \\
0 & -1 & 1.5 & -1 & 2.5 & -0.5 & 3.5 & 0 & 0.5 & -20 \\
0 & 0 & 2.5 & 2.5 & 2.5 & 4.5 & 2.5 & 6.5 & -2.5 & -17.5 \\
0 & 0 & 0 & 3.2 & -0.6 & 1.4 & -0.4 & -2.6 & 4.4 & -14.2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 4.4 & 0.4 & 4.4 & -1.6 & -2.4 & -12.8 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.45 & 0.35 & 4.75 & -6.25 & -13.25 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.52 & 0.52 & 3.52 & -11.52 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.85 & -1.55 & -10.85 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.35 & -9.35 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6
\end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{b}' = \begin{pmatrix} 70 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}
$$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Durch Rückwärtseinsetzen erhalten wir:

$$x_{10} = \frac{6}{6} = 1$$

$$x_9 = 0, \quad x_8 = 0, \quad x_7 = 0, \quad x_6 = 0, \quad x_5 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 70$$

$$\text{Lösung: } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 70 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 12.7: Einfache Aufgaben zur Lösung von Gleichungssystemen mit Jordan-Form v1

a) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 4 \\ 2x - y + 3z &= 9 \\ x + y + z &= 6 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 = Z_3 - Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 = Z_1 \cdot (-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -4 & -2 & -8 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2 = Z_2 + Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -4 & -2 & -8 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2 \leftrightarrow Z_3]{Z_1 = Z_1 \div (-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2 = Z_2 \cdot (-5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & -10 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 = Z_3 + Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_2 = Z_2 \div (5)]{Z_1 = Z_1 - Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 = Z_1 - 2 \cdot Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array}\right)$$

$$\boxed{x = 17, y = -2, z = -9}$$

b) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 3 \\ x - y + 2z &= 4 \\ 3x + y + z &= 5 \end{aligned}$$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \leftrightarrow Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_3 = Z_3 - 3Z_1]{Z_2 = Z_2 - 2Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & -5 \\ 0 & 4 & -5 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 = Z_3 - 4/3 Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & -1/3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 = 3/5 Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2 = Z_2 + 5 \cdot Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_1 = Z_1 + Z_2]{Z_2 = Z_2 \div 3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 = Z_1 - 2 \cdot Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 12/5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 \end{array}\right)$$

$$\boxed{x = 12/5, \quad y = -2, \quad z = -1/5}$$

c) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 3x + y + 2z &= 5 \\ 2x - 2y + z &= -3 \\ x + 3y - z &= 2 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \leftrightarrow Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_3 = Z_3 - 3Z_1]{Z_2 = Z_2 - 2Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 3 & -7 \\ 0 & -8 & 5 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 = Z_3 - Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 = 1/2 \cdot Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2 = Z_2 + 3 \cdot Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_1 = Z_1 + Z_3]{Z_2 = Z_2 \div (-8)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 = Z_1 - 3 \cdot Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\boxed{x = -1, y = 2, z = 3}$$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 12.8: Löse mit Gauß-Jordan [OpenAI2024d]

a) Löse das folgende Gleichungssystem mit der Gauß-Jordan-Methode:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix}$$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Der erweiterte Koeffizientenmatrix ist: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 10 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 20 \\ 3 & 6 & 0 & 4 & 15 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 5 \end{array}\right)$

1. Subtrahiere das 2-fache der ersten Zeile von der zweiten Zeile, das 3-fache der ersten Zeile von der dritten Zeile und die erste Zeile von der vierten Zeile: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -15 \\ 0 & -3 & 3 & -6 & -5 \end{array}\right)$
2. Subtrahiere die zweite Zeile von der dritten Zeile: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -15 \\ 0 & -3 & 3 & -6 & -5 \end{array}\right)$
3. Dividiere die vierte Zeile durch -4 und addiere das 3-fache der vierten Zeile zur dritten Zeile: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{15}{4} \\ 0 & -3 & 3 & -6 & -5 \end{array}\right)$
4. Das resultierende System ergibt: $x_4 = \frac{15}{4}, \quad x_3 = -5 + \frac{15}{4}, \quad x_2 = -3, \quad x_1 = \frac{35}{4}$ Die Lösung ist $x_1 = \frac{35}{4}, x_2 = -3, x_3 = \frac{-5}{4}, x_4 = \frac{15}{4}$.

b) Löse das folgende Gleichungssystem mit der Gauß-Jordan-Methode:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & -1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & 3 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 0 & 1 & -5 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 2 & -1 & 3 & 0 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -4 & 3 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -5 & 6 & -7 & 8 \\ -5 & 6 & -7 & 8 & 9 & -10 & 11 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -25 \\ 35 \\ 45 \\ -55 \\ 65 \\ 75 \\ 85 \end{pmatrix}$$

Der erweiterte Koeffizientenmatrix ist: $\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & -1 & 4 & -5 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 & 0 & -2 & 1 & -25 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & 3 & -4 & 0 & 35 \\ 4 & -2 & 3 & 0 & 1 & -5 & 0 & 2 & 45 \\ -3 & 4 & 2 & -1 & 3 & 0 & -2 & -4 & -55 \\ 2 & -1 & -4 & 3 & 5 & -2 & 1 & 0 & 65 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -5 & 6 & -7 & 8 & 75 \\ -5 & 6 & -7 & 8 & 9 & -10 & 11 & -12 & 85 \end{array}\right)$

1. Führe elementare Zeilenoperationen durch, um die Matrix in Zeilenstufenform zu bringen.
2. Setze dann die Rücksubstitution ein, um die Werte für $x_1, x_2, \ldots, x_8$ zu finden.

Die Lösung ist $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 4, x_4 = 3, x_5 = 6, x_6 = -2, x_7 = 0, x_8 = 8$.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 12.9: Aufgaben zur Lösung von Gleichungssystemen mit Jordan-Form

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

a) Lösen Sie das Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mittels der Jordan-Form, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zunächst bestimmen wir die Jordan-Form von A. Die Matrix A hat das Eigenwert $\lambda = 2$ mit algebraischer Vielfachheit 6. Die Jordan-Form ist:

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Da A bereits in Jordan-Form vorliegt, müssen wir das Gleichungssystem $J\mathbf{y} = \mathbf{b}$ lösen. Hier ist $\mathbf{b} = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$.
Wir beginnen mit der Rückwärtssubstitution:

$$\begin{aligned} y_6 &= \frac{b_6}{2} = 0, \\ y_5 &= \frac{b_5 - y_6}{2} = 0, \\ y_4 &= \frac{b_4 - y_5}{2} = 0, \\ y_3 &= \frac{b_3 - y_4}{2} = 0, \\ y_2 &= \frac{b_2 - y_3}{2} = 0, \\ y_1 &= \frac{b_1 - y_2}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Also ist die Lösung:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Lösen Sie das Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mittels der Jordan-Form, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Die Matrix A hat das Eigenwert $\lambda = 1$ mit algebraischer Vielfachheit 6. Die Jordan-Form ist:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da A bereits in Jordan-Form vorliegt, müssen wir das Gleichungssystem $J\mathbf{y} = \mathbf{b}$ lösen. Hier ist $\mathbf{b} = (1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$.
Wir beginnen mit der Rückwärtssubstitution:

$$\begin{aligned} y_6 &= b_6 = 1, \\ y_5 &= b_5 - y_6 = 1 - 1 = 0, \\ y_4 &= b_4 - y_5 = 1 - 0 = 1, \\ y_3 &= b_3 - y_4 = 1 - 1 = 0, \\ y_2 &= b_2 - y_3 = 1 - 0 = 1, \\ y_1 &= b_1 - y_2 = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Also ist die Lösung:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 13.1: Explizites Bildungsgesetz von Folgen

a) $1, 2, 3, 4, \cdots = 5;\ a_i = i$

b) $2, 4, 6, 8, \cdots = 10;\ a_i = 2 \cdot i$

c) $1, 4, 9, 16, \cdots = 25;\ a_i = i^2$

d) $1, 3, 6, 10, \cdots = 15; a_i = \dfrac{i \cdot (i+1)}{2}$

e) $2, 3, 5, 7, 11, \cdots = 13;$ Primzahlen

f) $1, -1, 1, -1, \cdots = 1; a_i = (-1)^{i+1}$

g) $2, 4, 8, 16, \cdots = 32;\ a_i = 2^i$

h) $1, 2, 4, 7, 11, \cdots = 16;\ a_i = \dfrac{i \cdot (i-1)}{2} + 1$

i) $0, 1, 4, 9, 16, \cdots = 25;\ a_i = (i-1)^2$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 13.2: Rekursives Bildungsgesetz von Folgen

a) $1, 2, 3, 4, \cdots = 5;\ a_1 = 1,\ a_i = a_{i-1} + 1$ für $i \geq 2$

b) $2, 4, 6, 8, \cdots = 10;\ a_1 = 2,\ a_i = a_{i-1} + 2$ für $i \geq 2$

c) $1, 4, 9, 16, \cdots = 25;\ a_1 = 1,\ a_i = a_{i-1} + (2i - 1)$ für $i \geq 2$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

d) $1, 3, 6, 10, \cdots = 15$; $a_1 = 1$, $a_i = a_{i-1} + i$ für $i \geq 2$

e) $2, 3, 5, 7, 11, \cdots = 13$; $a_1 = 2$, $a_{i+1} =$ kleinste Primzahl $> a_i$ für $i \geq 1$

f) $1, 1, 2, 3, 5, \cdots = 8$; $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_i = a_{i-1} + a_{i-2}$ für $i \geq 3$

g) $1, -1, 1, -1, \cdots = 1$; $a_1 = 1$, $a_i = -a_{i-1}$ für $i \geq 2$

h) $2, 4, 8, 16, \cdots = 32$; $a_1 = 2$, $a_i = 2 \cdot a_{i-1}$ für $i \geq 2$

i) $1, 2, 4, 7, 11, \cdots = 16$; $a_1 = 1$, $a_i = a_{i-1} + (i-1)$ für $i \geq 2$

j) $0, 1, 4, 9, 16, \cdots = 25$; $a_1 = 0$, $a_i = (i-1)^2$ für $i \geq 2$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 13.3: Folgen

a) Wildschweine haben für Säugetiere eine sehr hohe Vermehrungsrate von mindestens 600 % bezogen auf die weiblichen Stücke der Ausgangspopulation. Dies berücksichtigt bereits die Entnahme durch Krankheiten, Wildunfälle und Jagd.

Gehen wir vereinfachend davon aus, dass nur weibliche Stücke gefrischt (geboren) werden.

Wenn wir eine Rotte mit 10 Bachen haben, wie viele Tiere (Bachen, Keiler, Überläufer) haben wir nach 1, 3, 5, 7 Jahren, wenn einmal im Jahr gerauscht (fortgepflanzt) wird, also nur eine Generation pro Jahr? Zunächst ist die Formel für die Folge aufzustellen. Da Wildscheine bis zu 21 Jahre (auch in freier Wildbahn werden über 15 Jahre angenommen) alt werden, sind die Stücke der Generation X in der Generation $X + 1$ noch vorhanden und werden frischen.

$$X_n = X_{n-1} \cdot (1 + 600\,\%) = X_{n-1} \cdot 7$$

Nach 1 Jahr ($n = 1$) sind bei $X_{n-1} = X_0 = 10$ somit $X_1 = X_0 \cdot 7 = 70$ Stück vorhanden. Es ergibt sich somit:

$$X_n = X_0 \cdot 7^n$$

somit:

$$X_3 = 3.430 \qquad X_5 = 168.070 \qquad X_7 = 8.235.430$$

b) Durch Verlust der Leitbache und/oder sog. Mastjahre (verstärkt durch den intensiven Anbau von Biogasmais) rauscht es bis zu 3 Mal im Jahr. Auch Überläuferbachen („Teenager“) können beschlagen werden und frischen.

Was ändert sich nun? Wie viele Tiere sind es nach 1, 3, 5, 7 Jahren? Die Formel aus der vorherigen Aufgabe bleibt, bezieht sich jedoch auf die Generationen. War n bisher das Jahr, so führen wir ein $j = 3 * n$, mit j für das Jahr mit je 3 Generationen, n.

$$X_j = X_{j-1} \cdot (1 + 600\%)^3 = X_{j-1} \cdot 7^3$$

Nach 1 Jahr ($j = 1$) sind bei $X_{j-1} = X_0 = 10$ somit $X_1 = X_0 \cdot 7^3 = 3430$ Stück vorhanden. Es ergibt sich somit:

$$X_j = X_0 \cdot 7^{j \cdot 3}$$

somit:

$$X_3 = 403.536.070 \qquad X_5 = 4,74756E + 13 \qquad X_7 = 5,58546E + 18$$

Nun verstehen Sie vielleicht, warum der Einsatz von Nachtsichtgeräten für die Jagd auf Wildscheine von der Politik, nicht von den Jägern, gefordert wurde.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 13.4: Beschränktheit, Monotonie, Häufungspunkte, Konvergenz

a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\cdot n} \to$

Quelle: http://www.mathods.com/mathe.php?con=Analysis&can=Folgen&cun=Beschr%E4nktheit; Abruf 2024-09-01.

b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1)^n \cdot \frac{3\cdot n^2+5}{2\cdot n^2} \to$

Quelle: http://www.mathods.com/mathe.php?con=Analysis&can=Folgen&cun=Beschr%E4nktheit; Abruf 2024-09-01.

c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1)^n \cdot \frac{5\cdot n^2}{n^2+7\cdot n+8} \to$

Quelle: http://www.mathods.com/mathe.php?con=Analysis&can=Folgen&cun=Beschr%E4nktheit; Abruf 2024-09-01.

d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{6\cdot n^2+13\cdot n}{5\cdot n^3+7} \to$

Quelle: http://www.mathods.com/mathe.php?con=Analysis&can=Folgen&cun=Beschr%E4nktheit; Abruf 2024-09-01.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 13.5: Reihen

a) Entwickeln Sie die Zahl 81.000 in eine Summendarstellung im Dezimalsystem.

$81.000 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot 10^i$ mit

alle $a_i = 0$ außer $a_4 = 1, a_5 = 8$

b) Entwickeln Sie die Zahl 32 in eine Summendarstellung im Binärsystem.

$32 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot 2^i$ mit

alle $a_i = 0$ außer $a_5 = 1 \longleftrightarrow 100000_b$. Beachten Sie bitte, dass n bei 0 beginnt.

c) Entwickeln Sie die Zahl 365 in eine Summendarstellung im Zweiersystem/Binärsystem.

$365 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot 2^i$ mit

alle $a_i = 0$ außer

a_0	1
a_1	0
a_2	1
a_3	1
a_4	0 bzw. 101101101_b
a_5	1
a_6	1
a_7	0
a_8	1

d) Eine sehr wichtige Reihenentwicklung ist die Fourier-Entwicklung oder Fourier-Transformation. Mit ihr wird eine Funktion des Zeitbereichs $f(t)$ in eine Funktion des Frequenzbereichs $f_f(f)$ transformiert. Überlegen Sie, welche Frequenzen würden Sie mit welcher Amplitude erwarten für folgendes Pulssignal:



Abbildung B.4.: hoher Puls, 2-Kanal-Aufnahme, 2 s Dauer, gespreizte Darstellung

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Die rechenintensive Transformation wird heute in der Regel von Programmen erledigt. Das Programm Audacity errechnet folgende Frequenzverteilung:

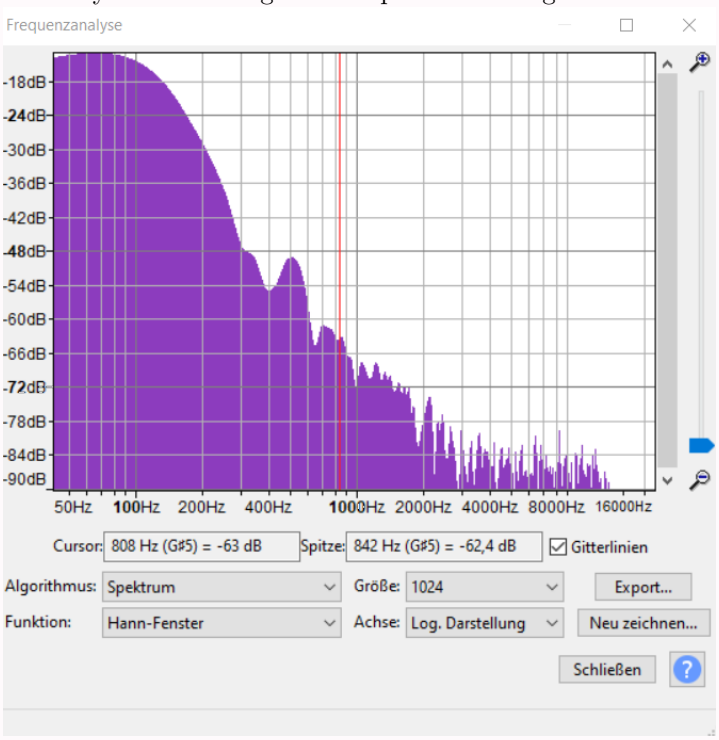


Abbildung B.5.: Frequenzbereich, Symmetriebetrachtungen werden Ihnen später im Studium weitere Informationen liefern.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 14.1: Potenzen und Wurzeln v1

a) $f(x) = x^{7/3} \longrightarrow$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

$\mathbb{D} = (x \in \mathbb{R})$; siehe Abb. B.6.

Die Umkehrfunktion ergibt sich zu $g(x) = x^{3/7}$ mit $\mathbb{D}_g = \mathbb{W}_f$.

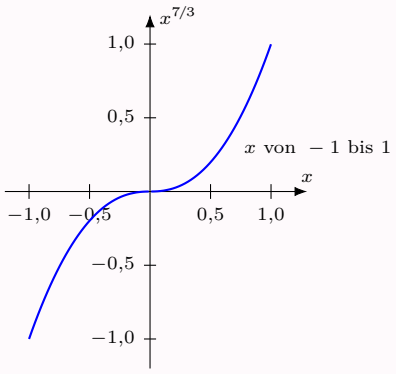


Abbildung B.6.: Plot der Funktion $f(x) = x^{7/3}$ auf $\mathbb{R}$

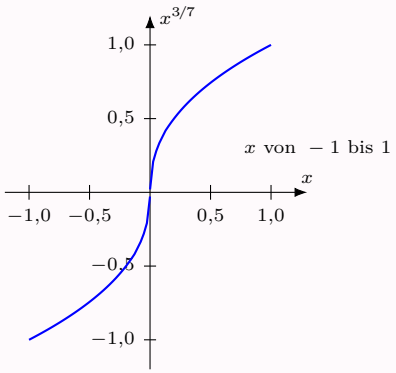


Abbildung B.7.: Plot der Umkehrfunktion $g(x)$

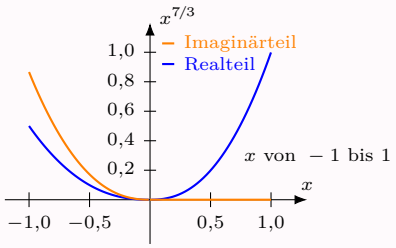


Abbildung B.8.: Plot der Funktion $f(x) = x^{7/3}$ mit komplexen Anteilen

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

b) $f(x) = 7x^7 + 14x^5 \longrightarrow$

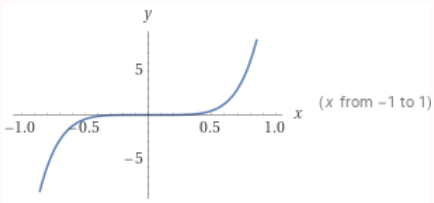


Abbildung B.9.: Plot der Funktion $f(x) = 7x^7 + 14x^5$

$\mathbb{D} = (x \in \mathbb{R})$. Die Umformung zu $f(x) = 7x^5(x^2+2)$ zeigt die fünffache Trivialnullstelle $x = 0$.

x^2+2 hat nur 2 Nullstellen in $\mathbb{C}$, was wir nicht weiter betrachten.

Sofort erkennbar sind die Punktsymmetrie zum Nullpunkt sowie der Wertebereich $\mathbb{W} =]-\infty, +\infty[$.

Die erste Ableitung ist $f'(x) = 7x^4(10 + 7x^2)$, die zweite Ableitung $f''(x) = 14x^3(20 + 21x^2)$.

Die erste Ableitung hat eine vierfache Nullstelle bei $x = 0$, die anderen sind in $\mathbb{C}$, was wir nicht weiter betrachten. Da $f''(x = 0) = 0$ handelt es sich um einen Sattelpunkt, was bereits durch die Symmetrie klar war.

Es liegt strenge Monotonie vor. D. h., es existiert eine Umkehrfunktion (Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden), auch wenn sich diese nicht geschlossen herleiten lässt.

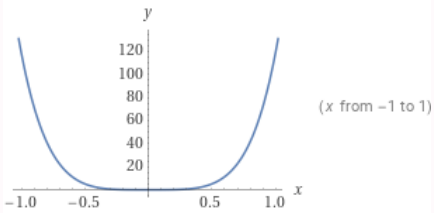


Abbildung B.10.: Plot der 1. Ableitung $f'(x) = 7x^4(10 + 7x^2)$

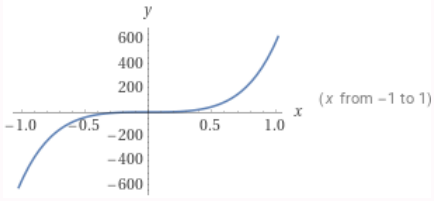


Abbildung B.11.: Plot der 2. Ableitung $f''(x) = 14x^3(20 + 21x^2)$

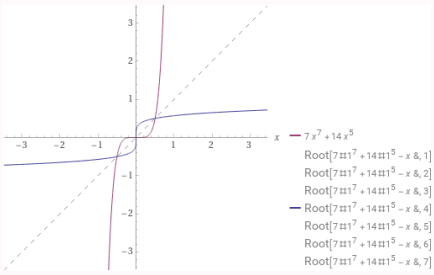


Abbildung B.12.: Plot der Umkehrfunktion zu $f(x) = 7x^7 + 14x^5$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

c) $f(x) = x^x \longrightarrow$

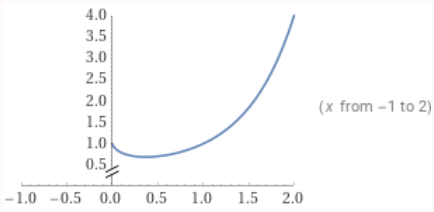


Abbildung B.13.: Plot der Funktion $f(x) = x^x$ auf $\mathbb{R}$

$\mathbb{D} = (x \in \mathbb{R} : x > 0)$.

Erkennbar ist, dass sich gleiche Funktionswerte f durch verschiedene x ergeben; eine Spiegelung an der Winkelhalbierenden bestätigt dies. Somit wäre eine Umkehrfunktion nur abschnittsweise definiert.

Analog zu $f(x) = x^{7/3}$ ergeben sich imaginäre Anteile für $x \leq 0$ (B.13).

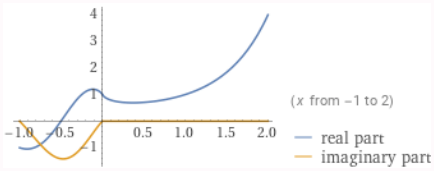


Abbildung B.14.: Plot der Funktion $f(x) = x^x$ mit imaginären Anteilen

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 14.2: Polynome

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4x \longrightarrow$

$f(x)$ ist ein Polynom 3. Grades und ist definiert für $x \in \mathbb{R}$.

Da ungerade und gerade Polynomgrade vorhanden sind, gibt es keine Symmetrien zu einer der typischen Achsen.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Ein Polynom 3. Grades hat auf $\mathbb{R}$ bis zu 3 Nullstellen. Sofort erkennbar ist, dass 0 eine einfache Nullstelle n_1 ist. Mit Polynomdivision (oder durch Ausklammern) ergbit sich

$$\frac{f(x)}{(x-0)} = x^2 - 6x + 4$$

Hieraus ergeben sich per Mitternachtsformel die Nullstellen

$n_2 = 3 - \sqrt{(5)}$ und $n_3 = 3 + \sqrt{(5)}$.

Alle 3 Nullstellen sind in $\mathbb{R}$ definiert, es gibt keine transzendenten Lösungen im $\mathbb{C}$.

Es gibt keine Asymtoten, der Wertebereich $\mathbb{W} =]-\infty, +\infty[$ hat keine globalen Extrema.

Als Polynom 3. Grades hat $f(x)$ eine Ableitung $f'(x)$, die ein Polynom 2. Grades ist: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 4$. Deren Nullstellen sind Sattelpunkte oder lokale Extrema. Durch die Mitternachtsformel ergeben sich die Nullstellen

$$n_1' = 2 - 2\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ und } n_2' = 2 + 2\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Für die Entscheidung Sattelpunkt oder Extremwert können Sie entweder den Vorzeichenwechsel von $f'(x)$ an den Nullstellen heranziehen oder die 2. Ableitung an den Nullstellen der 1. Ableitung nehmen, wobei nur das Vorzeichen relevant ist: $f''(x) = 6x - 12$ somit $f''(n_1') < 0$, $f''(n_2') > 0$ somit bei n_1' lokales Maximum, n_2' lokales Minimum.

Skizzieren Sie mit o. g. Informationen den Graphen B.15, in dem Sie die Nullstellen markieren, die Extrema berechnen, also $f(n_1'), f(n_2')$ und ein paar offensichtliche Stützpunkte.

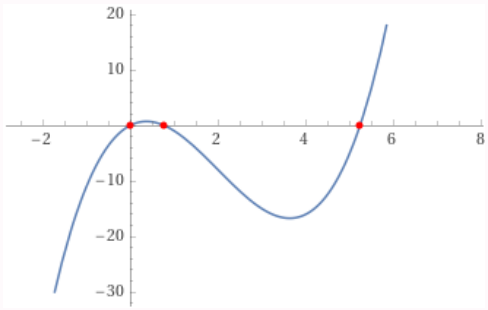


Abbildung B.15.: Plot der Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4x$

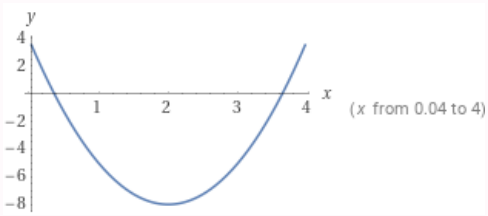


Abbildung B.16.: Plot der 1. Ableitung $f'(x) = 3x^2 - 12x + 4$

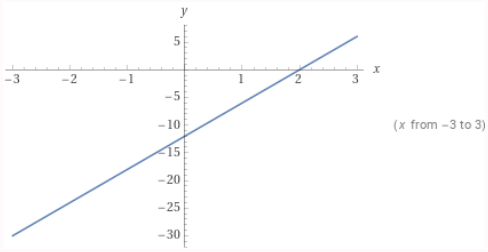


Abbildung B.17.: Plot der 2. Ableitung $f''(x) = 6x - 12$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

b) $f(x) = x^4 - 50x^2 + 625 \longrightarrow$

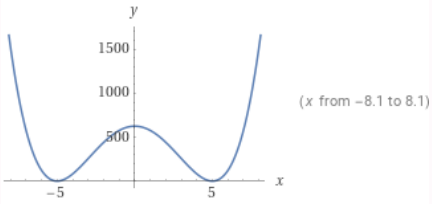


Abbildung B.18.: Plot der Funktion $f(x) = x^4 - 50x^2 + 625$

$\mathbb{D} = (x \in \mathbb{R})$.

Es bietet sich die Substitutionsmethode mit $u = x^2$ an:

$f_s(u) = u^2 - 50u + 625$ ergibt zwei Nullstellen bei $u = 25$ per Mitternachtsformel.

Somit ergeben sich für $x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$ vier Nullstellen in $\mathbb{R}$, je eine doppelte in $x = \pm 5$.

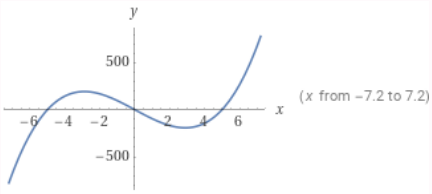


Abbildung B.19.: Plot der 1. Ableitung $f'(x) = 4x(-25 + x^2)$

1. Ableitung ist $f'(x) = 4x(-25 + x^2)$ mit Nullstellen $x \in -5, 0, 5$.

2. Ableitung ist $f''(x) = 4(-25 + 3x^2)$.

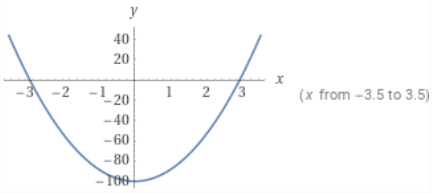


Abbildung B.20.: Plot der 2. Ableitung $f''(x) = 4(-25 + 3x^2)$

Somit sind die Werte bei -5 und 5 lokale Minima, bei 0 ein lokales Maximum.

Somit erkennt man, dass $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

c) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1 \longrightarrow$

$f(x)$ ist ein Polynom 5. Grades und ist definiert für $x \in \mathbb{R}$.
Da ungerade und gerade Polynomgrade vorhanden sind, gibt es keine Symmetrien zu einer der typischen Achsen.
Ein Polynom 5. Grades hat auf $\mathbb{R}$ bis zu 5 Nullstellen. Aber wie aufdröseln?
Hier hilft die Methode *Anstarren*. Die Koeffizienten sind die Binomialkoeffizienten einer 5. Potenz. Entsprechend ergibt sich bei näherer Betrachtung

$$f(x) = (x-1)^5$$

Somit punktsymmetrisch zu 1.Die Nullstellen sind trivial, 5-fach bei 1. Die Ableitungen sind:

$$f'(x) = 5(x-1)^4$$

und

$$f''(x) = 20(x-1)^3$$

Es gibt keine Asymptoten, der Wertebereich $\mathbb{W} =]-\infty, +\infty[$ hat keine globalen Extrema.Lokale Extrema ergeben sich aus der Ableitung. Deren Nullstellen sind Sattelpunkte oder lokale Extrema. Man erkennt sofort Nullstellen der Ableitung bei 1 (4-fach). Da die 2. Ableitung hier den Wert $f''(1) = 0$ ergibt, handelt es sich um einen Sattelpunkt. Die Funktion hat keine Extrema, weder lokal noch global.

Skizzieren Sie mit o.g. Informationen den Graphen B.21 in dem Sie die Nullstelle als Sattelpunkt markieren, und ein paar offensichtliche Stützpunkte.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

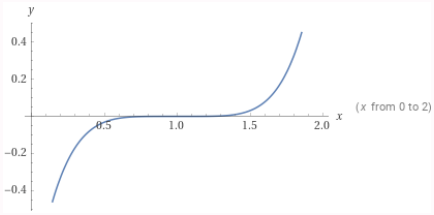


Abbildung B.21.: Plot der Funktion $f(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$

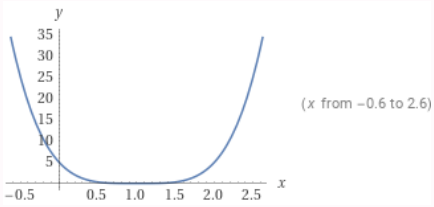


Abbildung B.22.: Plot der 1. Ableitung $f'(x) = 5(x-1)^4$

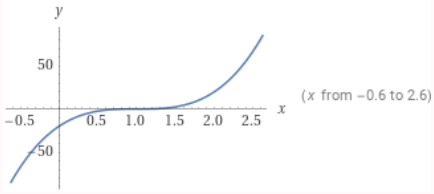


Abbildung B.23.: Plot der 2. Ableitung $f''(x) = 20(x-1)^3$

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 14.3: Polynome II

a) $f(x) = 64x^3 - 1344x + 1280 \longrightarrow$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Mit etwas Übung erkennt man, dass alle Koeffizienten durch 64 teilbar sind. Somit ergibt sich:
$f(x) = 64(x^3 - 21x + 20)$
Eine Nullstelle ergibt sich schnell mit $n_1 = 1$; Polynomdivision durch $(x-1)$ und 64 ergibt:
$f_2(x) = x^2 + x - 20$ mit Mitternachtsformel ergeben sich die Nullstellen $n_2 = 4$, $n_3 = -5$. Die Funktion ist somit auch darstellbar als $f(x) = 22^6(x-1)(x-4)(x+5)$. Symmetrien und Asymptoten sind nicht vorhanden.
Die 1. Ableitung ist
$f'(x) = 192(x^2+7)$ mit Nullstellen $n_1' = -\sqrt{7}$, $n_2' = \sqrt{7}$.
Die 2. Ableitung ergibt sich zu $f''(x) = 384x$. Somot ist bei $n_1' = -\sqrt{7}$ ein lokales Maximum, bei $n_2' = \sqrt{7}$ ein lokales Minimum.

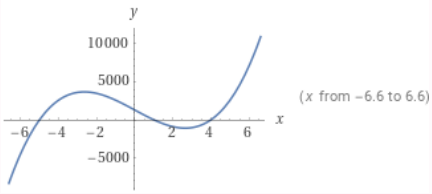


Abbildung B.24.: Plot der Funktion $f(x) = 64x^3 - 1344x + 1280$

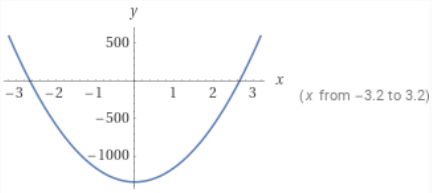


Abbildung B.25.: Plot der 1. Ableitung $f'(x) = 192(x^2 + 7)$

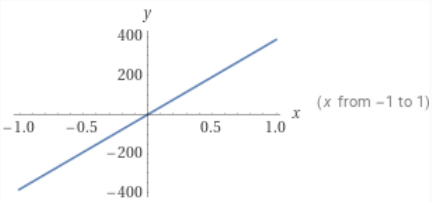


Abbildung B.26.: Plot der 2. Ableitung $f''(x) = 384x$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

b) $f(x) = x^7 + 9x^6 - 94x^5 - 724x^4 + 3432x^3 + 14272x^2 - 53760x + 36864 \longrightarrow$

$f(x)$ ist ein Polynom 7. Grades und ist definiert für $x \in \mathbb{R}$.
Da ungerade und gerade Polynomgrade vorhanden sind, gibt es keine Symmetrien zu einer der typischen Achsen.
Ein Polynom 7. Grades hat auf $\mathbb{R}$ bis zu 7 Nullstellen. Aber wie aufdröseln?
Tatsächlich probiert man auch in der Mathematik durchaus aus, ob man eine Nullstelle findet, und reduziert mittels Polynomdivision mehrfach runter. Hier können wir das Probieren nicht simulieren, daher gleich die Umformung:
$f(x) = (x-6)^2(x+8)^3(x-1)(x-2)$
Damit eine doppelte Nullstelle bei $n_1 = 6$, eine dreifache bei $n_2 = -8$, eine bei $n_3 = 1$, und $n_4 = 2$. Alle 7 Nullstellen sind in $\mathbb{R}$ definiert, es gibt keine transzendenten Lösungen im $\mathbb{C}$. Es gibt keine Asymptoten, der Wertebereich $\mathbb{W} =]-\infty, +\infty[$ hat keine globalen Extrema.
Als Polynom 7. Grades hat $f(x)$ eine Ableitung $f'(x)$, die ein Polynom 6. Grades ist:
$f'(x) = (x+8)^2(7x^4 - 58x^3 + 10x^2 + 656x - 840)$
$= (x-6)(x+8)^2(x(x(7x-16)-86)+140)$
Deren Nullstellen sind Sattelpunkte oder lokale Extrema. Man erkennt sofort Nullstellen der Ableitung bei $n'1 = 6$ und $n'_2 = -8$ (doppelt). Weitere sind $n'_3 \approx -3,2919 \quad n'_4 \approx 1,4842 \quad n'_5 \approx 4,0934$
Für die Entscheidung Sattelpunkt oder Extremwert können Sie entweder den Vorzeichenwechsel von $f'(x)$ an den Nullstellen heranziehen oder die 2. Ableitung an den Nullstellen der 1. Ableitung nehmen, wobei nur das Vorzeichen relevant ist. Mit $f''(x) = 42x^5 + 270x^4 - 1880x^3 - 8688x^2 + 20592x + 28544$ erhalten Sie über das Vorzeichen die gesuchten Aussagen.
Skizzieren Sie mit o.g. Informationen den Graphen B.27 in dem Sie die Nullstellen markieren, die Extrema berechnen, also $f(n'_{1-7})$ und ein paar offensichtliche Stützpunkte.

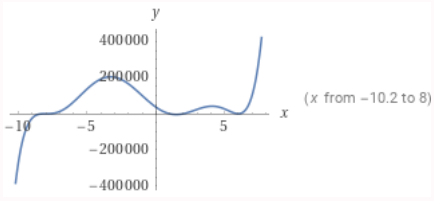


Abbildung B.27.: Plot der Funktion $f(x) = x^7+9x^6-94x^5-724x^4+3432x^3+14272x^2-53760x+36864$

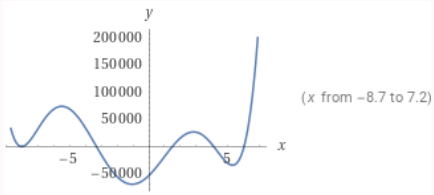


Abbildung B.28.: Plot der 1. Ableitung $f'(x) = (x+8)^2(7x^4 - 58x^3 + 10x^2 + 656x - 840)$

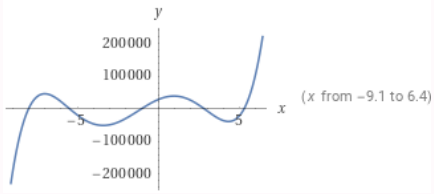


Abbildung B.29.: Plot der 2. Ableitung $f''(x) = 42x^5+270x^4-1880x^3 - 8688x^2 + 20592x + 28544$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 14.4: gebrochen rationale Funktionen

a) $f(x) = \dfrac{(x+5)^4}{(x-5)(x+1)} \longrightarrow$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

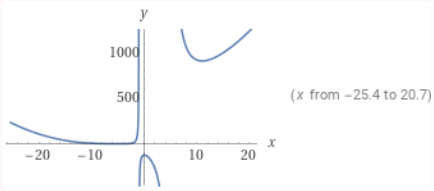


Abbildung B.30.: Plot der Funktion $f(x) = \dfrac{(x+5)^4}{(x-5)(x+1)}$

Trivial ist der Definitionsbereich $\mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus x = -1, x = 5$.
Es gibt Asymptoten bei den Definitionslücken. Der Wertebereich ist daher $\mathbb{W} =]-\infty, +\infty[$.
Trivial sind auch die Nullstellen: 4-fache Nullstelle bei $x = -5$.
Die 1. Ableitung ist

$$f'(x) = \frac{(2(x-11)x(x+5)^3)}{((x-5)^2(x+1)^2)}.$$

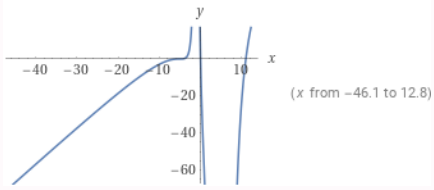


Abbildung B.31.: Plot der 1. Ableitung $f'(x) = \dfrac{(2(x-11)x(x+5)^3)}{((x-5)^2(x+1)^2)}$

Der Definitionsbereich bleibt erhalten. Nullstellen bei -5,0 und 11 stellen entweder lokale Extrema oder Sattelpunkte dar.
Natürlich kann man nun die 2. Ableitung bilden, was möglich, aber zeitaufwendig ist. Oder man nimmt wieder die Methode *Anstarren*: Die Asymptoten teilen den Definitionsbereich in 3 Teile:

- $x < -1$ *mit* $x = -5$: $f(x)$ geht sowohl gegen $-\infty$ als auch gegen -1 nach ∞. Damit kann bei $x = -5$ nur ein lokales Minimum sein.
- $-1 < x < 5$ *mit* $x = 0$: $f(x)$ geht sowohl gegen -1 als auch gegen 5 nach $-\infty$. Damit kann bei $x = 0$ nur ein lokales Maximum sein.
- $x > 5$ *mit* $x = 11$: $f(x)$ geht sowohl gegen 5 als auch gegen ∞ nach ∞. Damit kann bei $x = 11$ nur ein lokales Minimum sein.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

b) $f(x) = \dfrac{(x^2-1)}{(x^2+1)} \longrightarrow$

$f(x)$ ist eine gebrochen rationale Funktion. Im Nenner erkennt man, dass eine Nullstelle nur für Lösung der Gleichung $x^2 = -1$ existiert, somit alle $x \in \mathbb{R}$ im Definitionsbereich sind.

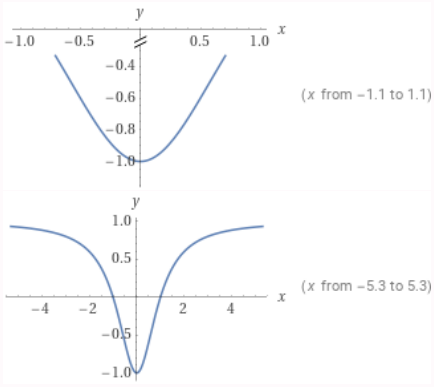


Abbildung B.32.: Plot der Funktion mit unterschiedlichen Wertebereichen $f(x) = \dfrac{(x^2-1)}{(x^2+1)}$

Nullstellen sind -1 und 1.
1. Ableitung ist $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$
Nullstelle der Ableitung bei 0.
Die 2. Ableitung ergibt sich zu $f''(x) = \dfrac{4-12x^2}{(x^2+1)^3}$.
$f''(x=0) > 0$, somit ist das lokale Minimum auch das globale Minimum.

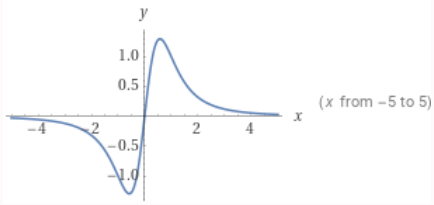


Abbildung B.33.: Plot der 1. Ableitung $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$

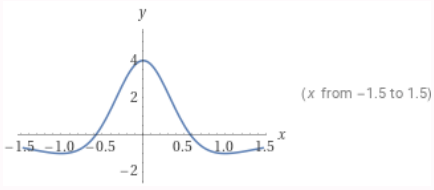


Abbildung B.34.: Plot der 2. Ableitung $f''(x) = \dfrac{4-12x^2}{(x^2+1)^3}$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

c) $f(x) = \dfrac{((x+1)^2+3)^2}{((x+1)^7+4)} \longrightarrow$

$\mathbb{D} = (x \in \mathbb{R} \setminus -\sqrt[7]{4} - 1 \approx -2,219)$.
Es bietet sich die Substitutionsmethode mit $u = x + 1$ an, zumal $u' = 1$ das Ableiten nicht verkompliziert:
$f_s(u) = \dfrac{(u^2+3)^2}{(u^7+4)}$, mit $\mathbb{D}_s = \mathbb{R} \setminus -\sqrt[7]{4}$.

ergibt keine Nullstellen in $\mathbb{D}_s$, nur komplexe Nullstellen.
1. Ableitung ist $f'(u) = \dfrac{-(u(3+u^2)(-16+21u^5+3u^7))}{(4+u^7)^2}$ mit Nullstellen $u_1 = 0, u_2 \approx 0,925453$. Weitere 5 sind komplex. Die 2. Ableitung ist eine Fleißaufgaben, die wir uns ersetzen durch Betrachtung eines Vorzeichenwechsels. Lokales Minimum bei u_1, lokales Maximum bei u_2. **Achtung:** Wenn Sie nun $f(x)$ zeichnen, bedenken Sie die Substitution! $x_1 = u_1 - 1 = -1$, $x_2 = u_2 - 1 \approx -0.074547$. Asymptote bei der Definitionslücke.

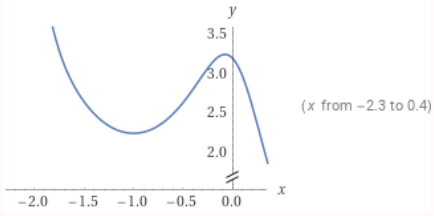


Abbildung B.35.: Plot der Funktion $f(x) = \dfrac{((x+1)^2+3)^2}{((x+1)^7+4)}$

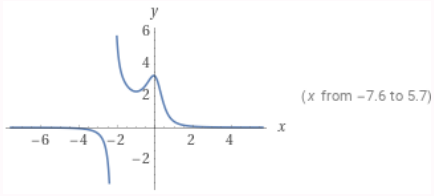


Abbildung B.36.: Plot der Funktion $f(x) = \dfrac{((x+1)^2+3)^2}{((x+1)^7+4)}$, anderer Ausschnitt

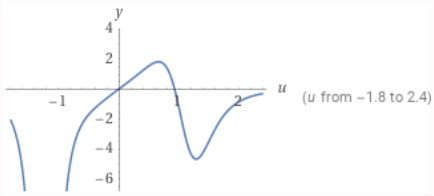


Abbildung B.37.: Plot der 1. Ableitung $f'(x)$

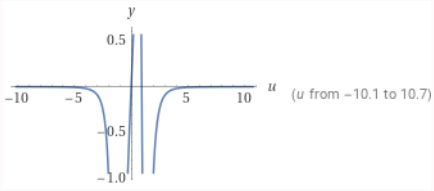


Abbildung B.38.: Plot der 1. Ableitung $f'(x)$, anderer Ausschnitt

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 14.5: Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion

a) $f(x) = e^{(x^2-2x+1)} \longrightarrow$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Leicht erkennt man, dass sich die Funktion umschreiben lässt in $f(x) = e^{(x-1)^2}$. Der Graph ist ein um 1 nach rechts verschobener Graph von e^{x^2}, symmetrisch zu $x = 1$
$\mathbb{D} = \mathbb{R}$, $\mathbb{W} = [1, \infty[$, keine Nullstellen auf $\mathbb{R}$.
1. Ableitung ist $f'(x) = 2e^{(x-1)^2}(x-1)$. Da nur $x-1$ Null werden kann, ist die Nullstelle bei $n'_1 = 0$. Sie ist globales Minimum, erkennbar auch am Vorzeichenwechsel von $f'(x)$ in $x = 1$

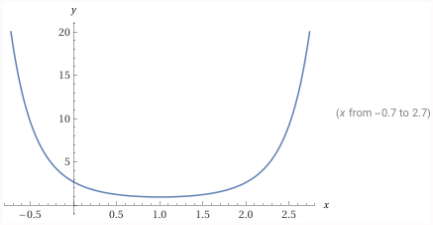


Abbildung B.39.: Plot der Funktion $f(x) = e^{(x^2-2x+1)}$

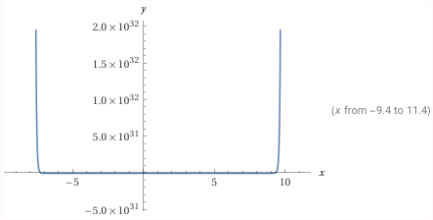


Abbildung B.40.: Plot der 1. Ableitung $f'(x) = 2e^(x-1)^2)(x-1)$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

b) $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 1) \longrightarrow$

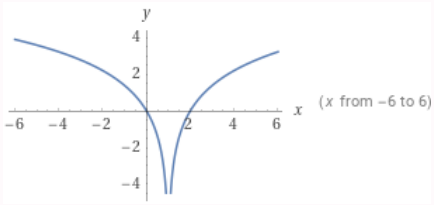


Abbildung B.41.: Plot der Funktion $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 1)$

Man erkennt im ln die 2. binomische Formel und stellt um zu $f(x) = \ln(x-1)^2$. Damit erkennt man leicht, dass bei $x = 1$ eine Definitionslücke ist. Asymptote entsprechend bei $x = 1$.
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\mathbb{W} = \mathbb{R}$.
Nullstellen ergeben sich zu einem $\ln(1)$, durch die Quadrierung zu ± 1, somit zu $n_1 = 0, n_2 = 2$. Symmetrie zu $x = 1$.
Die 1. Ableitung ist $f'(x) = \dfrac{2}{x-1}$. Diese hat keine Nullstellen, somit weder Sattelpunkt, noch Extrema.

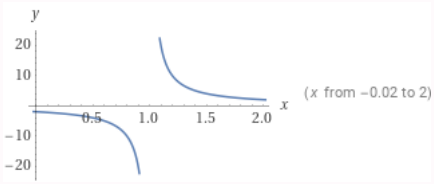


Abbildung B.42.: Plot der 1. Ableitung $f'(x) = \dfrac{2}{x-1}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x^2} \longrightarrow$

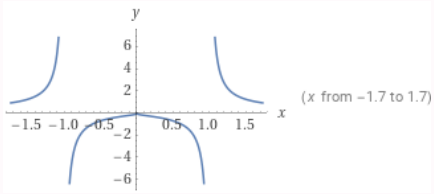


Abbildung B.43.: Plot der Funktion $f(x) = \dfrac{1}{\ln x^2}$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, $\mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus 0$.
Symmetrie zur y-Achse, Asymptote bei $x = \pm 1$, Definitionslücke bei $x = 0$
Die 1. Ableitung ist $f'(x) = \dfrac{-2}{(x \ln^2(x^2))}$. Diese hat keine Nullstellen, somit weder Sattelpunkt, noch Extrema.

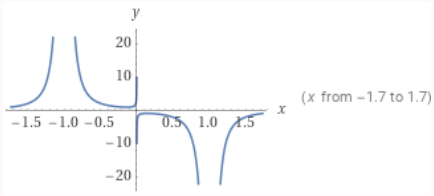


Abbildung B.44.: Plot der 1. Ableitung $f'(x) = \dfrac{-2}{(x \ln^2(x^2))}$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 14.6: Trigonometrische Funktionen

a) $f(x) = \sin^2(x^2) \longrightarrow$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

$\mathbb{D} = \mathbb{R}, \mathbb{W} = [0, 1]$.

Der Sinus wird Null bei ganzzahligen Vielfachen von π, wegen $x^2 = k \cdot \pi$ also:

$n_k = \pm\sqrt{k \cdot \pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.

1. Ableitung ist $f'(x) = 4 \cdot x \cdot \cos(x^2) \cdot \sin(x^2)$,

2. Ableitung ist $f''(x) = -8 \cdot x^2 \cdot \sin^2(x^2)$
$+ 8 \cdot x^2 \cdot \cos^2(x^2) + 4 \cdot \sin(x^2) \cdot \cos(x^2)$.

Die Nullstellen von $f'(x)$ sind lokale Extrema,

$n'_k = \pm\sqrt{k \cdot \frac{\pi}{2}}$, $k \in \mathbb{Z}$.

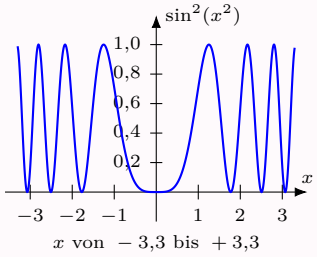


Abbildung B.45.: Plot der Funktion $f(x) = \sin^2(x^2)$

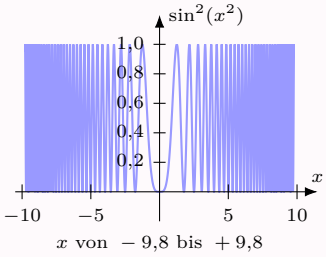


Abbildung B.46.: Plot der Funktion $f(x) = \sin^2(x^2)$
(anderer Ausschnitt)

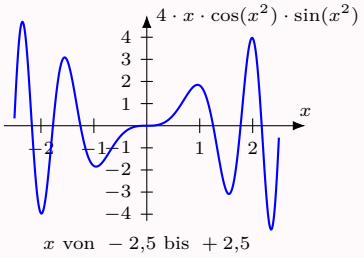


Abbildung B.47.: Plot der 1. Ableitung
$f'(x) = 4 \cdot x \cdot \cos(x^2) \cdot \sin(x^2)$

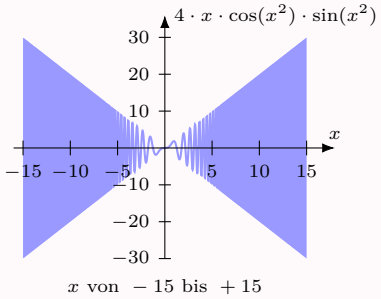


Abbildung B.48.: Plot der 1. Ableitung
$f'(x) = 4 \cdot x \cdot \cos(x^2) \cdot \sin(x^2)$
(anderer Ausschnitt)

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

b) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)} \longrightarrow$

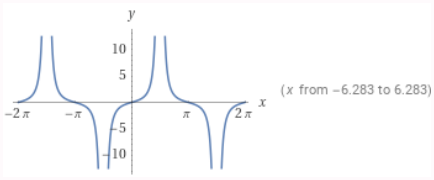


Abbildung B.49.: Plot der Funktion $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus x = \pm\dfrac{k}{2}\pi, k \in \mathbb{Z} \setminus 0,$
$\mathbb{W} =]-\infty, +\infty[$. Der Sinus wird Null bei ganzzahligen Vielfachen von π,
$n_k = \pm k\pi \ , k \in \mathbb{Z}$.
Die Nullstellen stellen Sattelpunkt dar, mit Asymptoten bei den Definitionslücken.

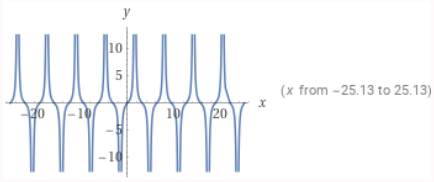


Abbildung B.50.: Plot der Funktion $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$, anderer Abschnitt

c) $f(x) = \cos^5(x) \longrightarrow$

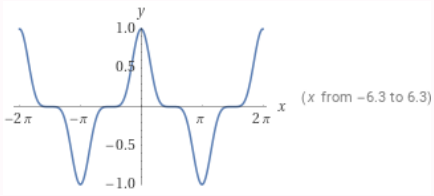


Abbildung B.51.: Plot der Funktion $f(x) = f(x) = \cos^5(x)$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$
$\mathbb{W} = [-1, 1]$.
Der Cosinus wird Null bei $n_k = \pm k\dfrac{\pi}{2} \ , k \in \mathbb{Z} \setminus 0$.
Die 1. Ableitung ist $f'(x) = -5\cos^4(x)\sin(x)$.
Nullstellen sind somit bei $n'_k = k\dfrac{\pi}{2}$.
Die 2. Ableitung ist $-5\cos^3(x)(\cos^2(x) - 4\sin^2(x))$.
Entsprechend ergeben sich Sattelpunkte und lokale Extrema.

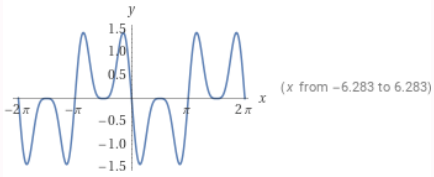


Abbildung B.52.: Plot der 1. Ableitung $f'(x) = -5\cos^4(x)\sin(x)$

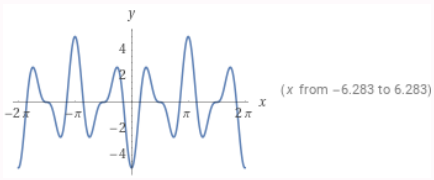


Abbildung B.53.: Plot der 2. Ableitung $-5\cos^3(x)(\cos^2(x) - 4\sin^2(x))$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 14.7: Betragsfunktion

a) $f(x) = |x^3 - 5| \longrightarrow$
Zu beachten ist, dass wir uns in $\mathbb{R}$ bewegen, somit keine komplexen Lösungen betrachtet werden.

Somit haben wir nur eine Bereichsgrenze bei $x = \sqrt[3]{5}$, was gleichzeitig Nullstelle und globales Minimum ist.

- $x < \sqrt[3]{5} \qquad f(x) = -(x^3 - 5)$
- $x = \sqrt[3]{5} \qquad f(x) = 0$
- $x > \sqrt[3]{5} \qquad f(x) = (x^3 - 5)$

Bereichsweise ableiten für zu

- $x < \sqrt[3]{5} \qquad f'(x) = -3x^2$
- $x > \sqrt[3]{5} \qquad f'(x) = 3x^2$
- $x = \sqrt[3]{5} \qquad$ keine stetige Ergänzung möglich

Die 1. Ableitung ist als Einzelterm darstellbar mit
$f'(x) = \dfrac{(3x^2(-5 + x^3))}{|-5 + x^3|}$ *auf* $\mathbb{R} \setminus \sqrt[3]{5}$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

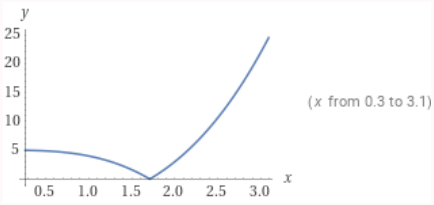


Abbildung B.54.: Plot der Funktion $f(x) = |x^3 - 5|$

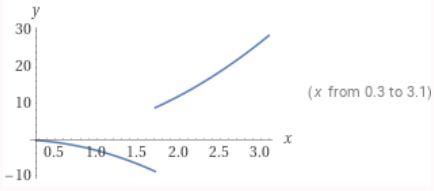


Abbildung B.55.: Plot der 1. Ableitung $\dfrac{(3x^2(-5 + x^3))}{|-5 + x^3|}$

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 14.8: Polarkoordinaten

a) $f(\varphi) = \varphi^2 \longrightarrow$ Definitions-, Wertebereich und Nullstellen sind wie Extrema trivial, ebenso die 1. Ableitung $f'(\varphi) = 2 \cdot \varphi$ im kartesischen System.
Herleitung der Polarkoordinaten:

$$x = r \cdot \cos\varphi \quad y = r \cdot \sin\varphi$$

mit $y = x^2$

$$r \cdot \sin\varphi = (r \cdot \cos\varphi)^2$$

$$r \cdot \sin\varphi = r^2 \cdot \cos^2\varphi \quad \text{beide Seiten durch } r \text{ dividieren}$$

$$\sin\varphi = r \cdot \cos^2\varphi \quad \text{beide Seiten durch } \cos^2\varphi \text{ dividieren}$$

$$r = \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$$

Funktionsdarstellung:

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Kartesische Koordinaten:

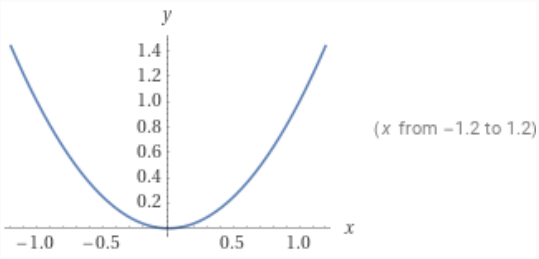


Abbildung B.56.: $f(x) = x^2$, kartesisch

Polarkoordinaten:

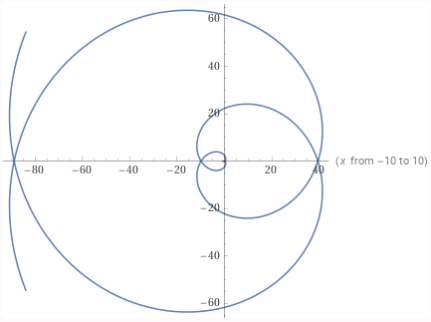


Abbildung B.57.: $f(\varphi) = \varphi^2$, polar

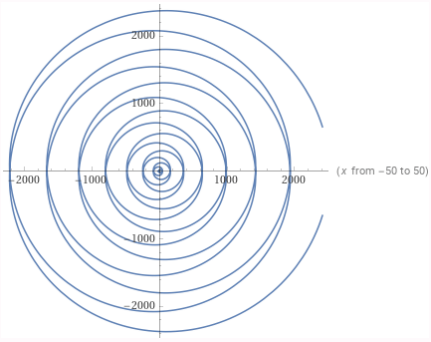


Abbildung B.58.: $f(\varphi) = \varphi^2$, polar, anderer Ausschnitt

Darstellung 1. Ableitung:

Kartesische Koordinaten:

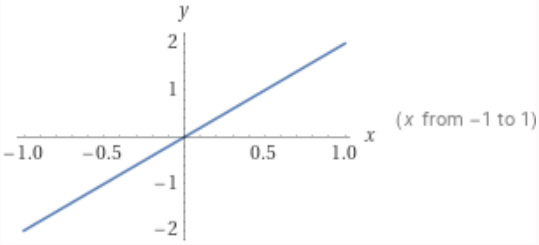


Abbildung B.59.: $f'(x) = 2 \cdot x$, kartesisch

Polarkoordinaten:

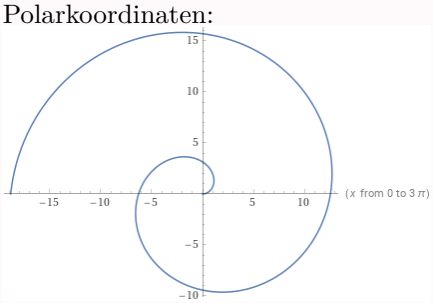


Abbildung B.60.: $f'(\varphi) = 2 \cdot \varphi$, polar

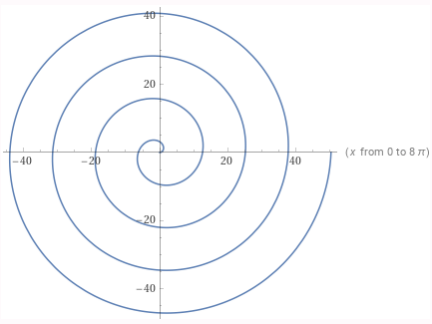


Abbildung B.61.: $f'(\varphi) = 2 \cdot \varphi$, polar, anderer Ausschnitt

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Quelle: Herleitung $y = x^2$ polar https://socratic.org/questions/how-do-you-convert-y-x-2-into-polar-form

b) $f(\varphi) = (\varphi + 5)^4 \longrightarrow$ Definitions-, Wertebereich und Nullstellen sind wie Extrema trivial, ebenso die 1. Ableitung $f'(\varphi) = 4 \cdot (5 + \varphi)^3$

Funktionsdarstellung:

Kartesische Koordinaten:

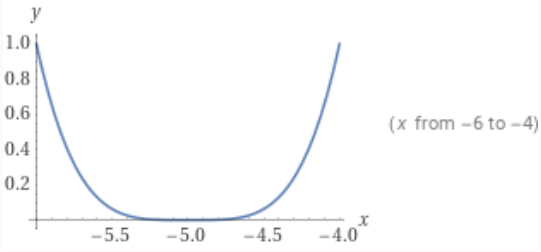


Abbildung B.62.: $f(x) = (x + 5)^4$, kartesisch

Polarkoordinaten:

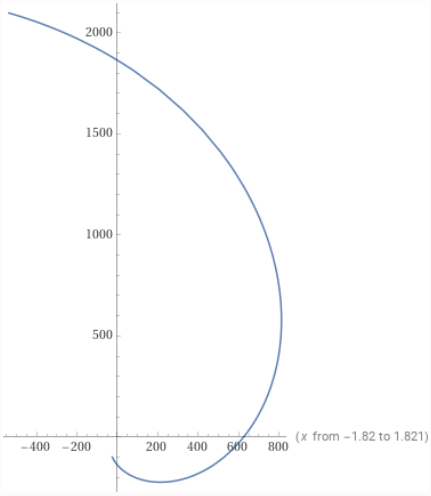


Abbildung B.63.: $f(\varphi) = (\varphi + 5)^4$, polar

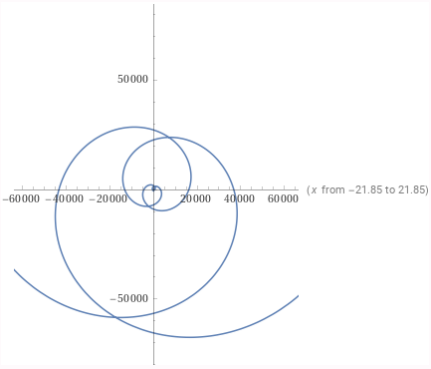


Abbildung B.64.: $f(\varphi) = (\varphi + 5)^4$, polar, anderer Ausschnitt

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Darstellung 1. Ableitung:

Kartesische Koordinaten:

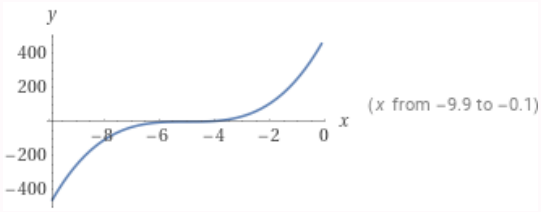


Abbildung B.65.: $f'(x) = 4 \cdot (5 + x)^3$, kartesisch

Polarkoordinaten:

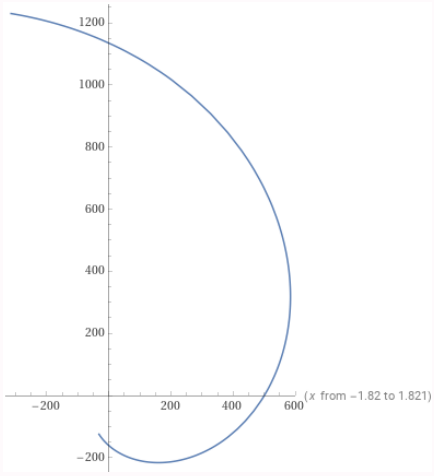


Abbildung B.66.: $f'(\varphi) = 4 \cdot (5 + \varphi)^3$, polar

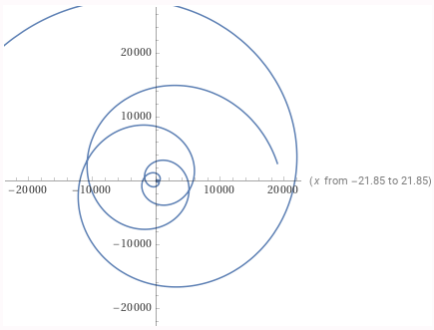


Abbildung B.67.: $f'(\varphi) = 4 \cdot (5 + \varphi)^3$, polar, anderer Ausschnitt

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

c) $f(\varphi) = \ln(\varphi^{\varphi}) \longrightarrow$ Definitions-, Wertebereich und Nullstellen sind wie Extrema trivial, ebenso die 1. Ableitung $f'(\varphi) = \ln\varphi + 1$
Funktionsdarstellung:
Kartesische Koordinaten:

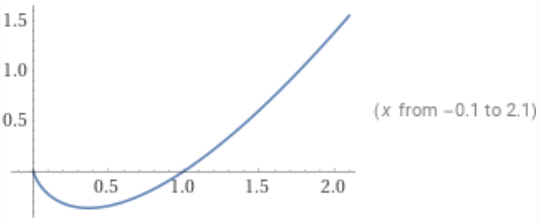


Abbildung B.68.: $f(x) = \ln(x^x)$, kartesisch

Polarkoordinaten:

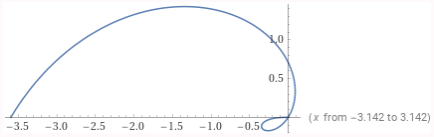


Abbildung B.69.: $f(\varphi) = \ln(\varphi^{\varphi})$, polar

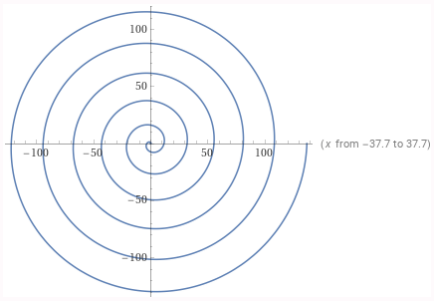


Abbildung B.70.: $f(\varphi) = \ln(\varphi^{\varphi})$, polar, anderer Ausschnitt

Darstellung 1. Ableitung:
Kartesische Koordinaten:

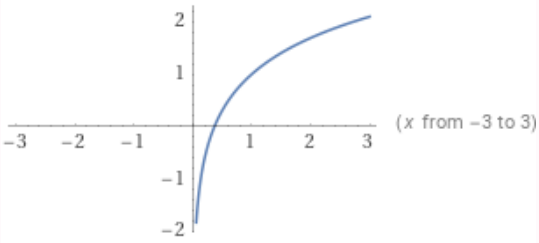


Abbildung B.71.: $f'(x) = \ln x + 1$, kartesisch

Polarkoordinaten:

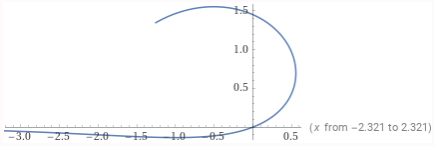


Abbildung B.72.: $f'(\varphi) = \ln\varphi + 1$, polar

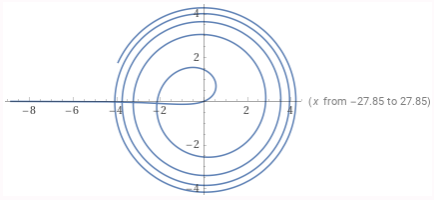


Abbildung B.73.: $f'(\varphi) = \ln\varphi + 1$, polar, anderer Ausschnitt

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 15.1: Stetigkeit

Quelle: b) … g) https://www.max-academy.de/contentPool/5dfa7d81c4ae3e00079a2347; **Abruf 2024-08-29**

a) Untersuche die Funktion $f(x) = |x|$ auf Stetigkeit →
$f(x)$ ist stetig.

b) Überprüfe, ob diese Funktion stetig ist: $f(x) = \begin{cases} x^2/3 & \text{für } x \in]-\infty, 0[\\ -x^2 + (x-1)\cdot\ln\big(|x|+1\big) + 1/3 & \text{für } x \in [0,1] \\ -1 & \text{für } x \in]1, \infty[\end{cases}$ →

Nicht stetig, da an beiden kritischen Punkten $x = 0$ und $x = 1$
links- und rechtsseitige Grenzwerte jeweils nicht überein stimmen.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

c) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion stetig: $f(x) = \begin{cases} 8 \cdot a + 16 \cdot x & x < 2 \\ a^2 \cdot (x+2) & x \geq 2 \end{cases}$ →

$\lim\limits_{x \to 2^-} (8 \cdot a + 16 \cdot x) = 8 \cdot a + 32$

$\lim\limits_{x \to 2^+} \left(a^2 \cdot (x+2)\right) = 4 \cdot a^2$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \stackrel{!}{=} \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \quad \Rightarrow \quad 8 \cdot a + 32 = 4 \cdot a^2 \Leftrightarrow a^2 - 2 \cdot a - 8 = 0 \quad \Rightarrow \; a_1 = 4; \; a_2 = -2$

$a_1 = 4 : f(x) = \begin{cases} 8 \cdot 4 + 16 \cdot x = 32 + 16 \cdot x & x < 2 \\ 4^2 \cdot (x+2) = 32 + 16 \cdot x & x \geq 2 \end{cases}$

→ $f(x)$ ist für $a = 4$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

$a_2 = -2 : f(x) = \begin{cases} 8 \cdot (-2) + 16 \cdot x = -16 + 16 \cdot x & x < 2 \\ (-2)^2 \cdot (x+2) = 8 + 4 \cdot x & x \geq 2 \end{cases} \rightarrow f(2) = 16$

→ $f(x)$ ist für $a = -2$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

d) Für welche $k \in \mathbb{N}$ ist die Funktion stetig: $f(x) = \begin{cases} 1/k \cdot \mathrm{e}^{\frac{6 \cdot x}{\pi} - 1} & 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \\ \sin^2(x) & \frac{\pi}{6} \geq x \leq \pi \end{cases}$ →

$f(x)$ ist für $k = 4$ stetig auf dem Intervall $[0, \pi] \subset \mathbb{R}$.

e) Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ ist die folgende Funktion stetig? $f(x) = \begin{cases} a \cdot x^2 + b & x \geq 1 \\ x & x < 1 \end{cases}$ →

$f(x)$ ist für $a = 1 - b$ stetig auf $\mathbb{R}$.

f) Untersuche die Funktion auf Stetigkeit $(x > 0)$: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x-1} & \text{für } x \neq 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$ →

$f(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}^+$.

g) Untersuche die folgende Funktion auf Stetigkeit: $f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{für } x \leq \pi \\ \dfrac{\sin(x)}{x - \pi} & \text{für } x > \pi \end{cases}$ →

$f(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 15.2: Ableitungen der Elementarfunktionen

a) $f(x) = x^2 \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} x^2 = 2x$

b) $f(x) = x^3 \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} x^3 = 3x^2$

c) $f(x) = x^4 \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} x^4 = 4x^3$

d) $f(x) = \sqrt{x} \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

e) $f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$

f) $f(x) = \ln(x) \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \ln(x) = \frac{1}{x}$

g) $f(x) = e^x \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} e^x = e^x$

h) $f(x) = \sin(x) \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \sin(x) = \cos(x)$

i) $f(x) = \cos(x) \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \cos(x) = -\sin(x)$

j) $f(x) = \tan(x) \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 15.3: Steigungen der Elementarfunktionen v1

a) Berechnen Sie die Steigung der Funktion $f(x) = 42$ im Punkt $x_0 = 5$. →

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

$f'(x) = 0 \Rightarrow f'(42) = 0.$

b) Berechnen Sie die Steigung der Funktion $f(x) = x^3$ im Punkt $x_0 = 4$. →
$f'(x) = 3 \cdot x^2 \Rightarrow f'(4) = 3 \cdot 4^2 = 48.$

c) Berechnen Sie die Steigung der Funktion $f(x) = \mathrm{e}^x$ im Punkt $x_0 = 0$ und im Punkt $x_1 = 1$. →
$f'(x) = \mathrm{e}^x \Rightarrow f'(0) = 1$ und $f'(1) = \mathrm{e}$.

d) Berechnen Sie die Steigung der Funktion $f(x) = 3 \cdot \sqrt{x}$ im Punkt $x_0 = 1$ →
$f'(x) = \left(3 \cdot x^{1/2}\right)' = 3 \cdot 1/2 \cdot x^{-1/2} = 3/2 \cdot \sqrt{x} \Rightarrow f'(1) = 3/2.$

e) Berechnen Sie die Steigung der Funktion $f(x) = \sin(x)$ im Punkt $x_0 = 0$ und im Punkt $x_1 = \pi$. →
$f'(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(0) = 1;\ f'(\pi) = -1.$

f) Berechnen Sie die Steigung der Funktion $f(x) = 10^x$ im Punkt $x_0 = 3$. →
$f'(x) = 10^x \cdot \ln(10) \Rightarrow f'(3) \approx 2.302{,}585.$

g) Berechnen Sie die Steigung der Funktion $f(x) = \ln(6)$ im Punkt $x_0 = 2$. →
$f'(x) = 0 \Rightarrow f'(2) = 0.$

h) Berechnen Sie die Steigung der Funktion $f(x) = \ln(x)$ im Punkt $x_0 = 0{,}1$. →
$f'(x) = 1/x \Rightarrow f'(1/10) = 10.$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 15.4: Summen- und Produktregel

Quelle: Vgl. [[**Ross23**]] S. 368ff.

a) $10 \cdot x^2;\ x_0 = 3$ →
$f'(x) = 20 \cdot x;\ f'(3) = 60.$

b) $6 \cdot \mathrm{e}^x;\ x_0 = 0$ →
$f'(x) = 6 \cdot \mathrm{e}^x;\ f'(0) = 6.$

c) $-2 \cdot x^3 - 30 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 2;\ x_0 = 1$ →
$f'(x) = -6 \cdot x^2 - 60 \cdot x + 66;\ f'(1) = 0.$

d) $4 \cdot x^3 - 60 \cdot x^2 - 132 \cdot x - 12;\ x_0 = -1$ →
$f'(x) = 12 \cdot x^2 - 120 \cdot x - 132;\ f'(-1) = 0.$

e) $2 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 2;\ x_0 = -2$ →
$f'(x) = 6 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 6;\ f'(-2) =.$

f) $7 + 7{,}5 \cdot x^8 - 40 \cdot x^{7{,}5} + x/0{,}2;\ x_0 = 25$ →
$f'(x) = 60 \cdot x^7 - 300 \cdot x^{6{,}5} + 5;\ f'(25) = 5.$

g) $-512/x + 4/5 \cdot x^{5/4} + 96 \cdot \sqrt{x};\ x_0 = 16$ →
$f'(x) = 512 \cdot x^{-2} + x^{1/4} + 48/\sqrt{x};\ f'(16) = 16.$

h) $20 \cdot x^3 \cdot \ln(x);\ x_0 = 1$ →
$f'(x) = 60 \cdot x^2 \cdot \ln(x) + 20 \cdot x^3 \cdot 1/x;\ f'(1) =.$

i) $20 \cdot \mathrm{e}^x \cdot \ln(x);\ x_0 = 2$ →
$f'(x) = 20 \cdot \mathrm{e}^x \cdot \ln(x) + 20 \cdot \mathrm{e}^x \cdot 1/x;\ f'(2) \approx 176{,}32.$

j) $1/\ln(4) \cdot 4^x \cdot \ln(x);\ x_0 = 1$ →
$f'(x) = 4^x \cdot \ln(x) + 1/\ln(4) \cdot 4^x \cdot x^{-1};\ f'(1) \approx 2{,}89.$

k) $\ln(5) \cdot \log_5(x) \cdot \mathrm{e}^x;\ x_0 = 0{,}2$ →
$f'(x) = \mathrm{e}^x/x + \ln(5) \cdot \log_5(x) \cdot \mathrm{e}^x;\ f'(0{,}2) \approx 4{,}14.$

l) $x^{4{,}5} \cdot \mathrm{e}^x \cdot \sqrt{x};\ x_0 = 0{,}25$ →
$f'(x) = x^4 \cdot \mathrm{e}^x \cdot (5 + x);\ f'(0{,}25) \approx 0{,}03.$ Hier geht es zu Lösungshinweisen.

m) $x^{5{,}5} \cdot \mathrm{e}^x \cdot \sqrt{x};\ x_0 =$ →
$f'(x) = x^5 \cdot \mathrm{e}^x \cdot (6 + x);\ f'() \approx 3{,}39.$ Hier geht es zu Lösungshinweisen.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 15.5: Summen- und Produktregel [OpenAI2024p]

a) Bestimme die Ableitung von $f(x) = 3x^2 + 5x - 4$.
$f(x) = 3x^2 + 5x - 4$

$$f'(x) = 6x + 5$$

b) Bestimme die Ableitung von $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$.
$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

c) Bestimme die Ableitung von $f(x) = (2x + 3)(x^2 - 1)$.
$f(x) = (2x + 3)(x^2 - 1)$

$$f'(x) = (2x + 3)'(x^2 - 1) + (2x + 3)(x^2 - 1)'$$

$$f'(x) = 2(x^2 - 1) + (2x + 3)(2x)$$
$$f'(x) = 2x^2 - 2 + 4x^2 + 6x$$
$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 2$$

d) Bestimme die Ableitung von $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 - 4x)$.
$f(x) = (x^2 + 1)(x^3 - 4x)$

$$f'(x) = (x^2 + 1)'(x^3 - 4x) + (x^2 + 1)(x^3 - 4x)'$$

$$f'(x) = 2x(x^3 - 4x) + (x^2 + 1)(3x^2 - 4)$$
$$f'(x) = 2x^4 - 8x^2 + 3x^4 - 4x^2 + 3x^2 - 4$$
$$f'(x) = 5x^4 - 9x^2 - 4$$

e) Bestimme die Ableitung von $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x - 7$.
$f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x - 7$

$$f'(x) = 15x^2 - 6x + 2$$

f) Bestimme die Ableitung von $f(x) = (x^4 - 3x^2)(x^2 + 1)$.
$f(x) = (x^4 - 3x^2)(x^2 + 1)$

$$f'(x) = (x^4 - 3x^2)'(x^2 + 1) + (x^4 - 3x^2)(x^2 + 1)'$$

$$f'(x) = (4x^3 - 6x)(x^2 + 1) + (x^4 - 3x^2)(2x)$$
$$f'(x) = 4x^5 + 4x^3 - 6x^3 - 6x + 2x^5 - 6x^3$$
$$f'(x) = 6x^5 - 8x^3 - 6x$$

g) Bestimme die Ableitung von $f(x) = 4x^2 - 6x + 9$.
$f(x) = 4x^2 - 6x + 9$

$$f'(x) = 8x - 6$$

h) Bestimme die Ableitung von $f(x) = (3x + 2)(2x^2 - x + 1)$.
$f(x) = (3x + 2)(2x^2 - x + 1)$

$$f'(x) = (3x + 2)'(2x^2 - x + 1) + (3x + 2)(2x^2 - x + 1)'$$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

$$f'(x) = 3(2x^2 - x + 1) + (3x + 2)(4x - 1)$$
$$f'(x) = 6x^2 - 3x + 3 + 12x^2 - 3x + 8x - 2$$
$$f'(x) = 18x^2 + 5x + 1$$

i) Bestimme die Ableitung von $f(x) = (x^2 - 2x + 1)(x^3 + x - 4)$.
$f(x) = (x^2 - 2x + 1)(x^3 + x - 4)$

$$f'(x) = (x^2 - 2x + 1)'(x^3 + x - 4) + (x^2 - 2x + 1)(x^3 + x - 4)'$$
$$f'(x) = (2x - 2)(x^3 + x - 4) + (x^2 - 2x + 1)(3x^2 + 1)$$
$$f'(x) = 2x^4 + 2x^2 - 8x - 2x^3 - 2x + 8 + 3x^4 - 6x^3 + 3x^2 + x^2 - 2x + 1$$
$$f'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 4x + 9$$

j) Bestimme die Ableitung von $f(x) = 2x^5 - 4x^3 + x - 8$.
$f(x) = 2x^5 - 4x^3 + x - 8$

$$f'(x) = 10x^4 - 12x^3 + 1$$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 15.6: Quotienten- und Reziprokenregel

Quelle: Vgl. [[**Ross23**]] S. 383ff.

a) $f(x) = {x^3}/{x^2} \rightarrow$
$f'(x) = 1.$

b) $f(x) = {\ln(x)}/{x^2} \rightarrow$
$f'(x) = {1-2\cdot\ln(x)}/{x^3}.$

c) $f(x) = {e^x}/{\sqrt{x}} \rightarrow$
$f'(x) = {e^x\cdot\sqrt{x}-0{,}5\cdot e^x\cdot x^{-0{,}5}}/{x}.$

d) $f(x) = {1}/{e^x} \rightarrow$
$f'(x) = -e^{-x}.$

e) $f(x) = {x^2}/{\ln(x)} \rightarrow$
$f'(x) = /{\left(\ln(x)\right)^2}.$

f) $f(x) = {4\cdot x^2}/{\sqrt[4]{x}} \rightarrow$
$f'(x) = 7 \cdot x^{3/4}.$

g) $f(x) = {10\cdot e^x}/{\sqrt{x}} \rightarrow$
$f'(x) = {10\cdot e^x\cdot\sqrt{x}-5\cdot e^x\cdot x^{-1/2}}/{x}.$

h) $f(x) = {4\cdot x^3+6\cdot x^2}/{\ln(x)} \rightarrow$
$f'(x) = {(12\cdot x^2+12\cdot x)\cdot\ln(x)-4\cdot x^2-6\cdot x}/{\left(\ln(x)\right)^2}.$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 15.7: Kettenregel

a) $f(x) = \ln(e^x) \rightarrow f'(x) = 1$

b) $f(x) = \sin(x^2) \rightarrow f'(x) = 2 \cdot x \cdot \cos(x^2)$

c) $f(x) = e^{\cos(x)} \rightarrow f'(x) = -e^{\cos(x)} \cdot \sin(x)$

d) $\sqrt{\sin(x)} \rightarrow f'(x) = \dfrac{\cos(x)}{2 \cdot \sqrt{\sin(x)}}$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

e) $\ln\left(\sqrt{e^x}\right) \to f'(x) = \frac{1}{2}$

f) Bestimme die Ableitung von $f(x) = (3x+2)^2$.
$f(x) = (3x+2)^2$

$$f'(x) = 2(3x+2) \cdot 3 = 6(3x+2)$$

g) Bestimme die Ableitung von $f(x) = \sqrt{5x^2+4x}$.
$f(x) = \sqrt{5x^2+4x}$

$$f(x) = (5x^2+4x)^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(5x^2+4x)^{-1/2} \cdot (10x+4)$$

$$f'(x) = \frac{10x+4}{2\sqrt{5x^2+4x}}$$

h) Bestimme die Ableitung von $f(x) = \sin(4x^3+2x)$.
$f(x) = \sin(4x^3+2x)$

$$f'(x) = \cos(4x^3+2x) \cdot (12x^2+2)$$

$$f'(x) = (12x^2+2)\cos(4x^3+2x)$$

i) Bestimme die Ableitung von $f(x) = \ln(7x^4-3x^2+x)$.
$f(x) = \ln(7x^4-3x^2+x)$

$$f'(x) = \frac{1}{7x^4-3x^2+x} \cdot (28x^3-6x+1)$$

$$f'(x) = \frac{28x^3-6x+1}{7x^4-3x^2+x}$$

j) Bestimme die Ableitung von $f(x) = e^{2x^3-x^2+4x}$.
$f(x) = e^{2x^3-x^2+4x}$

$$f'(x) = e^{2x^3-x^2+4x} \cdot (6x^2-2x+4)$$

$$f'(x) = (6x^2-2x+4)e^{2x^3-x^2+4x}$$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 15.8: Kettenregel

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 15.9: Differentialrechnung – gemischte Aufgaben –

a) $f(x) = x \cdot \sin(x^2) \longrightarrow \quad 2 \cdot x^2 \cdot \cos(x^2) + \sin(x^2)$

b) $f(x) = \sin\big(\cos(x)\big) \longrightarrow \quad \sin(x) \cdot (-\cos(\cos(x)))$

c) $f(x) = x^{10} + x^5 - x^7 - \mathrm{e}^{\frac{\sin(y)}{\cos^2(y)}} \longrightarrow \quad 10x^9 + 5x^4 - 7x^6$

d) $\dfrac{\mathrm{d}^7\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{d}\,x^7} \longrightarrow \quad \mathrm{e}^x$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

e) $\mathrm{d}\,\dfrac{\dfrac{\mathrm{e}^{y}}{\sin(y)}}{\sqrt{\dfrac{\cos(y^3)}{\arctan(y)}}}\,\mathrm{d}\,x \longrightarrow \qquad e^{x}$

f) $f(x) = (x^{2/3}\cdot\sin(x)+x^{x}) \longrightarrow \qquad x^{2/3}\cdot\cos(x)+x^{x}\cdot\big(\ln(x)+1\big)+\dfrac{2\cdot\sin(x)}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$

g) $\dfrac{\mathrm{d}^4\,\sin(x)}{\mathrm{d}\,x^4} \longrightarrow \qquad \sin(x)$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 16.1: Integralaufgaben [OpenAI2024r]

a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x\ \cdot \mathrm{d}\,x$
Lösung: $\int x\ \cdot \mathrm{d}\,x = \frac{x^2}{2} + C$

b) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int (2\cdot x+3)\ \cdot \mathrm{d}\,x$
Lösung: $\int (2x+3)\,dx = x^2+3x+C$

c) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int \frac{1}{x}\ \cdot \mathrm{d}\,x$
Lösung: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|+C$

d) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int \sin^2(x)\ \cdot \mathrm{d}\,x$
Lösung: $\int \sin^2(x)\,dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int 1\,dx - \frac{1}{2}\int\cos(2x)\,dx$
$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)+C$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 16.2: Bestimmte Integrale

Quelle: Vgl. [[**Ross23**]], S. 516ff., Übungsaufgaben 300 ... 303.

a) $\int_2^3 \big(-379+10\cdot x^4-6\cdot\sqrt[4]{x^8}+\frac{6}{x^2}\big)\cdot \mathrm{d}\,x = \left(-379\cdot x+\frac{10}{5}\cdot x^5-\frac{6}{3}\cdot X^3+\frac{6}{-1}\cdot X^{-1}\right)\Big|_2^3 = 6$

b) $\int_1^2 \big(-188+24\cdot x^5-16\cdot\sqrt[5]{x^{15}}+\frac{8}{x^3}\big)\cdot \mathrm{d}\,x = \left(-188\cdot x+\frac{24}{6}\cdot x^6-\frac{16}{4}\cdot x^4+\frac{8}{-2}\cdot x^{-2}\right)\Big|_1^2 = 7$

c) $\int_1^2 \big(20\cdot x^3-\ln(8)\cdot 8^x\big)\cdot \mathrm{d}\,x = \left(\frac{20}{4}\cdot x^4-\ln(8)\cdot\frac{1}{\ln(8)}\cdot 8^x\right)\Big|_1^2 = 19$

d) $\int_1^2 \big(43+15\cdot x^2-20\cdot\sqrt[3]{x^9}+\frac{8}{x^3}\big)\cdot \mathrm{d}\,x = 6$

e) $\int_2^5 \big(56\cdot x^3-\ln(6)\cdot x^6\big)\cdot \mathrm{d}\,x = 786$

f) $\int_3^6 \big(6+16\cdot x^3-16\cdot\sqrt[4]{x^{12}}+\frac{18}{x^2}\big)\cdot \mathrm{d}\,x = 21$

g) $\int_1^2 \big(16\cdot x^3-\ln(7)\cdot 7^x\big)\cdot \mathrm{d}\,x = 18$

h) $\int_2^5 \big(-489+12\cdot x^3-9\cdot\sqrt{x^4}+\frac{10}{x^2}\big)\cdot \mathrm{d}\,x = \left(-489\cdot x+\frac{12}{4}\cdot x^4-\frac{9}{3}\cdot x^3+\frac{10}{-1}\cdot x^{-1}\right)\Big|_2^3 = 12$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

i) $\int_3^4 \left(277 + 6 \cdot x^2 - 8 \cdot \sqrt[4]{x^{12}} + \frac{288}{x^3}\right) \cdot \mathrm{d}\, x = 8$

j) $\int_1^4 \left(63 \cdot x^2 - \ln(6) \cdot 6^x\right) \cdot \mathrm{d}\, x = 33$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 16.3: Bestimmte und unbestimmte Integrale [OpenAI2024q]

a) Berechnen Sie das bestimmte Integral: $\int_0^1 x\,dx$
$\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$

b) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int (2x+3)\,dx$
$\int (2x+3)\,dx = x^2 + 3x + C$

c) Berechnen Sie das bestimmte Integral: $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$
$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = [\ln|x|]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

d) Berechnen Sie das bestimmte Integral mittels Substitution: $\int_0^1 2xe^{x^2}\,dx$
$u = x^2 \implies du = 2x\,dx$
$\int_0^1 2xe^{x^2}\,dx = \int_0^1 e^u\,du = [e^u]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$

e) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x\cos(x)\,dx$
Partielle Integration: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$
$u = x$, $dv = \cos(x)\,dx$
$du = dx$, $v = \sin(x)$
$\int x\cos(x)\,dx = x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx = x\sin(x) + \cos(x) + C$

f) Berechnen Sie das bestimmte Integral: $\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx$
$\int \sin^2(x)\,dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int 1\,dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx$
$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + C$
Bestimmtes Integral:
$\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^\pi = \left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\sin(2\pi)\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{4}\sin(0)\right) = \frac{\pi}{2}$

g) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int e^{2x}\sin(x)\,dx$
Partielle Integration zwei Mal:
$I = \int e^{2x}\sin(x)\,dx$
$u = \sin(x)$, $dv = e^{2x}\,dx$
$du = \cos(x)\,dx$, $v = \frac{e^{2x}}{2}$
$I = \frac{e^{2x}}{2}\sin(x) - \int \frac{e^{2x}}{2}\cos(x)\,dx$
Setze: $J = \int e^{2x}\cos(x)\,dx$
$u = \cos(x)$, $dv = e^{2x}\,dx$
$du = -\sin(x)\,dx$, $v = \frac{e^{2x}}{2}$
$J = \frac{e^{2x}}{2}\cos(x) + \int \frac{e^{2x}}{2}\sin(x)\,dx$
$I - \frac{1}{2}J = \frac{e^{2x}}{2}\sin(x) - \frac{e^{2x}}{2}\cos(x)$
$I = \frac{e^{2x}}{2}\sin(x) - \frac{e^{2x}}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}I$
$\frac{1}{2}I = \frac{e^{2x}}{2}(\sin(x) - \cos(x))$
$I = e^{2x}(\sin(x) - \cos(x)) + C$

h) Berechnen Sie das bestimmte Integral: $\int_0^{\pi/2} x^2\cos(x)\,dx$
Partielle Integration:
$u = x^2$, $dv = \cos(x)\,dx$
$du = 2x\,dx$, $v = \sin(x)$
$\int_0^{\pi/2} x^2\cos(x)\,dx = \left[x^2\sin(x)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2x\sin(x)\,dx$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

$\int_0^{\pi/2} 2x\sin(x)\,dx = [-2x\cos(x)]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 2\cos(x)\,dx$
$= [-2x\cos(x)]_0^{\pi/2} + [2\sin(x)]_0^{\pi/2}$
$= 0 + 2 = 2$
$\int_0^{\pi/2} x^2\cos(x)\,dx = \frac{\pi^2}{4} - 2$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 16.4: Substitionsverfahren [OpenAI2024s]

a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral mittels Substitution: $\int 2 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{x^2} \cdot \mathrm{d}\,x$
Lösung: $u = x^2 \implies du = 2x\,dx$
$\int 2xe^{x^2}\,dx = \int e^u\,du = e^u + C = e^{x^2} + C$

b) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int xe^{x^2}\,dx$
$u = x^2 \implies du = 2x\,dx \implies dx = \frac{du}{2x}$
$\int xe^{x^2}\,dx = \int xe^u \cdot \frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

c) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int \cos(x)\sin(x)\,dx$
$u = \sin(x) \implies du = \cos(x)\,dx$
$\int \cos(x)\sin(x)\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\sin^2(x)}{2} + C$

d) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x\cos(x^2)\,dx$
$u = x^2 \implies du = 2x\,dx \implies dx = \frac{du}{2x}$
$\int x\cos(x^2)\,dx = \int x\cos(u)\cdot\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int\cos(u)\,du = \frac{1}{2}\sin(u) + C = \frac{1}{2}\sin(x^2) + C$

e) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$
$u = 1 + x^2 \implies du = 2x\,dx \implies dx = \frac{du}{2x}$
$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}}\cdot\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,du = \frac{1}{2}\cdot 2u^{1/2} + C = \sqrt{1+x^2} + C$

f) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+1}\,dx$
$u = e^{3x} \implies du = 3e^{3x}\,dx \implies dx = \frac{du}{3u}$
$\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+1}\,dx = \int \frac{u}{u+1}\cdot\frac{du}{3u} = \frac{1}{3}\int\frac{1}{u+1}\,du = \frac{1}{3}\ln|u+1| + C = \frac{1}{3}\ln|e^{3x}+1| + C$

g) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx$
$u = \ln(x) \implies du = \frac{1}{x}\,dx$
$\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\ln^2(x)}{2} + C$

h) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$
$u = 1 + x^2 \implies du = 2x\,dx \implies dx = \frac{du}{2x}$
$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int x\sqrt{u}\cdot\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + C$

i) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int e^x\cos(e^x)\,dx$
$u = e^x \implies du = e^x\,dx$
$\int e^x\cos(e^x)\,dx = \int\cos(u)\,du = \sin(u) + C = \sin(e^x) + C$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 16.5: Partielle Integration [OpenAI2024t]

a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x \cdot \cos(x) \cdot \mathrm{d}\,x$
Lösung: Partielle Integration: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$
$u = x$, $dv = \cos(x)\,dx$
$du = dx$, $v = \sin(x)$
$\int x\cos(x)\,dx = x\sin(x) - \int\sin(x)\,dx = x\sin(x) + \cos(x) + C$

b) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int xe^x\,dx$ Setze $u = x$ und $dv = e^x\,dx \implies du = dx$ und $v = e^x$
$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$

c) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x\sin(x)\,dx$ Setze $u = x$ und $dv = \sin(x)\,dx \implies du =$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

dx und $v = -\cos(x)$
$\int x\sin(x)\,dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx = -x\cos(x) + \sin(x) + C$

d) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x\ln(x)\,dx$ Setze $u = \ln(x)$ und $dv = x\,dx \implies du = \frac{1}{x}\,dx$ und $v = \frac{x^2}{2}$
$\int x\ln(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\int x\,dx$
$= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + C$

e) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x^2e^x\,dx$ Setze $u = x^2$ und $dv = e^x\,dx \implies du = 2x\,dx$ und $v = e^x$
$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - \int 2xe^x\,dx$
Wende partielle Integration erneut an:
Setze $u = 2x$ und $dv = e^x\,dx \implies du = 2\,dx$ und $v = e^x$
$\int 2xe^x\,dx = 2xe^x - \int 2e^x\,dx = 2xe^x - 2e^x + C$
$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - (2xe^x - 2e^x) + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$

f) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x\cos(x)\,dx$ Setze $u = x$ und $dv = \cos(x)\,dx \implies du = dx$ und $v = \sin(x)$
$\int x\cos(x)\,dx = x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx = x\sin(x) + \cos(x) + C$

g) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x^3e^x\,dx$ Setze $u = x^3$ und $dv = e^x\,dx \implies du = 3x^2\,dx$ und $v = e^x$
$\int x^3e^x\,dx = x^3e^x - \int 3x^2e^x\,dx$
Wende partielle Integration erneut an:
Setze $u = 3x^2$ und $dv = e^x\,dx \implies du = 6x\,dx$ und $v = e^x$
$\int 3x^2e^x\,dx = 3x^2e^x - \int 6xe^x\,dx$
Wende partielle Integration erneut an:
Setze $u = 6x$ und $dv = e^x\,dx \implies du = 6\,dx$ und $v = e^x$
$\int 6xe^x\,dx = 6xe^x - \int 6e^x\,dx = 6xe^x - 6e^x + C$
$\int 3x^2e^x\,dx = 3x^2e^x - (6xe^x - 6e^x) + C = e^x(3x^2 - 6x + 6) + C$
$\int x^3e^x\,dx = x^3e^x - e^x(3x^2 - 6x + 6) + C = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$

h) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x^2\ln(x)\,dx$ Setze $u = \ln(x)$ und $dv = x^2\,dx \implies du = \frac{1}{x}\,dx$ und $v = \frac{x^3}{3}$
$\int x^2\ln(x)\,dx = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{1}{3}\int x^2\,dx$
$= \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3} + C = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$

i) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int xe^{x^2}\,dx$ Setze $u = e^{x^2}$ und $dv = x\,dx \implies du = 2xe^{x^2}\,dx$ und $v = \frac{x^2}{2}$
$\int xe^{x^2}\,dx = \frac{x^2}{2}e^{x^2} - \int \frac{x^2}{2}\cdot 2e^{x^2}\,dx$
$= \frac{x^2}{2}e^{x^2} - \int x^2e^{x^2}\,dx + C$
Hier können wir partielle Integration nicht mehr anwenden. Stattdessen erkennen wir, dass wir auf die ursprüngliche Funktion zurückkehren, wenn wir erneut partielle Integration anwenden. Daher müssen wir dies aufgeben und die Originalformel erneut anwenden, um die Integration zu lösen.

j) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int \mathrm{e}^{2\cdot x}\sin(x)\cdot \mathrm{d}\,x$
Lösung: Partielle Integration zwei Mal:
$I = \int e^{2x}\sin(x)\,dx$
$u = \sin(x)$, $dv = e^{2x}\,dx$
$du = \cos(x)\,dx$, $v = \frac{e^{2x}}{2}$
$I = \frac{e^{2x}}{2}\sin(x) - \int \frac{e^{2x}}{2}\cos(x)\,dx$
Setze: $J = \int e^{2x}\cos(x)\,dx$
$u = \cos(x)$, $dv = e^{2x}\,dx$
$du = -\sin(x)\,dx$, $v = \frac{e^{2x}}{2}$
$J = \frac{e^{2x}}{2}\cos(x) + \int \frac{e^{2x}}{2}\sin(x)\,dx$
$I - \frac{1}{2}J = \frac{e^{2x}}{2}\sin(x) - \frac{e^{2x}}{2}\cos(x)$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

$I = \frac{e^{2x}}{2}\sin(x) - \frac{e^{2x}}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}I$
$\frac{1}{2}I = \frac{e^{2x}}{2}(\sin(x) - \cos(x))$
$I = e^{2x}(\sin(x) - \cos(x)) + C$

k) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x^2 \cdot \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{d}\,x$
Lösung: Partielle Integration zwei Mal:
$u = x^2$, $dv = e^x\,dx$
$du = 2x\,dx$, $v = e^x$
$\int x^2 e^x\,dx = x^2e^x - \int 2xe^x\,dx$
$u = 2x$, $dv = e^x\,dx$
$du = 2\,dx$, $v = e^x$
$\int 2xe^x\,dx = 2xe^x - \int 2e^x\,dx = 2xe^x - 2e^x + C$
$\int x^2 e^x\,dx = x^2e^x - (2xe^x - 2e^x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 16.6: Diverse Aufgaben zur Integralrechnung

a) $\int_{-10}^{10} x^4 \cdot \mathrm{d}\,x \longrightarrow \quad \left[\frac{1}{5}\cdot x^5\right]_{-10}^{10} = \frac{1}{5}\cdot\left[10^5 - (-10)^5\right] = 4.000$

b) $\int_0^{2\pi} r\cdot\phi\cdot\mathrm{d}\,\phi \longrightarrow \quad \left[\frac{1}{2}r\phi^2\right]_0^{2\pi} = \frac{r}{2}\cdot\left[4\pi^2 - 0\right] = \frac{r}{2}\cdot\left[4\pi^2\right] = 2r\pi^2$ nur Rechenbeispiel

c) $\int_0^r (r^2 - x^2)\cdot\pi\cdot\mathrm{d}\,x \longrightarrow \quad \pi\cdot\left[r^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^r = \pi\cdot\left[r^3 - \frac{1}{3}r^3\right] - 0 = \pi\cdot\frac{2}{3}r^3$ entsprechend dem Volumen der Halbkugel

d) $\int_0^5 a\cdot t\cdot\mathrm{d}\,t \longrightarrow \quad \frac{a}{2}\cdot\left[t^2\right]_0^5 = \frac{a}{2}\cdot[25 - 0] = \frac{25a}{2}$ z. B. in 5 Zeiteinheiten zurückgelegte Strecke bei Beschleunigung a

e) $\int x\cdot\sin(x)\cdot\mathrm{d}\,x \longrightarrow \quad \sin(x) - x\cdot\cos(x) + C$

f) $\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{x\cdot\arccos(\mathrm{e}^x)}\cdot\sin(x)\cdot\mathrm{d}\,y \longrightarrow \quad \mathrm{e}^{x\cdot\arccos(\mathrm{e}^x)}\cdot\sin(x)\cdot\pi$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 16.7: weiteres Training, erzeugt mit [OpenAI2024u]

a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x\,dx$ $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$

b) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x^2\,dx$ $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$

c) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int e^x\,dx$ $\int e^x\,dx = e^x + C$

d) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int \sin(x)\,dx$ $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$

e) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int \cos(x)\,dx$ $\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$

f) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int xe^x\,dx$ Setze $u = x$ und $dv = e^x\,dx \implies du = dx$ und $v = e^x$
$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C = e^x(x - 1) + C$

g) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x\sin(x)\,dx$ Setze $u = x$ und $dv = \sin(x)\,dx \implies du = dx$ und $v = -\cos(x)$
$\int x\sin(x)\,dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx = -x\cos(x) + \sin(x) + C$

h) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x\ln(x)\,dx$ Setze $u = \ln(x)$ und $dv = x\,dx \implies du = \frac{1}{x}\,dx$ und $v = \frac{x^2}{2}$
$\int x\ln(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\int x\,dx$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

$= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + C$

i) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x^2 e^x\,dx$ Setze $u = x^2$ und $dv = e^x\,dx \implies du = 2x\,dx$ und $v = e^x$
$\int x^2 e^x\,dx = x^2e^x - \int 2xe^x\,dx$
Wende partielle Integration erneut an:
Setze $u = 2x$ und $dv = e^x\,dx \implies du = 2\,dx$ und $v = e^x$
$\int 2xe^x\,dx = 2xe^x - \int 2e^x\,dx = 2xe^x - 2e^x + C$
$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - (2xe^x - 2e^x) + C = e^x(x^2 - 2x + 2) +$

j) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x\cos(x)\,dx$ Setze $u = x$ und $dv = \cos(x)\,dx \implies du = dx$ und $v = \sin(x)$
$\int x\cos(x)\,dx = x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx = x\sin(x) + \cos(x) + C$

k) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x^3e^x\,dx$ Setze $u = x^3$ und $dv = e^x\,dx \implies du = 3x^2\,dx$ und $v = e^x$
$\int x^3e^x\,dx = x^3e^x - \int 3x^2e^x\,dx$
Wende partielle Integration erneut an:
Setze $u = 3x^2$ und $dv = e^x\,dx \implies du = 6x\,dx$ und $v = e^x$
$\int 3x^2e^x\,dx = 3x^2e^x - \int 6xe^x\,dx$
Wende partielle Integration erneut an:
Setze $u = 6x$ und $dv = e^x\,dx \implies du = 6\,dx$ und $v = e^x$
$\int 6xe^x\,dx = 6xe^x - \int 6e^x\,dx = 6xe^x - 6e^x + C$
$\int 3x^2e^x\,dx = 3x^2e^x - (6xe^x - 6e^x) + C = e^x(3x^2 - 6x + 6) + C$
$\int x^3e^x\,dx = x^3e^x - e^x(3x^2 - 6x + 6) + C = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$

l) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x^2\ln(x)\,dx$ Setze $u = \ln(x)$ und $dv = x^2\,dx \implies du = \frac{1}{x}\,dx$ und $v = \frac{x^3}{3}$
$\int x^2\ln(x)\,dx = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{1}{3}\int x^2\,dx$
$= \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3} + C = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$

m) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int e^{x^2}\,dx$ Setze $u = x^2 \implies du = 2x\,dx$
$\int e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

n) Berechnen Sie das bestimmte Integral: $\int_0^{\pi/2}\sin^2(x)\,dx$ $\int_0^{\pi/2}\sin^2(x)\,dx = \int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}1\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos(2x)\,dx$
$= \frac{1}{2}[x]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}[\sin(\pi) - \sin(0)] = \frac{\pi}{4}$

o) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int x^3\ln(x)\,dx$ Setze $u = \ln(x)$ und $dv = x^3\,dx \implies du = \frac{1}{x}\,dx$ und $v = \frac{x^4}{4}$
$\int x^3\ln(x)\,dx = \frac{x^4}{4}\ln(x) - \int \frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^4}{4}\ln(x) - \frac{1}{4}\int x^3\,dx$
$= \frac{x^4}{4}\ln(x) - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4} + C = \frac{x^4}{4}\ln(x) - \frac{x^4}{16} + C$

p) Berechnen Sie das bestimmte Integral: $\int_0^1(3x^2 - 2x + 1)\,dx$ $\int_0^1(3x^2 - 2x + 1)\,dx = \left[x^3 - x^2 + x\right]_0^1 = (1^3 - 1^2 + 1) - (0^3 - 0^2 + 0) = 1 - 1 + 1 = 1$

q) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$ $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + C$

r) Berechnen Sie das unbestimmte Integral: $\int xe^{x^2}\,dx$ Setze $u = x^2 \implies du = 2x\,dx$
$\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

s) Berechnen Sie das bestimmte Integral: $\int_0^\pi x\sin(x)\,dx$ Setze $u = x$ und $dv = \sin(x)\,dx \implies du = dx$ und $v = -\cos(x)$
$\int_0^\pi x\sin(x)\,dx = [-x\cos(x)]_0^\pi + \int_0^\pi \cos(x)\,dx$
$= [-x\cos(x)]_0^\pi + [\sin(x)]_0^\pi = [-\pi\cos(\pi) - 0\cos(0)] + [\sin(\pi) - \sin(0)]$
$= -\pi(-1) - 0 + 0 - 0 = \pi$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Kegelschnitt

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 17.1: Kegelschnitte

a) An der Parabel $p : y = 4x^2 + 5$ sollen Tangenten gelegt werden, die zur Geraden $g : 2x + y = 5$ normal verlaufen.
Gesucht werden Geraden h, die parallel zur Normalen von g verlaufen UND die die Parabel berühren.
Bestimmung der Steigung der Geradenschar h:
$g : 2x + y = 5 \Longleftrightarrow y = -2x + 5$ mit Steigung im Kontaktpunkt $a_k = -2$, somit in der Normalen $a_{kn} = -\frac{1}{a_k} = 0,5$
In welchen Punkten hat die Parabel die Steigung a_{kn}?
$p' : y' = 8x$ mit $y' = a_{kn} = 8x \leftrightarrow x = 0,5/8 = 1/16, p(1/16) = 71.$
Die Punktgeradenformel ist $y = m(x-x_1)+y_1$ Damit berührt in $Punkt_t = (x_t = \frac{1}{16}, y_t \approx 5{,}015\,625)$ die Gerade $h(x) = y = a_{kn}(x-x_t)+y_t \approx 0{,}5(x-\frac{1}{16})+5{,}015\,625 = 0{,}5x-\frac{1}{32}+5{,}015\,625 = 0{,}5x+4{,}984\,375$

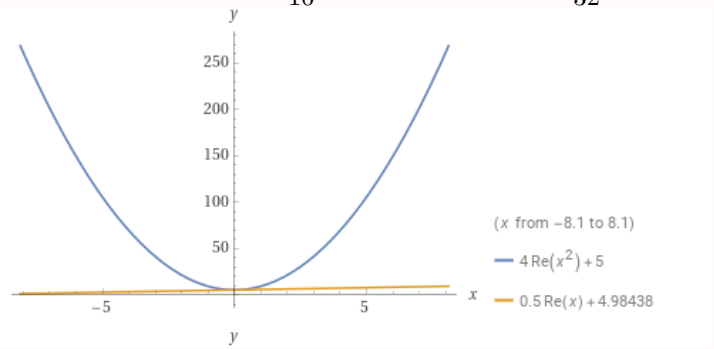


Abbildung B.74.: $p : y = 4x^2 + 5$, $h(x) = 0{,}5x + 4{,}984\,375$

b) Gegeben sind die Ellipse $e : \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$ und die Parabel $p : y = 6x^2$. Haben diese Schnittpunkte?

Schnittpunkte liegen vor, wenn $e = p$, somit mittels Einsetzverfahrens p in e:

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{(6x^2)^2}{6^2} = 1 \leftrightarrow \frac{x^2}{5^2} + x^4 = 1$$

$$\leftrightarrow 5^2x^4 + x^2 - 5^2 = 0.$$

Durch Einsetzen der Mitternachtsformel ergeben sich vier Nullstellen, davon zwei komplex, die wir hier nicht betrachten. Schnittpunkte ergeben sich bei $x = \pm x = -1/5\sqrt{\sqrt{2501}/2 - 1/5}$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

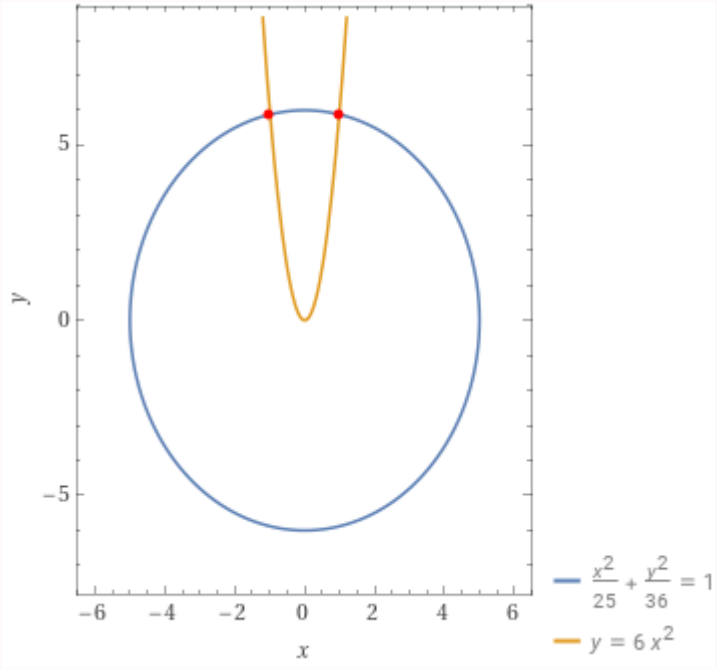


Abbildung B.75.: $e: \dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{6^2}=1$, $p: y=6x^2$

c) Eine Sonde umkreist die Erde auf einer elliptischen Flugbahn $e: 256x^2+625y^2=256\cdot 625$. Sie soll einen Himmelskörper treffen, der sich auf einer Bahn $h: 256x^2-625y^2=256\cdot 625$ befindet. Könnten sich die Objekt treffen?

Abgesehen von Ort und Zeit müssen sich zunächst die Flugbahnen schneiden, $e=h$. Somit
$256x^2+625y^2=256x^2-625y^2 \leftrightarrow 1250y^2=0$
Damit in e oder h: $x^2=625 \leftrightarrow x_{1/2}=\pm 25$ Aus Geometrie- und Symmetriebetrachtungen ergibt sich hierbei auch, dass die Schnittpunkte Tangentialpunkte sind.

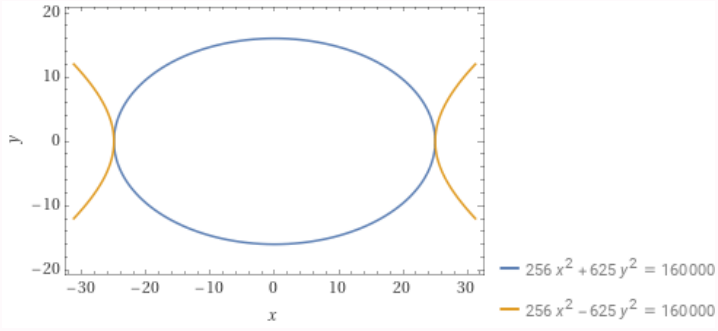


Abbildung B.76.: $e: 256x^2+625y^2=256\cdot 625$, $h: 256x^2-625y^2=256\cdot 625$

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

Lösungsvorschlag zu Übungsaufgabe 17.2: Aufgaben zu Kegelschnitten [OpenAI2024v]

Quelle: [OpenAI2024v]

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel mit dem Scheitelpunkt bei $(0,0)$ und der Öffnung nach oben.

Die Standardform einer Parabel mit dem Scheitelpunkt bei $(0,0)$ und der Öffnung nach oben lautet: $y=ax^2$.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Ellipse mit den Halbachsen $a = 5$ und $b = 3$ und dem Zentrum bei $(0, 0)$.

Die Standardform einer Ellipse mit den Halbachsen a und b lautet: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
Hier ist $a = 5$ und $b = 3$, also lautet die Gleichung: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

c) Bestimmen Sie die Gleichung des Kreises mit dem Radius $r = 4$ und dem Zentrum bei $(0, 0)$.

Die Standardform eines Kreises mit dem Radius r lautet: $x^2 + y^2 = r^2$.
Hier ist $r = 4$, also lautet die Gleichung: $x^2 + y^2 = 16$.

d) Bestimmen Sie die Gleichung der Hyperbel mit den Asymptoten $y = \pm\frac{3}{4}x$ und dem Zentrum bei $(0, 0)$.

Die Standardform einer Hyperbel lautet: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
Die Asymptoten haben die Form $y = \pm\frac{b}{a}x$.
Hier ist $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$, also ist $a = 4$ und $b = 3$.
Daher lautet die Gleichung: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

e) Bestimmen Sie den Brennpunkt und die Gleichung der Parabel mit der Gleichung $y^2 = 8x$.

Die Standardform einer Parabel mit der Öffnung nach rechts lautet: $y^2 = 4ax$.
Hier ist $4a = 8$, also ist $a = 2$.
Der Brennpunkt liegt bei $(a, 0) = (2, 0)$.
Die Gleichung ist: $y^2 = 8x$.

f) Bestimmen Sie die Gleichung der Ellipse mit den Halbachsen $a = 6$ und $b = 2$ und dem Zentrum bei $(1, -3)$.

Die Standardform einer Ellipse mit dem Zentrum bei (h, k) lautet: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.
Hier ist $h = 1$, $k = -3$, $a = 6$ und $b = 2$.
Daher lautet die Gleichung: $\frac{(x-1)^2}{36} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$.

g) Bestimmen Sie die Brennpunkte der Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Die Brennpunkte einer Ellipse liegen bei $(\pm c, 0)$, wobei $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.
Hier ist $a = 5$ und $b = 4$;
$c = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$.
Die Brennpunkte liegen bei $(\pm 3, 0)$.

h) Bestimmen Sie die Gleichung der Hyperbel mit den Brennpunkten bei $(\pm 5, 0)$ und den Scheitelpunkten bei $(\pm 3, 0)$.

Die Standardform einer Hyperbel lautet: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
Die Brennpunkte einer Hyperbel liegen bei $(\pm c, 0)$, wobei $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Hier ist $c = 5$ und $a = 3$:
$5 = \sqrt{9 + b^2} \implies 25 = 9 + b^2 \implies b^2 = 16 \implies b = 4$
Daher lautet die Gleichung: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

i) Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel mit dem Scheitelpunkt bei $(2, -1)$ und der Öffnung nach rechts.

Die Standardform einer Parabel mit dem Scheitelpunkt bei (h, k) und der Öffnung nach rechts lautet:

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

$(y-k)^2 = 4a(x-h)$.
Hier ist $h = 2,\ k = -1$ und $a = 1$.
Daher lautet die Gleichung: $(y+1)^2 = 4(x-2)$.

j) Bestimmen Sie die Gleichung der Ellipse mit den Halbachsen $a = 7$ und $b = 4$ und dem Zentrum bei $(2, -2)$. Bestimmen Sie auch die Brennpunkte.

Die Standardform einer Ellipse mit dem Zentrum bei (h, k) lautet: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$.
Hier ist $h = 2,\ k = -2,\ a = 7$ und $b = 4$.
Daher lautet die Gleichung: $\frac{(x-2)^2}{49} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$.
Die Brennpunkte einer Ellipse liegen bei $(h \pm c, k)$, wobei $c = \sqrt{a^2 - b^2}$:
$c = \sqrt{49 - 16} = \sqrt{33}$
Die Brennpunkte liegen bei $\left(2 \pm \sqrt{33}, -2\right)$.

Hier geht es zurück zur Aufgabe.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

C. Lösungsvorschläge zu den Übungsaufgaben (erste Teilaufgaben)

a) $\log_{10} 10 = 1$

a) $T_1 - T_2 + T_3 = \underbrace{(2+7)}_{T_1} - \underbrace{(4 \cdot x - 1)}_{T_2} + \underbrace{(8 \cdot y + 5)}_{T_3} = 9 - 4x + 1 + 8y + 5 = \boxed{-4x + 8y + 15}$

a) $9 = 9 \cdot 10^0$

$= \quad 9 \cdot 10^0 \qquad \frac{9}{9}$

a) $0 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 = 8$

a) $7 \div 2 = 3$ Rest 1

a) $(8)_{10} = (?)_2$
$8 \div 2 = 4$ Rest 0
$4 \div 2 = 2$ Rest 0
$2 \div 2 = 1$ Rest 0
$1 \div 2 = 0$ Rest 1
$\Rightarrow (8)_{10} = (1000)_2$

a) $(8)_{10} = (?)_3$
$8 \div 3 = 2$ Rest 2
$2 \div 3 = 0$ Rest 2
$\Rightarrow (8)_{10} = (22)_3$

a) $(8)_{10} = (?)_5$
$8 \div 5 = 1$ Rest 3
$1 \div 5 = 0$ Rest 1
$\Rightarrow (8)_{10} = (13)_5$

a) $(8)_{10} = (?)_8$
$8 \div 8 = 1$ Rest 0
$1 \div 8 = 0$ Rest 1
$\Rightarrow (8)_{10} = (10)_8$

a) $(8)_{10} = (?)_{16}$
$8 \div 16 = 0$ Rest 8
$\Rightarrow (8)_{10} = (8)_{16}$

a) $(1001)_2 = (?)_{10}$
$1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = (9)_{10}$

a) $(21)_3 = (?)_{10}$
$2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = (7)_{10}$

a) $(14)_5 = (?)_{10}$
$1 \cdot 5 + 4 \cdot 1 = (9)_{10}$

a) $(57)_8 = (?)_{10}$
$5 \cdot 8 + 7 \cdot 1 = (47)_{10}$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

a) $(1A)_{16} = (?)_{10}$
$1 \cdot 16 + 10 \cdot 1 = (26)_{10}$

a) $(1001)_2 = (?)_8 = (?)_{16}$
$001 \mid 001 \;\rightarrow\; (11)_8 \qquad 1001 \;\rightarrow\; (9)_{16}$

a) $(27)_8 = (?)_{16}$
$(27)_8 = (010.111)_2 = (01.0111)_2 = (17)_{16}$

a) $(1101)_2 = (?)_{10}$
$((1 \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1 = (13)_{10}$

a) $b = 2 \quad n = 7$
$(111.1111)_2 = 2^7 - 1 = 127$

a) $100.101 + 111.010 = 1.011.111$

a) $01.210 + 111 = 2.021$

a) $101 \cdot 10 = 1.010$

a) $102 \cdot 21 = 2.212$

a) $42 \cdot 23 = 2.121$

a) $206 \cdot 31 = 6.426$

a) $37 \cdot \mathrm{E} = 302$

a) $\frac{1}{12} + \frac{3}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \boxed{2}$

a) In einer Urne befinden sich 3 rote und 2 blaue Kugeln. Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine Kugel zufällig zu ziehen?

Es gibt insgesamt 5 Kugeln, also 5 Möglichkeiten, eine Kugel zu ziehen.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0° \\ 0° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 4 \\ 2x - y + 3z &= 9 \\ x + y + z &= 6 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 = Z_3 - Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 = Z_1 \cdot (-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -4 & -2 & -8 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2 = Z_2 + Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -4 & -2 & -8 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2 \leftrightarrow Z_3]{Z_1 = Z_1 \div (-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2 = Z_2 \cdot (-5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & -10 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 = Z_3 + Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array}\right)$$

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Das gaußsche Eliminationsverfahren endet mit einer oberen Dreiecksmatrix.
Wir können sofort ablesen: $z = -9$; die zweite Zeile ergibt $y = -2$.
Eingesetzt in die erste Zeile (Gleichung) erhält man $x = 17$ und mithin die Lösung:

$$\boxed{x = 17, y = -2, z = -9}$$

a) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 4 \\ 2x - y + 3z &= 9 \\ x + y + z &= 6 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 = Z_3 - Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 = Z_1 \cdot (-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -4 & -2 & -8 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2 = Z_2 + Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -4 & -2 & -8 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2 \leftrightarrow Z_3]{Z_1 = Z_1 \div (-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2 = Z_2 \cdot (-5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & -10 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 = Z_3 + Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_2 = Z_2 \div (5)]{Z_1 = Z_1 - Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 = Z_1 - 2 \cdot Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array}\right)$$

$$\boxed{x = 17, y = -2, z = -9}$$

a) Berechnen Sie die Steigung der Funktion $f(x) = 42$ im Punkt $x_0 = 5$. $\rightarrow$
$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; f'(42) = 0$.

d) Berechnen Sie die Steigung der Funktion $f(x) = 3 \cdot \sqrt{x}$ im Punkt $x_0 = 1 \;\rightarrow$
$f'(x) = \left(3 \cdot x^{1/2}\right)' = 3 \cdot 1/2 \cdot x^{-1/2} = 3/2 \cdot \sqrt{x} \;\Rightarrow\; f'(1) = 3/2$.

f) Berechnen Sie die Steigung der Funktion $f(x) = 10^x$ im Punkt $x_0 = 3$. $\rightarrow$
$f'(x) = 10^x \cdot \ln(10) \;\Rightarrow\; f'(3) \approx 2.302{,}585$.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

D. Quellen

Quellenangaben für die Aufgaben (nach Aufgaben aufgelistet):

Öfters verwendete Quellen:

[Ross23] Ross, Matthias: Einführung Mathematik. Skriptum an der FOM-Hochschule. Essen, 2023.

[Sche21] Scheitler, Gerhard: Übungsaufgaben Ingenieurmathematik 1 Version 3.5 (WiSe 2021/22). Skriptum an der FOM-Hochschule. Essen, 2021.[**Scheitler2021**]

Weiterführende Literatur, zum Selbststudium:

Alle Links wurden zuletzt am 19. Juli 2023 geprüft.

https://www-user.tu-chemnitz.de/~rhaf/Aufgabensammlung/Sammlung/Aufgabensammlung.pdf

https://sos-mathe.ch/

http://www.carsten-erdmann.de/lehre.html

https://online.uni-graz.at/kfu_online/LV_TX.wbDisplaySemplanDoc?pStpSplDsNr=23617

=== To be continued ===

Erläuterung **1.1:** Vgl. [[**Ross23**]] S. 10
Übungsaufgabe **1.11:** https://chat.openai.com/; Abruf 2023-06-09
Übungsaufgabe **1.14:** https://chat.openai.com/; Abruf 2023-06-10

Übungsaufgabe **1.15:** Vgl. [[**Ross23**]] S. 11 und https://chat.openai.com/ Abruf 2023-06-10
eigene Berechnungen
Übungsaufgabe **1.23:** http://www.vorwerg-net.de/Mathematik/1.Algebra/1.7.A.Logarithmen.pdf; Abruf 2023-05-18
Übungsaufgabe **1.24:** http://www.vorwerg-net.de/Mathematik/1.Algebra/1.7.A.Logarithmen.pdf; Abruf 18-MAI-2023
Übungsaufgabe **1.25:** a) … f): https://mathe.aufgabenfuchs.de/potenz/logarithmus.shtml; Abruf 18-MAI-2023
Übungsaufgabe **1.25:** g) … p): http://www.vorwerg-net.de/Mathematik/1.Algebra/1.7.A.Logarithmen.pdf; Abruf 18-MAI-2023
Übungsaufgabe **1.28:** nach [**OpenAI2024e**]
Übungsaufgabe **2.10:** http://www.namzu.de/skripte/logik/Tautologie.html; Abruf 07-MAI-2023
Übungsaufgabe **2.12:** https://homepages.thm.de/~hg8070/dm15/ueb01.pdf; Abruf 07-MAI-2023.
Übungsaufgabe **2.13:** a) ... e) OpenAI ChatGPT
Übungsaufgabe **2.14:** a) ... e) OpenAI ChatGPT; f) ... h) vgl. [[**MERZ21**]] S. 15f.
Übungsaufgabe **2.17:** https://de.wikibooks.org/wiki/Aufgabensammlung_Mathematik:_Summe_%C3%BCber_ungerade_Zahlen; Abruf 25-OKT-2021
Übungsaufgabe **2.18:** https://de.wikibooks.org/wiki/Aufgabensammlung_Mathematik:_Summe_%C3%BCber_Quadratzahlen; Abruf 25-OKT-2021
Übungsaufgabe **2.19:** https://de.wikibooks.org/wiki/Aufgabensammlung_Mathematik:_Summe_%C3%BCber_Kubikzahlen; Abruf 20-OKT-2021
Übungsaufgabe **2.20:** https://de.wikibooks.org/wiki/Aufgabensammlung_Mathematik:_Beweis_einer_Identit%C3%A4t; Abruf 25-OKT-2021 Übungsaufgabe **2.21:** https://de.wikibooks.org/wiki/Aufgabensammlung_Mathematik:_Teilbarkeit_durch_5; Abruf 25-OKT-2021
Übungsaufgabe **2.22:** https://www.emath.de/Referate/induktion-aufgaben-loesungen.pdf; Nr. B 14; Abruf 20-OKT-2021
Übungsaufgabe **2.23:** http://www.carsten-erdmann.de/files/Analysis_1_1_Uebungsskript.pdf; Nr. 4.7

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

(Seite 54); Abruf 27-OKT-2021
Übungsaufgabe **2.24:** https://www.emath.de/Referate/induktion-aufgaben-loesungen.pdf; Nr. C2; Abruf 25-OKT-2021.
Übungsaufgabe **2.25:** https://www.emath.de/Referate/induktion-aufgaben-loesungen.pdf Nr. D 17; Abruf 20-OKT-2021.
Übungsaufgabe **2.26:** https://www.emath.de/Referate/induktion-aufgaben-loesungen.pdf; Nr. D 14; Abruf 20-OKT-2021
Übungsaufgabe **2.28:** https://www.emath.de/Referate/induktion-aufgaben-loesungen.pdf; Nr. G 9; Abruf 20-OKT-2021
Übungsaufgabe **2.29:** https://www.emath.de/Referate/induktion-aufgaben-loesungen.pdf; Nr. G 11; Abruf 20-OKT-2021
Übungsaufgabe **4.4:** [Sche21] Nr. 2 3).
Übungsaufgabe **4.5:** [Sche21] Nr. 2 4).
Übungsaufgabe **4.6:** [Sche21] Nr. 2 5).
Übungsaufgabe **4.7:** [Sche21] Nr. 2 6).
Übungsaufgabe **4.8:** [Sche21] Nr. 2 7).
Übungsaufgabe **5.3:** [Sche21] Nr. 2 1).
Übungsaufgabe **5.3:** Aufgaben 2-6 aus [**OpenAI2024aa**]
Übungsaufgabe **6.1:** Rolf B. Drescher, 19. Oktober 2023
Übungsaufgabe **6.2:** Rolf B. Drescher, 19. Oktober 2023
Übungsaufgabe **6.3:** Rolf B. Drescher, 20. Oktober 2023
Übungsaufgabe **6.4:** Rolf B. Drescher, 19. Oktober 2023
Übungsaufgabe **6.5:** Rolf B. Drescher, 19. Oktober 2023
Übungsaufgabe **6.6:** Rolf B. Drescher, 19. Oktober 2023
Übungsaufgabe **6.7:** Rolf B. Drescher, 19. Oktober 2023
Übungsaufgabe **6.8:** Rolf B. Drescher, 19. Oktober 2023
Übungsaufgabe **6.9:** Rolf B. Drescher, 20. Oktober 2023
Übungsaufgabe **6.10:** Rolf B. Drescher, 21. Oktober 2023
Übungsaufgabe **6.11:** Rolf B. Drescher, 21. Oktober 2023
Übungsaufgabe **6.12:** Rolf B. Drescher, 21. Oktober 2023
Übungsaufgabe **6.13:** Rolf B. Drescher, 21. Oktober 2023
Übungsaufgabe **6.14:** Rolf B. Drescher, 22. Oktober 2023
Übungsaufgabe **6.15:** Rolf B. Drescher, 25. Oktober 2023
Übungsaufgabe **6.16:** Rolf B. Drescher, 28. Oktober 2023
Übungsaufgabe **6.17:** Rolf B. Drescher, 19. Oktober 2023
Übungsaufgabe **6.19:** Rolf B. Drescher, 28. Oktober 2023
Übungsaufgabe **6.20:** Rolf B. Drescher, 31. Oktober 2023
Übungsaufgabe **6.21:** Rolf B. Drescher, 09. November 2023
Übungsaufgabe **6.22:** Rolf B. Drescher, 09. November 2023
Übungsaufgabe **6.23:** Rolf B. Drescher, 09. November 2023
Übungsaufgabe **6.24:** Rolf B. Drescher, 09. November 2023
Übungsaufgabe **6.25:** Rolf B. Drescher, 09. November 2023
Beispiel **8.2:** http://groolfs.de/Verschiedenespdf/Kettenbruch.pdf; Abruf 2024-08-28
Übungsaufgabe **8.17:** http://groolfs.de/Verschiedenespdf/Kettenbruch.pdf; Abruf 2024-08-28
Übungsaufgabe **8.21:** Die nachfolgenden 10 Aufgaben, Lösungen und der Latex-Code wurden mit ChatGPT erstellt.
Übungsaufgabe **8.25:** http://www.vorwerg-net.de/Mathematik/1.Algebra/1.7.A.Logarithmen.pdf; Abruf 18-MAI-2023

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Übungsaufgabe **8.27:** https://de.serlo.org/mathe/26262/aufgaben-zu-exponential-und-logarithmusgleichungen; Abruf 2024-08-28
Übungsaufgabe **8.29:** https://studyflix.de/mathematik/partialbruchzerlegung-1499
Übungsaufgabe **8.29:** Quelle für Abbildung: https://www.studienkreis.de/mathematik/permutation-variation-kombination/; Abruf 19-JUL-2023

Übungsaufgabe **8.29:** Quelle für Text: https://de.wikipedia.org/wiki/Permutation; Abruf 19-JUL-2023

Übungsaufgabe **8.29:** Quelle für Text: https://de.wikipedia.org/wiki/Kombination_(Kombinatorik); Abruf 19-JUL-2023

Übungsaufgabe **8.29:** Quelle für Text: https://de.wikipedia.org/wiki/Variation_(Kombinatorik); Abruf 19-JUL-2023

Übungsaufgabe **8.30:** [**OpenAI2024ac**]

Übungsaufgabe **8.31:** https://www.studienkreis.de/mathematik/permutation-variation-kombination/
Übungsaufgabe **8.31:** Quelle: https://sos-mathe.ch/s/s1/s12/aufg_s12.html Übungsaufgabe **9.2:** [Sche21] Nr. 2 2).
Übungsaufgabe **10.2:** http://www.mathe-trainer.de/Klasse9/Strahlensaetze/Block1/Aufgaben.htm
Übungsaufgabe **10.2:** https://sos-mathe.ch/pdfg/g44_23.pdf Übungsaufgabe **10.2:** https://sos-mathe.ch/ Übungsaufgabe **10.4:** https://de.serlo.org/mathe/30680/aufgaben-zum-sinus-kosinus-und-tangens-im-rechtwinkligen-dreieck
Übungsaufgabe **10.4:** https://de.serlo.org/mathe/30680/aufgaben-zum-sinus-kosinus-und-tangens-im-rechtwinkligen-dreieck
Übungsaufgabe **10.7:** http://wiki.math.se/wikis/2009/bridgecourse1-TU-Berlin/index.php/4.4_Trigonometrische_Gleichungen Beispiel 4; Abruf 2023-06-14
Übungsaufgabe **10.7:** http://wiki.math.se/wikis/2009/bridgecourse1-TU-Berlin/index.php/4.4_Trigonometrische_Gleichungen Beispiel 5; Abruf 2023-06-14
Übungsaufgabe **10.7:** http://wiki.math.se/wikis/2009/bridgecourse1-TU-Berlin/index.php/4.4_Trigonometrische_Gleichungen Beispiel 6; Abruf 2023-06-14
Übungsaufgabe **10.7:** http://wiki.math.se/wikis/2009/bridgecourse1-TU-Berlin/index.php/4.4_Trigonometrische_Gleichungen Beispiel 7; Abruf 2023-06-14
Übungsaufgabe **10.8:** http://wiki.math.se/wikis/2009/bridgecourse1-TU-Berlin/index.php/4.4_%C3%9Cbungen

Übungsaufgabe **11.1:** https://de.wikipedia.org/wiki/Polarkoordinaten
Übungsaufgabe **11.3:** https://mathepedia.de/Zylinderkoordinaten.html
Übungsaufgabe **11.4:** https://de.wikipedia.org/wiki/Kugelkoordinaten
Übungsaufgabe **11.7:** ChatGPT: bitte latexcode: 10 aufgaben mit lösungen zum erkennen spezieller matrizen, wie bsp. symmetrische, antisymmetrische, einheits-, hermitesche usw. Übungsaufgabe **12.4:** **https://sos-mathe.ch
Übungsaufgabe **12.4:** **https://sos-mathe.ch
Übungsaufgabe **12.4:** **https://sos-mathe.ch
Übungsaufgabe **13.4:** http://www.mathods.com/mathe.php?con=Analysis&can=Folgen&cun=Beschr%E4nktheit; Abruf 2024-09-01.
Übungsaufgabe **13.4:** http://www.mathods.com/mathe.php?con=Analysis&can=Folgen&cun=Beschr%E4nktheit; Abruf 2024-09-01.
Übungsaufgabe **13.4:** http://www.mathods.com/mathe.php?con=Analysis&can=Folgen&cun=Beschr%E4nktheit; Abruf 2024-09-01.
Übungsaufgabe **13.4:** http://www.mathods.com/mathe.php?con=Analysis&can=Folgen&cun=Beschr%E4nktheit; Abruf 2024-09-01.
Übungsaufgabe **14.8:** Herleitung $y = x^2$ polar https://socratic.org/questions/how-do-you-convert-y-x-2-into-polar-form
Beispiel **15.1:** https://www.max-academy.de/contentPool/5dfa7d81c4ae3e00079a2347; **Abruf 2024-08-29**.
Übungsaufgabe **15.1:** b) ... g) https://www.max-academy.de/contentPool/5dfa7d81c4ae3e00079a2347; **Abruf 2024-08-29**
Übungsaufgabe **15.4:** Vgl. [[**Ross23**]] S. 368ff.

Übungsaufgabe **15.6:** Vgl. [[**Ross23**]] S. 383ff.

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

Erläuterung **16.1:** Vgl. [[**Ross23**]], S. 511.

Beispiel **16.1:** Vgl. [[**Ross23**]], S. 511.

Erläuterung **16.3:** Vgl. [[**Ross23**]], S. 513f.

Beispiel **16.3:** [[**Ross23**]], S. 515.

Übungsaufgabe **16.2:** Vgl. [[**Ross23**]], S. 516ff., Übungsaufgaben 300 ... 303.

Übungsaufgabe **17.0:** https://de.wikipedia.org/wiki/Kegelschnitt
Übungsaufgabe **17.2:** [**OpenAI2024v**]
Übungsaufgabe **B.0:** Quelle: https://sos-mathe.ch/s/s1/s12/aufg_s12.html Übungsaufgabe **B.0:** [Sche21] Nr. 2 2).
Übungsaufgabe **B.0:** https://de.serlo.org/mathe/30680/aufgaben-zum-sinus-kosinus-und-tangens-im-rechtwinkligen-dreieck
Übungsaufgabe **B.0:** **https://sos-mathe.ch
Übungsaufgabe **B.0:** **https://sos-mathe.ch
Übungsaufgabe **B.0:** **https://sos-mathe.ch
Übungsaufgabe **B.0:** http://www.mathods.com/mathe.php?con=Analysis&can=Folgen&cun=Beschr%E4nktheit; Abruf 2024-09-01.
Übungsaufgabe **B.0:** http://www.mathods.com/mathe.php?con=Analysis&can=Folgen&cun=Beschr%E4nktheit; Abruf 2024-09-01.
Übungsaufgabe **B.0:** http://www.mathods.com/mathe.php?con=Analysis&can=Folgen&cun=Beschr%E4nktheit; Abruf 2024-09-01.
Übungsaufgabe **B.0:** http://www.mathods.com/mathe.php?con=Analysis&can=Folgen&cun=Beschr%E4nktheit; Abruf 2024-09-01.
Übungsaufgabe **B.0:** Herleitung $y = x^2$ polar https://socratic.org/questions/how-do-you-convert-y-x-2-into-polar-form

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

E. Erläuterungsverzeichnis

0.1	Lehrinhalte	iii
0.1	Künstliche Intelligenz	v
1.1	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	3
1.2	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	4
1.3	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	5
1.4	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	7
1.5	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	8
1.6	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	10
1.7	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	11
1.8	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	13
1.9	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	13
1.10	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	14
1.11	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	15
1.12	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	17
1.13	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	20
1.14	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	23
1.15	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	23
1.16	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	25
2.1	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	27
2.2	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	29
2.3	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	31
2.4	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	32
2.5	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	34
2.6	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	36
2.7	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	36
2.8	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	37
3.1	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	45
3.2	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	47
4.1	Grundlegendes zu Zahlenbereichen	50
4.2	Begriffe	51
5.1	Grundlegendes zu Wandlungen zwischen den Zahlenbereichen	54
6.1	Unser gewohntes Zehnersystem	56
6.2	Ganzzahl-Division mit Rest	58

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

6.3	Andere Zahlensysteme – Umwandlung vom Zehnersystem	60
6.4	Wandlung zum Zehnersystem	62
6.5	Wandlung vom Dual- in das Oktal- und Hexadezimalsystem	64
6.6	Wandlung vom Oktal- und Hexadezimalsystem in die „anderen Informatikersysteme“	64
6.7	Zahlenwandlung mit dem Horner-Schema	66
6.8	Bereichsgrenzen durch beschränkte Stellenzahl	67
6.9	Addition im Zehnersystem	69
6.10	Subtraktion im Zehnersystem	70
6.11	Schriftliches Multiplizieren im Zehnersystem	74
6.12	Schriftliches Multiplizieren in beliebigen Zahlensystemen	74
7.1	Komplexe Zahlen	77
7.2	Grundrechenarten mit komplexen Zahlen	78
8.1	Allgemeines zu Gleichungen	80
8.2	Rechenregeln für lineare Gleichungen	80
8.3	Der Summenoperator (Summenzeichen)	82
8.4	Einfache Rechenregeln zum Summenoperator	82
8.5	Regeln für Summengrenzen	83
8.6	Umindizierung	83
8.7	Doppelsummen	84
8.8	Der Produktoperator (Produktzeichen)	86
8.9	Die Fakultät	87
8.10	Binomische Formeln	87
8.11	Binomischer Lehrsatz	88
8.12	Quadratische Gleichungen	90
8.13	Bruchrechnung	91
8.14	Grundlegendes zur Umwandlung Dezimalbruch → gemeiner Bruch und v. v.	93
8.15	Kettenbrüche	94
8.16	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	96
8.17	Prozentrechnung	97
8.18	Rechenregeln für Gleichungen mit Hochzahlen	99
8.19	Logarithmus	100
8.20	Potenzen und Wurzeln	101
8.21	Polynomdivision	105
8.22	Partialbruchzerlegung	106
8.23	Kombinatorik	107
9.1	Lineare Ungleichungen	110
10.1	Winkel	113

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

10.2	Strahlensätze	114
10.3	Die Winkelfunktionen	117
10.4	Einige häufig benötigte trigonometrische Werte	118
10.5	Arcusfunktionen	120
10.6	Goniometrische Gleichungen	122
11.1	Lineare Algebra	127
11.2	Kurzfassung Vektoren vs. Skalare [**OpenAI2024ad**]	127
11.3	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	129
11.4	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	130
11.5	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	132
11.6	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	132
11.7	Matrizen	135
11.8	Geradengleichung	137
12.1	Lineare Gleichungssysteme	143
12.2	LGS: 1. Das Einsetzungsverfahren	143
12.3	LGS: 2. Das Gleichsetzungsverfahren	144
12.4	LGS: 3. Das Additionsverfahren	145
12.5	Das Gaußsche Eliminationsverfahren	146
13.1	Zahlenfolgen	151
13.2	Eigenschaften von Folgen	152
13.3	Monotonie	153
13.4	Konvergenz und Divergenz	153
13.5	Häufungspunkte	154
14.1	Kurvendiskussion	156
14.2	Polarkoordinaten	158
14.3	Funktionen in Polarkoordinaten	158
15.1	Erste Ableitung einer Funktion	160
15.2	Rechenregeln der Differentialrechnung: Linearität: Summenregel; Produktregel	162
15.3	Rechenregeln der Differentialrechnung: Quotienten- und Reziprokenregel	163
15.4	Rechenregeln der Differentialrechnung: Kettenregel	164
16.1	Grundsätzliches zur Integralrechnung	167
16.2	Unbestimmte Integrale der Elementarfunktionen, Rechenregeln	167
16.3	Das bestimmte Integral	168
16.4	Integration nach Substitution	169
16.5	Partielles Integrieren	171
17.1	Bedeutung der Kegelschnitte	174
17.2	Darstellung der Kegelschnitte	174

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

F. Beispielsverzeichnis

0.1	Beispiel	iii
2.1	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	36
2.2	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	37
2.3	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	38
2.4	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	39
2.5	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	40
6.1	Unser gewohntes Zehnersystem	56
6.2	Ganzzahl-Division mit Rest	58
6.3	Wandlung in das Fünfer-System	60
6.4	Wandlung zum Zehnersystem	62
6.5	Wandlung vom Dual- in das Oktal- und Hexadezimalsystem	64
6.6	Wandlung vom Oktal- und Hexadezimalsystem in die „anderen Informatikersysteme“	64
6.7	Zahlenwandlung mit dem Horner-Schema	66
6.8	Addition im Zweiersystem	69
6.9	Addition im Fünfersystem	69
6.10	Multiplikation im Fünfersystem	74
8.1	Herleitung der Lösung der quadratischen Gleichung	90
8.2	Irrationale Zahlen als unendliche Kettenbrüche	94
8.3	Logarithmus	100
8.4	Logarithmengleichungen im $\mathbb{R}$	103
8.5	Logarithmengleichungen im $\mathbb{R}$	103
8.6	Polynomdivision	105
8.7	Polynomdivision mit Rest	105
9.1	Einfache Beispiele von Ungleichungen	110
9.2	Ungleichungen mit Fallunterscheidung	110
10.1	Alltägliche Anwendung	116
10.2	Goniometrische Gleichungen (1)	122
10.3	Goniometrische Gleichungen (2)	122
10.4	Goniometrische Gleichungen (3)	122
10.5	Goniometrische Gleichungen (4)	122
11.1	Zwei-Punkte-Form	137
11.2	Schnittpunkt zweier Geraden	138

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

12.1	LGS: 1. Das Einsetzungsverfahren (1)	143
12.2	LGS: 1. Das Einsetzungsverfahren (2)	143
12.3	LGS: 2. Das Gleichsetzungsverfahren (1)	144
12.4	LGS: 3. Das Additionsverfahren (1)	145
12.5	Gaußsches Eliminationsverfahren	147
13.1	Explizit angegebenes Folgen-Bildungsgesetz	151
13.2	Rekursiv angegebenes Folgen-Bildungsgesetz	151
13.3	Beschränktheit	153
13.4	Konvergenz und Divergenz	154
13.5	Häufungspunkte	154
15.1	Stetigkeit	160
15.2	Erste Ableitung einer Funktion	161
15.3	Rechenregeln der Differentialrechnung: Linearität: Summenregel; Produktregel	162
15.4	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	164
15.5	Rechenregeln der Differentialrechnung: Kettenregel	165
16.1	Grundsätzliches zur Integralrechnung	167
16.2	Unbestimmte Integrale der Elementarfunktionen, Rechenregeln	167
16.3	Bestimmte Integrale	168
16.4	Beispiele: Integration nach Substitution	170
16.5	Beispiele: Partielle Integration	171

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

G. Übungsverzeichnis

0.1	Übungsaufgaben	iii
1.1	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	3
1.2	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	3
1.3	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	4
1.4	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	5
1.5	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	6
1.6	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	7
1.7	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	7
1.8	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	8
1.9	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	8
1.10	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	9
1.11	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	9
1.12	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	10
1.13	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	10
1.14	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	11
1.15	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	12
1.16	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	13
1.17	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	14
1.18	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	14
1.19	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	15
1.20	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	16
1.21	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	16
1.22	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	18
1.23	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	19
1.24	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	19
1.25	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	19
1.26	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	20
1.27	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	21
1.28	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	21
1.29	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	23
1.30	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	23
1.31	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	24
1.32	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	25

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

1.33	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	25
2.1	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	27
2.2	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	27
2.3	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	28
2.4	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	28
2.5	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	29
2.6	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	30
2.7	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	30
2.8	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	31
2.9	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	32
2.10	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	32
2.11	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	32
2.12	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	32
2.13	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	34
2.14	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	34
2.15	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	36
2.16	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	37
2.17	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	41
2.18	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	41
2.19	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	41
2.20	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	41
2.21	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	42
2.22	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	42
2.23	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	42
2.24	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	42
2.25	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	42
2.26	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	42
2.27	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	42
2.28	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	43
2.29	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	43
3.1	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	45
3.2	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	46
3.3	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	46
3.4	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	46
3.5	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	46
3.6	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	47
3.7	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	47
3.8	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	48

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

4.1	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	50
4.2	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	51
4.3	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	52
4.4	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	52
4.5	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	52
4.6	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	53
4.7	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	53
4.8	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	53
5.1	Zahlenbereichsübergänge (1)	54
5.2	Betragsfunktion [**OpenAI2024g**]	54
5.3	Betragsfunktion	55
6.1	Unser gewohntes Zehnersystem	57
6.2	Unser gewohntes Zehnersystem	57
6.3	Ganzzahl-Division mit Rest	58
6.4	Wandlung Zehner- in Zweier-System	60
6.5	Wandlung Zehner- in Dreier-System	60
6.6	Wandlung Zehner- in Fünfer-System	61
6.7	Wandlung Zehner- in Achter-System	61
6.8	Wandlung Zehner- in Sechzehner-System	61
6.9	Wandlung Zweier- zum Zehnersystem	62
6.10	Wandlung Dreier- zum Zehnersystem	62
6.11	Wandlung Fünfer- zum Zehnersystem	63
6.12	Wandlung Oktal- zum Zehnersystem	63
6.13	Wandlung Hexadezimal- zum Zehnersystem	63
6.14	Wandlung vom Dual- in das Oktal- und Hexadezimalsystem	64
6.15	Wandlung vom Oktal- und Hexadezimalsystem in die „anderen Informatikersysteme“	65
6.16	Zahlenwandlung mit dem Horner-Schema	66
6.17	Bereichsgrenzen durch beschränkte Stellenzahl	67
6.18	Bereichsgrenzen durch beschränkte Stellenzahl	68
6.19	Addition im Zweiersystem	69
6.20	Addition in verschiedenen Zahlensystemen	69
6.21	Multiplikation im Zweiersystem	74
6.22	Multiplikation im Dreiersystem	74
6.23	Multiplikation im Fünfersystem	75
6.24	Multiplikation im Oktalsystem	75
6.25	Multiplikation im Hexadezimalsystem	75
7.1	Grundlegendes	78

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

7.2	Grundrechenarten mit komplexen Zahlen	78
7.3	Komplex etwas komplexer [**OpenAI2024h**]	79
8.1	Lineare Gleichungen	81
8.2	Summenoperator (1)	82
8.3	Summenoperator (2)	83
8.4	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	84
8.5	Mehrfachsummen	85
8.6	Einfache Aufgaben zu Produktoperatoren [**OpenAI2024ab**]	86
8.7	Fakultäten	87
8.8	Aufgaben zum Kopfrechnen	87
8.9	Binomische Formeln	88
8.10	Binomischer Lehrsatz	89
8.11	Quadratische Gleichungen	90
8.12	Bruchrechnung (1)	91
8.13	Bruchrechnung (2)	91
8.14	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	92
8.15	Umwandlung Bruch in Dezimalbruch [**OpenAI2024i**]	93
8.16	Umwandlung Dezimalbruch in Bruch	93
8.17	Kettenbrüche	95
8.18	Längere Kettenbrüche [**OpenAI2024j**]	95
8.19	In Kettenbruch entwickeln [**OpenAI2024k**]	96
8.20	Dreisatz und Verhältnisrechnung	97
8.21	Prozentrechnung	98
8.22	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	99
8.23	Potenzen und Wurzeln (1)	101
8.24	Potenzen und Wurzeln (2)	101
8.25	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	102
8.26	Logarithmus	102
8.27	Logarithmengleichungen im Körper der reellen Zahlen	104
8.28	Polynomdivision	106
8.29	Partialbruchzerlegung	106
8.30	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	107
8.31	Kombinatorik	108
9.1	Einfache Ungleichungen	110
9.2	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	111
9.3	weitere Ungleichungen für Liebhaber [**OpenAI2024z**]	111
9.4	weitere Ungleichungen mit Fallunterscheidung [**OpenAI2024c**]	112
10.1	Umrechnung verschiedener Winkelmaße	113

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

10.2	Strahlensatz	114
10.3	Aufgaben für den Taschenrechner	118
10.4	Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck	119
10.5	Arcusfunktionen	120
10.6	Kopfübungen mit Arcus[**OpenAI2024m**]	120
10.7	Textaufgaben Arcusfunktionen [**OpenAI2024l**]	121
10.8	Goniometrische Gleichungen	125
10.9	Sinussatz [**OpenAI2024w**]	125
10.10	Goniometrische Aufgaben [**OpenAI2024y**]	126
11.1	Einfache Vektorrechnung	128
11.2	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	131
11.3	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	131
11.4	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	132
11.5	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	133
11.6	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	134
11.7	Spezielle Matrizen	135
11.8	Allgemeines zu Matrizen (2)	136
11.9	Einfache Matrizenoperationen	136
11.10	Zwei-Punkte-Form	138
11.11	Schnittpunkt zweier Geraden	139
12.1	Lineare Gleichungssysteme (1)	144
12.2	Lineare Gleichungssysteme (2)	145
12.3	Lineare Gleichungssysteme (3)	146
12.4	Lineare Gleichungssysteme (4)	146
12.5	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	147
12.6	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	148
12.7	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	149
12.8	Löse mit Gauß-Jordan [**OpenAI2024d**]	149
12.9	Aufgaben zur Lösung von Gleichungssystemen mit Jordan-Form	150
13.1	Explizites Bildungsgesetz von Folgen	151
13.2	Rekursives Bildungsgesetz von Folgen	152
13.3	Folgen	152
13.4	Beschränktheit, Monotonie, Häufungspunkte, Konvergenz	154
13.5	Reihen	154
14.1	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	156
14.2	Polynome	156
14.3	Polynome II	157
14.4	gebrochen rationale Funktionen	157

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

14.5	Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion	157
14.6	Trigonometrische Funktionen	157
14.7	Betragsfunktion	157
14.8	Polarkoordinaten	159
15.1	Stetigkeit	160
15.2	Ableitungen der Elementarfunktionen	161
15.3	Rechenregeln der Differentialrechnung; Quotienten- und Reziprokenregel v1	162
15.4	Summen- und Produktregel	163
15.5	Summen- und Produktregel [**OpenAI2024p**]	163
15.6	Quotienten- und Reziprokenregel	164
15.7	Kettenregel	165
15.8	Kettenregel	165
15.9	Differentialrechnung – gemischte Aufgaben –	165
16.1	Integralaufgaben [**OpenAI2024r**]	168
16.2	Bestimmte Integrale	168
16.3	Bestimmte und unbestimmte Integrale [**OpenAI2024q**]	169
16.4	Substitionsverfahren [**OpenAI2024s**]	170
16.5	Partielle Integration [**OpenAI2024t**]	172
16.6	Diverse Aufgaben zur Integralrechnung	173
16.7	weiteres Training, erzeugt mit [**OpenAI2024u**]	173
17.1	Kegelschnitte	175
17.2	Aufgaben zu Kegelschnitten [**OpenAI2024v**]	175

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.

H. Hinweisverzeichnis

0.1	Hinweis	iii
1.1	Weitere Übungsaufgaben	10
2.1	Weitere Aufgaben	35
2.2	Weiterführende Links und Literatur zur vollständigen Induktion	43
3.1	Weitere Aufgaben	48
6.1	Ganzzahl-Division mit Rest	58
6.2	Wandlungen zwischen Zahlenbereichen	65
6.3	Horner-Schema	66
6.4	Addition in verschiedenen Zahlensystemen	70
8.1	Weitere Übungsaufgaben	86
8.2	Logarithmengleichungen im $\mathbb{R}$	103
10.1	Trigonometrische Entsprechungen	122
11.1	Koordinatensysteme	129
11.2	weitere Aufgaben	140
17.1	weitere Aufgaben	175

© 2009-2026 iBRD/IDM partners
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung untersagt.



Brückenkurs Mathematik für technische Fachrichtungen

Arbeitsmappe/Übungsskript

Drescher, R.; Götz, K.

Sommersemester 2026 V. 1
Stand 13. September 2026