Technische Hochschule Nürnberg



Brückenkurs Mathematik
– für technische Studiengänge –

Skriptum und Seminarunterlagen Wintersemester 2026
Version 2026-1 vom 14. September 2026

Dipl.- Ing. Rolf B. Drescher / (Dr. Knuth Götz)

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis I

Abkürzungsverzeichnis X

Personenverzeichnis XI

Über unsere Skripten XIV

Generelles Vorwort XVIII
1 Grundsätzliches . . . XVIII
1.1 Einige allgemeine Hinweise zu Ihrem Studium . . . XVIII
1.2 Benötigte Materialien . . . XX
2 Tipps zum Lernen „der Mathematik“ . . . XXII
3 Schlussbemerkung . . . XXIV

Literaturempfehlungen XXVI

Kleines Glossar Mathematik XXXIV

1 Einleitung 1-1
1.1 Inhalt und Lernziele . . . 1-1

2 Einführung 2-1
2.1 Die mathematische Sprache . . . 2-1
2.2 Das griechische Alphabet . . . 2-2
2.3 Mathematische Operatoren und Symbole . . . 2-5
2.4 Mathematik-Software . . . 2-7
2.5 Regeln für die Schreibweise von Formeln . . . 2-8
2.6 Häufige Fehler beim Schreiben mathematischer Formeln . . . 2-10

3 Grundlegende Rechenfertigkeiten 3-1
3.1 Die 4 Grundrechenarten . . . 3-1
3.1.1 Addition . . . 3-1
3.1.1.1 Übungsaufgaben zur schriftlichen Addition . . . 3-2
3.1.2 Subtraktion . . . 3-4
3.1.2.1 Übungsaufgaben zur schriftlichen Subtraktion . . . 3-5
3.1.3 Multiplikation . . . 3-7
3.1.3.1 Übungsaufgaben zur schriftlichen Multiplikation . . . 3-8
3.1.4 Division . . . 3-11
3.1.4.1 Übungsaufgaben zur schriftlichen Division . . . 3-12
3.1.5 Kopfrechnen . . . 3-16
3.1.5.1 Übungsaufgaben zum Kopfrechnen . . . 3-19

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

4 Grundbegriffe der Logik und Mengenlehre 4-1
4.1 Logische Grundbegriffe . . . 4-1
4.1.1 Aussagenlogik . . . 4-1
4.1.1.1 Rechenregeln der Aussagenlogik . . . 4-4
4.1.1.2 Beweis aussagenlogischer Behauptungen . . . 4-6
4.1.2 Prädikatenlogik . . . 4-8
4.2 Grundbegriffe der Cantor'schen Mengenlehre . . . 4-10
4.2.1 Darstellung von Mengen . . . 4-13
4.2.2 Bildung neuer Mengen durch Aussonderung . . . 4-14
4.2.3 Vereinigungs- und Schnittmengen . . . 4-15
4.2.4 Teilmengen und Obermengen, Komplemente . . . 4-17
4.2.5 Venn-Diagramme und die Regeln von de Morgan . . . 4-19
4.2.5.1 Fazit zur Aussagenlogik und zur Mengenlehre . . . 4-21

5 Grundlegende algebraische Strukturen 5-1
5.1 Präzedenz-Regeln . . . 5-1
5.1.1 KLAPUSTRI-Regel . . . 5-2
5.1.2 Die grundlegenden Gesetze der Algebra . . . 5-3
5.2 Die 4 Grundrechenarten . . . 5-5
5.2.1 Strichrechnung . . . 5-5
5.2.1.1 Schriftliche Addition . . . 5-5
5.2.1.2 Schriftliche Subtraktion . . . 5-5
5.2.2 Punktrechnung . . . 5-6
5.2.2.1 Schriftliche Multiplikation . . . 5-6
5.2.2.2 Schriftliche Division . . . 5-7
5.2.2.3 Division ohne Rest . . . 5-7
5.2.2.4 Division mit Rest . . . 5-8
5.2.3 Summen- und Produktoperator . . . 5-10
5.2.4 Bruchrechnung . . . 5-16
5.2.4.1 Hauptnenner . . . 5-16
5.2.4.2 Gleichheit von Brüchen . . . 5-17
5.2.4.3 Erweitern und Kürzen von Brüchen . . . 5-17
5.2.4.4 Addition und Subtraktion von Brüchen . . . 5-18
5.2.4.5 Multiplikation von Brüchen . . . 5-20
5.2.4.6 Division von Brüchen . . . 5-20
5.2.5 Umwandlung von Dezimalbrüchen in Brüche und umgekehrt . . . 5-22
5.2.6 Periodische Dezimalbrüche . . . 5-23
5.2.7 Umwandlung periodische Dezimalbrüche . . . 5-24
5.2.7.1 Rein periodische Dezimalbrüche . . . 5-24
5.2.7.2 Gemischtperiodische Dezimalbrüche . . . 5-26
5.2.8 Kettenbrüche . . . 5-26

6 Arithmetik 6-1
6.1 Die natürlichen Zahlen . . . 6-1
6.1.1 Die Null . . . 6-2

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

6.2 Die ganzen Zahlen . . . 6-3
6.3 Die rationalen Zahlen (Brüche) . . . 6-4
6.4 Die reellen Zahlen . . . 6-6
6.4.1 Die Eulersche Zahl e . . . 6-9
6.5 Die komplexen Zahlen . . . 6-13
6.6 Hierarchie der Zahlenmengen . . . 6-14
6.7 Zahlengerade und Intervallschachtelung . . . 6-15
6.8 Die Primzahlen als Untermenge der natürlichen Zahlen . . . 6-18
6.8.1 Größter gemeinsamer Teiler (ggT) . . . 6-20
6.8.2 Kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV) . . . 6-21

7 Höhere Rechenarten 7-1
7.1 Einfache Potenzrechnung mit natürlichen Exponenten . . . 7-2
7.1.1 Addition und Subtraktion von Potenztermen . . . 7-3
7.1.2 Multiplikation von Potenztermen . . . 7-5
7.1.3 Division von Potenztermen . . . 7-8
7.1.4 Besondere Potenzen . . . 7-11
7.1.5 Quadrieren von Dezimalzahlen . . . 7-11
7.1.6 Quadrieren von reinen Zehner-, Hunderter-, Tausenderzahlen . . . 7-12
7.1.7 Weitere Rechenregeln für Potenzterme . . . 7-12
7.2 Einfache Wurzelrechnung . . . 7-13
7.2.1 Quadrat- und Kubikwurzel . . . 7-14
7.2.2 Schriftliches Wurzelziehen . . . 7-15
7.3 Allgemeine Potenzen und Wurzeln . . . 7-17
7.4 Logarithmen . . . 7-19
7.4.1 Allgemeines . . . 7-20
7.4.2 Logarithmieren, Potenzieren und Radizieren als Umkehrfunktionen . . . 7-21
7.4.3 Logarithmen zu speziellen Basen . . . 7-22
7.4.4 Rechenregeln für Logarithmen . . . 7-24

8 Prozent-, Zins- und Rentenrechnung 8-1
8.1 Verhältnis- und Prozentrechnung . . . 8-1
8.1.1 Der Dreisatz . . . 8-1
8.1.2 Grundlagen der Prozentrechnung . . . 8-2
8.1.3 Grundwert, Prozentsatz und Prozentwert . . . 8-2
8.2 Promille, ppm, ppb . . . 8-4
8.3 Die SI-Präfixe . . . 8-5
8.3.1 SI-Präfixe für dezimale Vielfache . . . 8-5
8.3.2 SI-Präfixe für binäre Vielfache . . . 8-5
8.4 Zins- und Zinseszinsrechnung . . . 8-6
8.4.1 Einfache Zinsen ohne Zinseszinsen (lineare Verzinsung) . . . 8-6
8.4.2 Zinseszinsrechnung (exponentielle Verzinsung) . . . 8-7
8.5 Rentenrechnung . . . 8-8
8.5.1 Jährliche nachschüssige Renten . . . 8-8
8.5.2 Jährliche vorschüssige Renten . . . 8-9

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

8.5.3 Unterjährige Renten . . . 8-9
8.6 Kleine Formelsammlung zur Finanzmathematik . . . 8-11
8.6.1 Zinsrechnung . . . 8-11
8.6.1.1 Zinseszinsformel für n ganze Perioden . . . 8-11
8.6.1.2 Unterjährige Verzinsung . . . 8-11
8.6.1.3 Unterjährige Verzinsung mit Zinseszinsen (m Zinsperioden in einem Jahr) . . . 8-12
8.6.1.4 Gebühren (Agio) . . . 8-12
8.6.2 Barwerte (Zeitwerte) . . . 8-12
8.6.3 Rentenrechnung . . . 8-12
8.6.3.1 Nachschüssige jährliche Renten . . . 8-12
8.6.3.2 Vorschüssige jährliche Renten . . . 8-13
8.6.3.3 Unterjährige Renten . . . 8-13
8.6.4 Tilgungsrechnung . . . 8-14
8.6.4.1 Konstante Annuität (vollständige Rückzahlung nach n Zinsperioden) . . . 8-14
8.6.4.2 Konstante Annuität (teilweise Rückzahlung nach n Zinsperioden, A gegeben) . . . 8-14
8.6.4.3 Konstante Tilgung T (Laufzeit n Zinsperioden) . . . 8-15

9 Zahlensysteme 9-1
9.1 Additionssysteme . . . 9-1
9.2 Stellenwertsysteme (positionelle Systeme) . . . 9-3
9.3 Grundrechenarten in den verschiedenen Zahlensystemen . . . 9-5
9.4 Umrechnungen zwischen Zahlensystemen . . . 9-6
9.5 Darstellung reeller Zahlen im Dualsystem . . . 9-7
9.5.1 b-adische Entwicklung reeller Zahlen . . . 9-7
9.5.2 Genauigkeit der Darstellung . . . 9-12
9.5.3 Festkomma-Darstellung (2-adisch) . . . 9-14
9.5.4 Gleitkomma-Darstellung . . . 9-15

10 Der Gleichungskalkül: Termumformungen 10-1
10.1 Terme . . . 10-1
10.1.1 Addition von Termen . . . 10-2
10.1.2 Subtraktion von Termen . . . 10-3
10.1.3 Multiplikation von Termen . . . 10-4
10.1.4 Division von Termen . . . 10-4
10.2 Algebraische Umformungen . . . 10-5
10.2.1 Ausdrücke . . . 10-5
10.2.2 Allgemeine Definition . . . 10-6
10.2.3 Formvariablen - Parameter . . . 10-7
10.2.4 Klammerregeln . . . 10-8
10.2.5 Multiplizieren von Summen . . . 10-9
10.2.6 Multiplizieren von Differenzen . . . 10-10
10.2.7 Multiplizieren von Summen und Differenzen (zweigliedrige Ausdrücke) 10-11

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

10.2.8 Multiplizieren von Termen . . . 10-13
10.2.9 Faktorisieren – Herausheben gemeinsamer Faktoren . . . 10-14
10.3 Binomische Formeln . . . 10-15
10.3.1 Die 1. Binomische Formel . . . 10-16
10.3.2 Die 2. Binomische Formel . . . 10-17
10.3.3 Die 3. Binomische Formel . . . 10-19
10.3.4 Der binomische Lehrsatz . . . 10-22
10.3.4.1 Begriff der Fakultät . . . 10-22
10.3.4.2 Rechnen mit Fakultäten . . . 10-24
10.3.4.3 Binomialkoeffizienten . . . 10-24
10.4 Bruch-Zerlegungen . . . 10-27
10.4.1 Kettenbruchzerlegungen von Termen . . . 10-27
10.4.1.1 Endliche Kettenbrüche und der euklidische Algorithmus . . . 10-29
10.4.1.2 Periodisch unendliche Kettenbrüche . . . 10-30
10.4.1.3 Nichtperiodisch unendliche Kettenbrüche . . . 10-32
10.4.2 Polynomdivision . . . 10-33
10.4.3 Partialbruchzerlegung . . . 10-35

11 Nullstellen von Polynomen **11-1**
11.1 Nullstellen von einer linearen Funktion . . . 11-1
11.1.1 Nullstellen von quadratischen Funktionen . . . 11-2
11.1.2 Allgemeines zu quadratischen Gleichungen . . . 11-3
11.1.3 Nullstellen eines Polynoms dritten Grades . . . 11-5
11.1.4 Nullstellenberechnung mit Polynomdivision . . . 11-6

12 Komplexe Zahlen **12-1**
12.1 Grundlagen . . . 12-1
12.2 Die Eulersche Formel . . . 12-3
12.3 Rechnen mit komplexen Zahlen . . . 12-5
12.4 Ortskurven . . . 12-6
12.5 Pol-Nullstellen-Diagramme . . . 12-7

13 Lineare Gleichungssysteme **13-1**
13.1 Einsetzungsverfahren . . . 13-3
13.2 Gleichsetzungsverfahren . . . 13-5
13.3 Additionsverfahren . . . 13-6
13.4 Mögliche Lösungen von Gleichungssystemen . . . 13-7
13.4.1 Eindeutige Lösung . . . 13-7
13.4.2 Unendlich viele Lösungen . . . 13-8
13.4.3 Keine Lösungen . . . 13-9

14 Ungleichungen **14-1**
14.1 Allgemeines zu Ungleichungen . . . 14-1
14.2 Rechenregeln zu Ungleichungen . . . 14-2
14.3 Lineare Ungleichungen . . . 14-4

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

14.4 Quadratische Ungleichungen . . . 14-6
14.5 Bruchungleichungen . . . 14-13

15 Euklidische Geometrie der Ebene 15-1
15.1 Fundamentale Eigenschaften ebener Figuren . . . 15-1
15.1.1 Punkte, Geraden, Strecken, Winkel . . . 15-1
15.1.1.1 Beziehungen zwischen Punkten und Geraden . . . 15-2
15.1.1.2 Lagebeziehung von Geraden . . . 15-2
15.1.1.3 Strecken und Längen . . . 15-4
15.1.2 Winkel . . . 15-6
15.1.2.1 Allgemeines . . . 15-6
15.1.2.2 Winkelmaße . . . 15-7
15.1.2.3 Winkelpaare . . . 15-9
15.1.2.4 Winkelkonstruktion . . . 15-13
15.1.2.5 Addition und Subtraktion von Winkeln: . . . 15-15
15.1.2.6 Winkelteilungen . . . 15-16
15.1.3 Dreieck . . . 15-17
15.1.3.1 Gleichseitige Dreiecke . . . 15-20
15.1.3.2 Gleichschenklige Dreiecke . . . 15-22
15.1.3.3 Rechtwinkliges Dreieck . . . 15-23
15.2 Elementare geometrische Transformationen . . . 15-26
15.2.1 Translation (Parallelverschiebung) . . . 15-26
15.2.2 Scherung . . . 15-27
15.2.3 Zentrische Streckung . . . 15-28

16 Trigonometrie 16-1
16.1 Strahlensatz . . . 16-1
16.1.1 Allgemeine Formulierung . . . 16-1
16.1.2 Anwendungsbeispiel . . . 16-3
16.1.3 Der 1. Strahlensatz . . . 16-5
16.1.4 Der 2. Strahlensatz . . . 16-6
16.2 Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck . . . 16-8
16.3 Trigonometrische Funktionen am Einheitskreis . . . 16-10

17 Grundbegriffe der Vektorrechnung 17-1
17.1 Grundlagen . . . 17-1
17.1.1 Einleitung . . . 17-1
17.1.2 Physikalische Motivation . . . 17-1
17.2 Koordinatensysteme . . . 17-2
17.2.1 Dimensionen von Koordinatensystemen . . . 17-4
17.2.2 Eindimensionale Koordinatensysteme . . . 17-5
17.2.3 Kartesische Koordinatensysteme . . . 17-6
17.2.4 Krummlinige Koordinatensysteme . . . 17-7
17.2.5 Polarkoordinaten . . . 17-8
17.2.6 Zylinderkoordinaten . . . 17-10

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

17.2.7 Kugelkoordinaten . . . 17-11
17.3 Einführung in die Vektorrechnung . . . 17-12
17.3.1 Parallelverschiebung . . . 17-13
17.3.2 Rechenarten für Vektoren . . . 17-14
17.3.2.1 Ortsvektor . . . 17-15
17.3.2.2 Addition und Subtraktion . . . 17-16
17.3.2.3 Betrag, Euklidische Norm . . . 17-17
17.3.2.4 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar . . . 17-18
17.3.2.5 Skalarprodukt . . . 17-19
17.3.2.6 Orthogonale Zerlegung . . . 17-22

18 Ebene analytische Geometrie 18-1
18.1 Einführung . . . 18-1
18.2 Koordinatensysteme . . . 18-2
18.3 Darstellung von Punkten . . . 18-4
18.4 Darstellung von Geraden . . . 18-5
18.4.1 Darstellung als Funktion . . . 18-5
18.4.1.1 Steigung-Achsenabschnitt-Form . . . 18-5
18.4.1.2 Zwei-Punkte-Form . . . 18-7
18.4.1.3 Achsenabschnittsform . . . 18-8
18.4.2 Analytische Darstellung . . . 18-9
18.4.2.1 Zwei-Punkte-Form . . . 18-10
18.4.2.2 Koordinatenform . . . 18-10
18.4.2.3 Normalenform . . . 18-11
18.4.3 Schnittpunkt zweier Geraden . . . 18-11
18.4.3.1 Sonderfälle: . . . 18-12
18.4.3.2 Erweiterung auf den reellen Anschauungsraum . . . 18-12
18.5 Darstellung von Ebenen . . . 18-13

19 Grundbegriffe der Matrizenrechnung 19-1
19.1 Motivierendes Einführungsbeispiel . . . 19-1
19.1.1 Spezielle Matrizen . . . 19-7
19.1.2 Rechenoperationen mit Matrizen . . . 19-9
19.1.2.1 Matrizenaddition und -subtraktion . . . 19-9
19.1.2.2 Multiplikation mit einem Skalar . . . 19-11
19.1.2.3 Multiplikation mit einem Vektor . . . 19-12
19.1.2.4 Matrizenmultiplikation . . . 19-13

20 Folgen und Reihen 20-1
20.1 Folgen . . . 20-1
20.1.1 Bildungsgesetz für Folgen . . . 20-2
20.1.2 Spezielle Folgen . . . 20-3
20.1.3 Eigenschaften von Folgen . . . 20-5
20.2 Reihen . . . 20-7

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

21 Funktionen einer reellen Variablen **21-1**
21.1 Relationen und Funktionen . . . 21-1
21.1.1 Algebraische Funktionen . . . 21-4
21.2 Der Graph einer algebraischen Funktion . . . 21-5
21.2.1 Koordinatensysteme . . . 21-6
21.2.1.1 Das ebene kartesische Koordinatensystem . . . 21-6
21.2.1.2 Polarkoordinatensystem . . . 21-8
21.2.2 Graphische Darstellung von Funktionsgraphen . . . 21-10
21.2.3 Elementare Funktionen . . . 21-13
21.2.3.1 Die konstante Funktion . . . 21-15
21.2.3.2 Die Vorzeichenfunktion sgn . . . 21-15
21.2.3.3 Die Betragsfunktion $|\dots|$ . . . 21-16
21.2.3.4 Die Gaußklammer-Funktion $\lfloor\ \rfloor$ . . . 21-17
21.2.3.5 Die lineare Funktion . . . 21-18
21.2.4 Polynomfunktionen . . . 21-20
21.2.4.1 Reine Potenzfunktionen . . . 21-21
21.2.4.2 Komplette Polynomfunktionen . . . 21-22
21.2.5 Exponentialfunktionen . . . 21-24
21.2.6 Trigonometrische Funktionen . . . 21-26
21.2.6.1 Übersicht über die trigonometrischen Funktionen . . . 21-26
21.2.6.2 Anwendung der trigonometrischen Funktionen . . . 21-28
21.2.6.3 Sinus und Cosinus . . . 21-28
21.2.6.4 Tangens und Cotangens . . . 21-30
21.2.7 Goniometrische Gleichungen . . . 21-31

22 Grundzüge der Differentialrechnung **22-1**
22.1 Einführung . . . 22-1
22.2 Differentialrechnung mit einer Variablen . . . 22-2
22.3 Rechenregeln für das Differenzieren . . . 22-4
22.3.1 Mehrfache Ableitungen . . . 22-7
22.4 Mehrere Variablen . . . 22-8

23 Grundzüge der Integralrechnung **23-1**
23.1 Einfach-Integrale . . . 23-1
23.2 Rechenregeln für das Integrieren . . . 23-4
23.2.1 Tricks beim Integrieren . . . 23-5
23.3 Mehrfach-Integrale . . . 23-8

24 Kegelschnitte **24-1**
24.1 Ebene Kurven 2. Ordnung . . . 24-1
24.1.1 Kreis . . . 24-2
24.1.2 Ellipse . . . 24-5
24.1.3 Parabel . . . 24-6
24.1.4 Hyperbel . . . 24-7

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

25 Lösungsvorschläge zu den Übungsaufgaben **25-1**

Quellen- und Literaturverzeichnis **25-2**

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Abkürzungsverzeichnis

Die Seitenzahlen bezeichnen die Seite der ersten Verwendung der betreffenden Abkürzung.

Slide 5

Als Quelle wurde hauptsächlich die deutschsprachige Wikipedia heran gezogen (http://de.wikipedia.org; Abruf im Zeitraum Februar 2016 … August 2025); die Angaben wurden zu 100 % geprüft.[0.1]

ggT Größter gemeinsamer Teiler – Wichtig z. B. beim Kürzen von Brüchen. 6-19

IEEE Das Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE, meist als „i triple e“ gesprochen) ist ein weltweiter Berufsverband von Ingenieuren hauptsächlich aus den Bereichen Elektrotechnik und Informationstechnik mit juristischem Sitz in New York City und Betriebszentrale in Piscataway, New Jersey. XIV

kgV Kleinstes gemeinsames Vielfaches – Wichtig z. B. für die Bestimmung des Hauptnenners. 5-16

LaTeX LaTEX (Eigenschreibweise LaTeX) ist ein freies Softwarepaket zum professionellen Setzen von Dokumenten, wie beispielsweise Büchern, wissenschaftlichen Artikeln oder Skripten. XIV

THN Die Technische Hochschule Nürnberg Georg Simon Ohm (kurz TH Nürnberg, THN; oder auch: GSO) ist eine staatliche Fachhochschule in Nürnberg. Ihren Beinamen trägt sie im Gedenken an Georg Simon Ohm, der von 1833 bis 1849 an der Vorgängerinstitution als Professor lehrte und deren Rektor er ab 1839 war. XVIII

TikZ „TikZ ist kein Zeichenprogramm“ – eine frei verfügbare Bibliothek zur Erstellung von Vektorgraphiken. XIV

URL Ein „Uniform Resource Locator“ identifiziert und lokalisiert eine Ressource, wie beispielsweise eine Website. XIV

[0.1] Beachten Sie: Wikipedia ist an sich nicht zitierungsfähig – wenn Sie dennoch hieraus zitieren, müssen Sie es **zwingend** gegenprüfen.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Personenverzeichnis

Slide 6

Die Ziffer nach dem biographischen Eintrag bezeichnet die Seite der ersten Verwendung.

Die Angaben sind fast alle der deutschsprachigen (in seltenen Ausnahmen der englischsprachigen)[0.1] Wikipedia entnommen (http://de.wikipedia.org; Abruf im Zeitraum Februar 2016 … August 2025)[0.2]. In seltenen Ausnahmefällen wurden die Angaben anderweitig gefunden; diese Ausnahmen sind jeweils eindeutig gekennzeichnet.

Der letzte Eintrag in dieses Personenverzeichnis erfolgte im August 2025. Dies bedeutet nicht, dass die Angaben zum genannten Zeitpunkt aktuell sind.

Aristoteles Aristoteles (* 384 v. Chr. in Stageira; † 322 v. Chr. in Chalkis auf Euböa) gehört zu den bekanntesten und einflussreichsten Philosophen und Naturforschern der Geschichte. Sein Lehrer war Platon, doch hat Aristoteles zahlreiche Disziplinen entweder selbst begründet oder maßgeblich beeinflusst, darunter Wissenschaftstheorie, Naturphilosophie, Logik, Biologie, Physik, Ethik, Staatstheorie und Dichtungstheorie. Aus seinem Gedankengut entwickelte sich der Aristotelismus. 4-1

Cantor Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (* 19. Februar (jul.)/ 3. März 1845 (greg.) in Sankt Petersburg; † 6. Januar 1918 in Halle an der Saale) war ein deutscher Mathematiker. Cantor lieferte wichtige Beiträge zur modernen Mathematik. Insbesondere ist er der Begründer der Mengenlehre und veränderte den Begriff der Unendlichkeit. 4-10

Cardano Gerolamo Cardano (auch Geronimo oder Girolamo, lateinisch Hieronymus Cardanus; * 24. September 1501 in Pavia; † 21. September 1576 in Rom) war ein italienischer Arzt, Philosoph und Mathematiker. Er zählt zu den Renaissance-Humanisten. 10-5

Descartes René Descartes (latinisiert Renatus Cartesius; * 31. März 1596 in La Haye en Touraine; † 11. Februar 1650 in Stockholm) war ein französischer Philosoph, Mathematiker und Naturwissenschaftler. Descartes gilt als der Begründer des modernen frühneuzeitlichen Rationalismus. 17-6, 21-6

Euklid Euklid von Alexandria (latinisiert Euclides) war ein griechischer Mathematiker, der wahrscheinlich im 3. Jahrhundert v. Chr. in Alexandria gelebt hat. Die überlieferten Werke umfassen sämtliche Bereiche der antiken griechischen Mathematik: Das sind die theoretischen Disziplinen Arithmetik und Geometrie (Die Elemente, Data), Musiktheorie (Die Teilung des Kanon), eine methodische Anleitung zur Findung von planimetrischen Problemlösungen von bestimmten gesicherten Ausgangspunkten aus (Porismen) sowie die physikalischen bzw. angewandten Werke (Optik, astronomische Phänomene). 15-1

[0.1] Angaben aus der englischsprachigen Wikipedia wurden nicht übersetzt und sind so erkennbar.

[0.2] Beachten Sie: Wikipedia ist an sich nicht zitierungsfähig – wenn Sie dennoch hieraus zitieren, müssen Sie es zwingend gegenprüfen.
Die Angaben in diesem Personenverzeichnis sind rein *informell* zu sehen; wir haben diese mangels Möglichkeit nicht gegenprüfen können.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Euler Leonhard Euler (* 15. April 1707 in Basel; † 7. September (jul.)/ 18. September 1783 (greg.) in Sankt Petersburg) war ein Schweizer Mathematiker und Physiker. Wegen seiner Beiträge zur Analysis, zur Zahlentheorie und zu vielen weiteren Teilgebieten der Mathematik gilt er als einer der bedeutendsten Mathematiker. 6-9, 7-23, 12-4

Falk Sigurd Falk (* 06. Mai 1921 in Peine; † Mai oder Juni 2016 war ein deutscher Bauingenieur und Hochschullehrer, der an der TU Braunschweig lehrte. 19-14

Feuerbach Karl Wilhelm Feuerbach (* 30. Mai 1800 in Jena; † 12. März 1834 in Erlangen) war ein deutscher Mathematiker. 15-19

Gauss Johann Carl Friedrich Gauß (latinisiert Carolus Fridericus Gauss; * 30. April 1777 in Braunschweig; † 23. Februar 1855 in Göttingen) war ein deutscher Mathematiker, Astronom, Geodät und Physiker. Wegen seiner überragenden wissenschaftlichen Leistungen galt er bereits zu seinen Lebzeiten als Princeps Mathematicorum („Fürst der Mathematiker“). 12-2, 20-7

Grassmann Hermann Günther Graßmann (* 15. April 1809 in Stettin; † 26. September 1877 ebenda) war ein deutscher Mathematiker, Physiker und Sprachwissenschaftler. Er gilt als eigentlicher Begründer der Vektor- und Tensorrechnung. 17-1

Leibniz Gottfried Wilhelm Leibniz (* 21. Juni (jul.)/ 1. Juli 1646 (greg.) in Leipzig; † 14. November 1716 in Hannover) war ein deutscher Philosoph, Mathematiker, Diplomat, Historiker und politischer Berater der frühen Aufklärung. Er gilt als der universale Geist seiner Zeit und war einer der bedeutendsten Philosophen des ausgehenden 17. und beginnenden 18. Jahrhunderts sowie einer der wichtigsten Vordenker der Aufklärung. 23-2

Liouville Joseph Liouville (* 24. März 1809 in Saint-Omer; † 8. September 1882 in Paris) war ein französischer Mathematiker. Liouville arbeitete in zahlreichen mathematischen Teilgebieten, darunter Zahlentheorie, Funktionentheorie und Differentialgeometrie, aber auch in mathematischer Physik und sogar in Astronomie. 10-27

Pascal Blaise Pascal (* 19. Juni 1623 in Clermont-Ferrand; † 19. August 1662 in Paris) war ein französischer Mathematiker, Physiker, Literat und christlicher Philosoph. 10-24

Peano Giuseppe Peano (* 27. August 1858 in Spinetta, heute Teil von Cuneo, Piemont; † 20. April 1932 in Turin) war ein italienischer Mathematiker. Er arbeitete in Turin und befasste sich mit mathematischer Logik, mit der Axiomatik der natürlichen Zahlen (Entwicklung der Peano-Axiome) und mit Differentialgleichungen erster Ordnung. 2-1

Perron Oskar Perron (* 7. Mai 1880 in Frankenthal (Pfalz); † 22. Februar 1975 in München) war ein deutscher Mathematiker. 15-1

Platon Platon (* 428/427 v. Chr. in Athen oder Aigina; † 348/347 v. Chr. in Athen) war ein antiker griechischer Philosoph. 7-2

Pythagoras Pythagoras von Samos (* um 570 v. Chr. auf Samos; † nach 510 v. Chr. in Metapont in der Basilicata) war ein antiker griechischer Philosoph (Vorsokratiker) und Gründer einer einflussreichen religiös-philosophischen Bewegung. 12-3

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Riemann Georg Friedrich Bernhard Riemann (* 17. September 1826 in Breselenz bei Dannenberg (Elbe); † 20. Juli 1866 in Selasca bei Verbania am Lago Maggiore) war ein deutscher Mathematiker, der trotz seines relativ kurzen Lebens auf vielen Gebieten der Analysis, Differentialgeometrie, mathematischen Physik und der analytischen Zahlentheorie bahnbrechend wirkte. Er gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker. 23-1

Thales Thales von Milet (* wahrscheinlich um 624/23 v. Chr.; † zwischen 548 und 544 v. Chr.) war ein vorsokratischer Naturphilosoph, Geometer und Astronom des archaischen Griechenlands. 16-3

Vietoris Leopold Vietoris (* 4. Juni 1891 in Bad Radkersburg, Steiermark; † 9. April 2002 in Innsbruck) war ein österreichischer Mathematiker und Supercentenarian – er starb im Alter von 110 Jahren und 10 Monaten. Er und seine Frau Maria Josefa Vincentia Vietoris, geb. Riccabona von Reichenfels (* 18. Juli 1901; † 24. März 2002) gehörten zu den ältesten Ehepaaren der Welt. 21-29

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Über unsere Skripten

Dieses Dokument wurde von uns in LaTeX[0.1] für einseitigen Ausdruck mit Einband = Titelseite gesetzt. Dabei haben wir KOMA-Script `\documentclass{scrbook}` verwendet. Unsere Empfehlung: Drucken Sie es sich auch einseitig auf „dickem Papier“ aus; dann können Sie die Rückseite für Ihre Notizen nutzen.

Zitationen erfolgen in Anlehnung an den IEEE[0.2]-Stil im Format `[NNNNYYi]`, wobei NNNN die ersten vier Buchstaben des Autor-Nachnamens, YY die letzten zwei Stellen des Jahres der Veröffentlichung und das optionale `i` (Kleinbuchstabe) für Eindeutigkeit sorgt, falls aus mehreren unterschiedlichen Veröffentlichungen von `nnnn` im Jahr `yy` zitiert wird. Bei mehreren Autoren wird nur der erste bzw. der Lead-Autor (oder der Organisationsname, falls Autoren nicht ermittelt wurden) in Großbuchstaben angegeben. Beispiel: `[Kier21]` für „Kierfeld, Jan: *Vorkurs Physik*. Skriptum der Universität Dortmund. Dortmund: 2021“ oder `[HANS15]` für „Hansen, Hans R.; Mendling, Jan; Neumann, Gustav: *Wirtschaftsinformatik*. Berlin: De Gruyter, 2015“[0.3]

Mathematische Grafiken wurden (soweit nicht als externe Grafik-Datei eingefügt) überwiegend mit TikZ und pgfplot, in Einzelfällen mit Microsoft® Excel®, dem Mathematics-PlugIn für Microsoft® Word® oder mit den Chart-Modulen von **R**[0.4] oder Wolfram | Alpha®[0.5] erstellt.

Allgemeine eigene Grafiken wurden (soweit nicht als externe Grafik-Datei eingefügt) in LaTeX mit TikZ[0.6] erstellt; in Einzelfällen kam COREL DRAW® zum Einsatz.

Dem World Wide Web entnommene Abbildungen sind i. A. direkt unterhalb in der Quellenangabe mit URL[0.7] und Abrufdatum gekennzeichnet. In Ausnahmefällen („kleine“ Abbildung) finden Sie diese Angaben (mit entsprechendem Verweis) nicht direkt unter der betreffenden Abbildung, sondern in einer Fußnote.

Elektrische bzw. elektronische Schaltpläne wurden mit EAGLE®[0.8] oder mit circuiTikZ erstellt; Simulationen elektrischer bzw. elektronischer Schaltungen geschahen mit pSpice[0.9] oder LTSpice[0.10].

Für die Nachbearbeitung von Pixelgrafiken verwenden wir das freie „Paint Dot Net“®.[0.11]

[0.1] LaTEX (Eigenschreibweise LaTeX) ist ein freies Softwarepaket zum professionellen Setzen von Dokumenten, wie beispielsweise Büchern, wissenschaftlichen Artikeln oder Skripten.

[0.2] Das Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE, meist als „i triple e“ gesprochen) ist ein weltweiter Berufsverband von Ingenieuren hauptsächlich aus den Bereichen Elektrotechnik und Informationstechnik mit juristischem Sitz in New York City und Betriebszentrale in Piscataway, New Jersey.

[0.3] **Dringende Empfehlung:** Gewöhnen Sie sich von Anfang an, korrekt zu zitieren. Beschäftigen Sie sich mit den Grundlagen wissenschaftlicher Literaturarbeit, besuchen Sie entsprechende Kurse (die von der Hochschul-Bibliothek angeboten werden), fragen Sie in Ihrer Fakultät, welche Zitier- und Bibliographiestile „erwünscht“ sind.

[0.4] **R** ist ein freies Computer-Algebra-System mit Schwerpunkt auf statistischen Berechnungen. Siehe https://cran.r-project.org/, zuletzt geprüft am 2025-08-01.

[0.5] Siehe http://www.wolframalpha.com/, zuletzt geprüft am 2025-08-01.

[0.6] „TikZ ist kein Zeichenprogramm“ – eine frei verfügbare Bibliothek zur Erstellung von Vektorgraphiken.

[0.7] Ein „Uniform Resource Locator“ identifiziert und lokalisiert eine Ressource, wie beispielsweise eine Website.

[0.8] Siehe http://www.autodesk.com/products/eagle/overview, zuletzt geprüft am 2025-08-01.

[0.9] Siehe http://www.pspice.com/, zuletzt geprüft am 2025-08-01.

[0.10] Siehe http://www.linear.com/designtools/software/, zuletzt geprüft am 2025-08-01.

[0.11] Siehe http://www.getpaint.net/index.html, zuletzt geprüft am 2025-08-01.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Sie finden in diesem Dokument einige **spezielle Hervorhebungen**, die wir Ihnen gerne vorab erläutern möchten:



Lesetipp 1:

Der „Buchstapel“ signalisiert ***empfohlene Literaturnutzung*** oder auch ***empfohlene Zusatzliteratur***.[0.12]
Unsere Empfehlung: Bearbeiten Sie (zusätzlich) diese angegebenen Quellen.

Definition 0.1: So sehen „*Definitionen*“ aus.

Eine ***Definition*** beinhaltet dabei im Wesentlichen Definitionen von Fachbegriffen.
Solche Fachbegriffe und Axiome sollten Sie ***auswendig lernen***.

Satz 0.1:

So sehen ***mathematische Axiome***, ***Sätze***, ***Korollare***, ... aus.

Regel 0.1: So sehen „*Regeln*“ aus.

Diese beinhalten aus Axiomen bzw. Definitionen abgeleitete Aussagen, oder allgemeine Vorgehensweisen.
Sie sollten diese Aussagen ***nachvollziehen können*** und dadurch verstehen.

Beweis 0.1: Das hier ist ein *„Beweis“*.

Beweise verwenden wir recht sparsam, und fast nur in mathematischen Skripten.

Beispiel 0.1: Das hier ist ein „*Beispiel*“.

Beispiele dienen zur Verdeutlichung der theoretischen Erläuterungen anhand praktischer Beispiele. Sie sollten das jeweilige Beispiel ***komplett nachvollziehen*** (verstehen, selber durchrechnen, selber programmieren, ...).
Diese Beispiele sollen Ihnen u. a. auch dabei helfen, Verständnisprobleme aufzudecken.

[0.12] Quelle für den „Buchstapel“: https://de.freepik.com/vektoren-kostenlos/gestapelte-buecher-in-skizzenhaften-stil_765570.htm; abgerufen am 2024-04-21.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Übungsaufgabe 0.1: Das hier ist eine „*Aufgabe*“.

Aufgaben haben den Sinn, dass Sie anhand ***Ihres*** Lösungsversuchs zu der betreffenden Aufgabe ***selber feststellen*** können, wieweit Sie die vorhergehenden theoretischen Erläuterungen verinnerlicht haben.
Genau aus diesem Grund veröffentlichen wir für Sie auch in der Regel keine „vorgekauten“ Musterlösungen. Wenn Sie die Aufgaben tatsächlich angehen werden, dann entwickeln Sie allein dadurch soviel Eigeninitiative, dass Sie Ihre Lösung mit Leichtigkeit anhand einer kurzen Internetrecherche, eines selbstgeschriebenen Programms, ... verifizieren oder falsifizieren können.
Scheuen Sie sich nicht, uns bei dabei auftretenden Problemen anzusprechen!



Hinweis 0.1:

Der „erhobene Zeigerfinger“ signalisiert „***ACHTUNG!***“.[0.13]
So werden Dinge gekennzeichnet, die nicht sofort ersichtlich sind: Z. b. Ausnahmen von Regeln, besonders zu beachtende Voraussetzungen, und dergleichen mehr.

Sie finden möglicherweise auch einige Beispiele von „Software“, wie z. B. **Pseudocode**, oder **Kommandozeilen-Eingaben**, oder als z. B. **C-** bzw. **C++ - Quelltext**.

```
Zur␣besseren␣Unterscheidbarkeit␣ist␣derartiger␣Code␣in␣der␣Schriftart
"Courier"␣mit␣farbigem␣Syntax-"Highlighting"␣gesetzt.
Leerzeichen␣innerhalb␣von␣"Zeichenketten␣(Strings)␣sind␣␣␣hervorgehoben".
```

Zu diesem Skript gibt es einen ergänzenden Foliensatz (im WiSe 2026 noch im Aufbau).

Slide 7

Am linken Seitenrand sehen Sie an einigen Stellen gelbe Markierungen mit einem anklickbarem Link.

Der Link führt Sie zur Folie, auf welcher der aktuelle Skript-Inhalt dargestellt ist.

Umgekehrt haben Sie auf den Folien oben rechts einen anklickbaren Verweis auf die Skriptseite, deren Inhalt auf der Folie dargestellt ist. Durch Klick auf den Folien-Link oben rechts kommen Sie wieder zurück zum Skript.

Diese Funktionalität ist leider nicht in alle PDF-Betrachter eingebaut; beispielsweise geht es nicht mit Sumatra oder PDF24. Mit den Adobe©-Produkten, Foxit oder PDF-Xchange funktioniert es.

Am rechten Bildrand sehen sie verschieden eingefärbte sogenannte „Handmarken“ (auch „Daumenindex“ genannt). Diese haben zwei Funktionen:

- Wenn Sie sich das Skriptum ausdrucken (und Ihr Drucker bis an den Rand drucken kann), sehen Sie seitlich den Ort dieser Handmarken und können damit schnell das gewünschte Kapitel auffinden.
- Die verschiedene Einfärbung signalisiert Ihnen die Relevanz des Inhalts der betreffenden Seite:
  - Schwarze Farbe kennzeichnet „redaktionelle“ Abschnitte, wie beispielsweise Inhalts-, Personen-, Quellenverzeichnis o. ä.

[0.13] Quelle für den „erhobenen Zeigefinger“: https://de.123rf.com/photo_22171860_schwarze-und-weisse-hand-mit-seinen-zeigefinger-nach-oben.html; abgerufen am 2017-03-23.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

- Das Grün signalisiert Standardtext bzw. Grundlagen. Diese Abschnitte werden ausdrücklich in der Vorlesung behandelt; der Inhalt ist **bei von den Autoren dieses Dokuments erstellten Klausuren** klausurrelevant.
- Braune Farbe signalisiert Ergänzungen zum Stoff, insbesondere auch eigene Übungs-, Programmier-, Recherche-, ... aufgaben. Diese Abschnitte werden in der Regel nicht oder nur sehr kurz in der Vorlesung behandelt; wir empfehlen Ihnen, das im Eigenstudium durchzuarbeiten.
  Für die Klausur **bei von den Autoren dieses Dokuments erstellten Klausuren** sind nur die wesentlichen Aussagen relevant.
- Rote Farbe signalisiert: Ergänzungen und Vertiefungen. Diese Abschnitte behandeln wir in der Regel nur auf Ihren ausdrücklichen Wunsch, oder falls wir in der Vorlesung dafür noch Zeit haben sollten.
  Der Stoff ist insbesondere für interessierte Studierende gedacht, die sich in die Materie etwas tiefer einarbeiten wollen.
  Der Inhalt ist **bei von den Autoren dieses Dokuments erstellten Klausuren** nicht klausurrelevant.



Wo Menschen werkeln, geschehen Fehler. Wir bitten Sie darum, uns ganz offen die von Ihnen entdeckten inhaltlichen Fehler aller Art, sowie Hinweise auf Verbesserungen mitzuteilen.



Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Generelles Vorwort

1 Grundsätzliches

1.1 Einige allgemeine Hinweise zu Ihrem Studium

... – und zu den Mathematik-Modulen

Liebe Studierende,

Slide 9

Willkommen an der THN[0.1]!

Und herzlichen Glückwunsch zu Ihrem Entschluss, ein wissenschaftliches Studium aufzunehmen. Wir wünschen Ihnen dazu von Herzen viel Erfolg und vor allem die Kraft bzw. Energie, die Sie dafür benötigen werden.

Die Module „Ingenieurmathematik“ sind mit die ersten Module, die Sie im Verlauf Ihres Studiums zu bewältigen haben – und die Mathematik ist für viele eine größere Hürde, die es zu überwinden gilt. Deswegen erlauben Sie uns zunächst einige **allgemeine Vorworte**:

Sie haben mit der THN eine sehr gute Ingenieurschule gewählt – auch für diese Entscheidung vielen Dank und herzlichen Glückwünsch!

Sie erhalten vielfältige Hilfsangebote; insbesondere in „der Mathematik“ sind das – neben den Vorlesungen – Übungsveranstaltungen, Tutorien, u. dgl.; außerdem bietet jeder Dozent regelmäßige Sprechstunden an.

Unser Tipp an Sie: Nutzen Sie diese Ressourcen! Wenn immer Sie mit Ihrem Studium an Grenzen stoßen, holen Sie sich Hilfe!

Vorab ein paar wichtige Anmerkungen:

Eine Hochschule ist keine Schule, und eine Vorlesung ist kein Frontalunterricht, so wie Sie ihn von der Schule her kennen. Es gibt zwar auch Curricula, welche den zu behandelnden Stoff grob umreißen; aber es gibt definitiv keine „vom Lehrer vorgekauten“ Wissenspakete und keine auf den konkreten Modul-Fortschritt zugeschnittenen „Hausaufgaben“.

- Die Schule vermittelt Ihnen viele Fachkenntnisse, aber leider eben nicht die wichtigste Kompetenz, die Sie an jeder Hochschule benötigen: Eigenverantwortliches Lernen!
- Sie erhalten dazu in den entsprechenden Einführungs-Veranstaltungen viele weitere Tipps und Hinweise. Besuchen Sie diese Einführungen, löchern Sie die Kolleg(inn)en, finden Sie heraus, welcher „Lerntypus“ Sie sind, und richten Ihr Studium danach aus!
- Generell gibt es an keiner Hochschule eine allgemeine Anwesenheitspflicht. Ob Sie die Lehrveranstaltungen besuchen oder nicht, unterliegt alleinig Ihrer freien Entscheidung.

[0.1] Die Technische Hochschule Nürnberg Georg Simon Ohm (kurz TH Nürnberg, THN; oder auch: GSO) ist eine staatliche Fachhochschule in Nürnberg. Ihren Beinamen trägt sie im Gedenken an Georg Simon Ohm, der von 1833 bis 1849 an der Vorgängerinstitution als Professor lehrte und deren Rektor er ab 1839 war.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

- Der „Deal“ ist sehr einfach – Sie müssen soundsoviele Zwischenprüfungen (liebevoll i. A. „Klausur“ genannt) bestehen und eine Abschlussarbeit mit kurzer mündlicher Präsentation abliefern. Für die Teilnahme an einer Klausur ist in einigen Modulen eine Prüfungsvorleistung zu erbringen. ***Wie*** Sie diese notwendigen Zwischenprüfungen schaffen, ist einzig und alleine Ihnen selber überlassen.
  - Alle Kolleginnen / Kollegen an unserer Hochschule helfen Ihnen gerne dabei, das „Wie“ herauszufinden und die fachlichen Inhalte zu erarbeiten.
  - Damit Dies geschehen kann, müssen ***Sie*** selber aktiv werden. Das kaut Ihnen keiner vor.
- Sie werden auch feststellen, dass (anders als in der Schule) jeder Lehrende seine eigene „Handschrift“ hat. Es gibt eben keine föderalistisch-zentral festgelegte Vorgehensweise, sondern an Hochschulen gilt die Freiheit der Forschung und Lehre. Und das ist auch sehr gut so!
  - Konkret äußert sich das für Sie so, dass der/die eine Lehrende Powerpoint-Format für Skripten bevorzugt, der/die andere Skript- bzw. Buch-Format. Der/die eine Lehrende gibt umfangreiche Buchempfehlungen heraus (wobei dann Ihre Auswahl-Kompetenz gefragt ist), der/die andere sagt „Sie brauchen lediglich mein Skriptum“. Der/die eine Lehrende bringt fast nur Praxisbeispiele und arbeitet daraus die Theorie heraus (induktives Vorgehen), der/die andere macht es umgekehrt (deduktives Vorgehen), usw. ... usw. ... usw.
  - Jede(r) Lehrende setzt seine eigenen fachlichen Schwerpunkte. Das bedeutet beispielsweise: Wenn Sie „die Mathematik“ in Ihrem Fachgebiet bei Kolleg(in/en) A hören und die Lehre nächstes Semester auf Kolleg(in/en) B wechselt, können sich die Schwerpunkte signifikant verschieben. Rechnen Sie nicht damit, dass die geprüften Inhalte identisch sind! Wiederum so ein Unterschied zur Schule!
  - Sie dürfen sich niemals darauf verlassen, dass in Prüfungen ausschließlich das gefragt wird, was in der Vorlesung explizit „vorgekaut“ wurde. Weil: Dieses „Vorkauen“ gibt es nicht! Beispiel: Wenn Sie in der Vorlesung lediglich die Taylor-Reihenentwicklung für die Sinusfunktion exemplarisch herleiten und sonst für keine weiteren Funktionen, dann sollten Sie trotzdem in der Lage sein, die entsprechenden Additionstheoreme zu finden und z. B. $\tan^2$ entwickeln können.
- Letztendlich müssen Sie Ihren eigenen Weg finden. Das kann Ihnen niemand abnehmen; die Ressourcen unserer Hochschule können und werden Sie dabei lediglich bestmöglich unterstützen.

Wir möchten Ihnen einen gut gemeinten Rat mit auf den Weg geben:

Sie werden Ihr Studium ***nicht*** erfolgreich mit einer „Konsumentenhaltung“ abschließen können („ich komme schließlich hierher, gehe in jede Vorlesung, und der Mensch da vorne ist dafür verantwortlich, dass ich den Stoff verstehe und die blöde Klausur irgendwie schaffe“).

Bitte bedenken Sie: Als fertiger Bachelor dürfen Sie einen akademischen Titel führen; damit haben Sie dann z. B. auch einen Rechtsanspruch darauf, an einer unserer deutschen „Leuchtturm-Universitäten“ ein aufbauendes Masterstudium absolvieren zu dürfen!

Genug der Vorworte. Anschließend einige modulspezifische Worte:

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

1.2 Benötigte Materialien

- Beschaffen Sie sich eine gute mathematische **Formelsammlung**! Diese werden Sie häufig als Nachschlagewerk benutzen und sie wird Sie den Rest Ihres Lebens als Ingenieur begleiten – auch ich (RBD) habe noch in meinem Büro meinen 45 Jahre alten Bronstein/Semenjajew stets griffbereit liegen und schaue so etwa 1-mal je Woche hinein (zugegebener Maßen etwas öfters, wenn ich eine mathematische Klausur basteln darf). Daraus können Sie meine (RBD) Präferenz für „den Bronstein“ ersehen – aber bilden Sie sich aus den Literaturempfehlungen und eigenen, weitergehenden Recherchen Ihre eigene Meinung und beschaffen Sie sich die mathematische Formelsammlung, mit der Sie die nächsten 45 Jahre Ihres Lebens glücklich sein werden. Diese ca. 20 ... 40 EUR Investition ist für einen Ingenieur wirklich unverzichtbar – glauben Sie uns das bitte!
- Als **Lehrbücher** empfehlen wir Ihnen besonders die Bände von Herrn Papula (siehe Lehrbuch-Empfehlungen). Diese sind u. E. didaktisch hervorragend aufbereitet – wir sind davon überzeugt, dass es derzeit auf dem deutschen Markt keine „einfacheren“ mathematischen Lehrbücher gibt.
- Wenn Sie die Lehrveranstaltungen besuchen möchten, dann empfehlen wir Ihnen: Drucken Sie sich die Skripten (siehe unten) aus (wenn im Powerpoint-Format, dann sind 2 Slides auf einer Seite ok). Tun Sie das einseitig (auch wenn Sie die doppelseitige Paginierung in manchen Skript-Formaten damit ad absurdum führen), damit Sie auf der Rückseite mitschreiben können, sich Notizen machen können, usw.; heften Sie das in einem **breiten** DIN-A4-Ordner ab (der wird sich im Verlauf des Semesters füllen!) und schleppen ihn zu den Vorlesungen mit.

  Anmerkung zur Digitalisierung: Auch wenn Ihnen das „altmodisch“ erscheinen sollte: Wir empfehlen ausdrücklich ***handschriftliches Mitschreiben auf Papier*** – Wenn Sie sich mit OneNote oder ähnlicher Software auf einem Tablet Notizen machen, geht ein nicht unwesentlicher Teil Ihrer Konzentration in die Bedienung der Software (insbesondere dann, wenn Sie Dinge farbig markieren / einkringeln ...); diese Kapazität fehlt Ihnen, um der Lehrveranstaltung bestmöglich folgen zu können. Außerdem sind Ihre Anmerkungen und insbesondere auch Notizen zu Dingen, die Sie nachfragen / wiederholen möchten, in einem solchen digitalen Dokument sehr viel schwerer aufzufinden, als auf der Rückseite einer Skriptseite handschriftlich geschrieben ...

  Außerdem bestätigen etliche pädagogische und kognitionspsychologische Studien sowie viele Meta-Analysen den Vorteil handschriftlicher Mitschriften gegenüber digitalen Dokumenten (bspw. Mueller & Oppenheimer (2014): Handschrift schlägt Laptop bei Verständnis und Transfer; Delgado et. al. (2018): Don't throw away your printed books: A meta-analysis on the effects of reading media on reading comprehension; Clinton (2019): Reading from paper compared to screens: A systematic review and meta-analysis; Flanigan et. al. (2024): Typed Versus Handwritten Lecture Notes and College Student Achievement: A Meta-Analysis; Umejima et. al. (2021): Paper Notebooks vs. Mobile Devices: Brain Activation Differences During Memory Retrieval u. v. m.).
- Als **Schreibpapier** empfehlen wir Ihnen einen „College-Block“ mit kariertem oder rautiertem Papier. Solche College-Blöcke haben DIN A4-Format, sind üblicherweise 4-fach vorgelocht und haben links eine mikroperforierte Abreißkante. Der Vorteil ist, dass Sie die Blätter leicht abreißen und in den vorgenannten A4-Ordner einfügen können. Achten Sie dabei auf Qualität, d. h. wenn

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Sie es bekommen können: Einfach-gestrichenes mattes 90 g/m^2-Papier; mit 70 g/m^2-Papier werden Sie nicht glücklich, genau so wenig wie mit hochglänzendem, doppelt gestrichenem Papier (schmiert ohne Ende!). Der karierte oder rautierte Lineatur-Eindruck sollte blassgrau sein; auf jeden Fall nicht so penetrant, dass Sie z. B. in Rot schreiben müssen, um überhaupt einen Kontrast erkennen zu können.

- **Notebook / Tablet**: In einigen Modulen wird es erforderlich sein, ein Notebook mit Zeigegerät (Maus) zu den Lehrveranstaltungen mitzubringen; das gilt beispielsweise bei diversen Statistikmodulen (z. B. Softwarepakete R und R Studio), oder inspesondere in den technischen Studiengängen bspw. beim Erlernen einer Programmiersprache, bei Konstruktionsübungen, in der Elektrotechnik bei Schaltungssimulationen, u. ä.

  Unserer Meinung nach werden Sie in solchen Lehrveranstaltungen mit einem reinen Tablet nicht glücklich. Ziehen Sie ggf. den Erwerb eines sog. „Convertibles“ (wie bsp. Microsoft© Surface©) in Betracht.

- Haben Sie keine Hemmungen, mit Ihren **Lehrbüchern** zu **arbeiten**! Uns ist bewusst, dass beispielsweise der komplette Papula neu etwa 250.– EUR kostet.

  Denken Sie aber bitte nicht primär an eine mögliche Erlös-Schmälerung beim Wiederverkauf; nehmen Sie sich einige gute Leuchtmarker und streichen sich das an, was für Sie wichtig ist, und schreiben Sie Ihre eigenen Gedanken, Verweise, etc. in das Buch.

  „Gute Leuchtmarker“ erkennen Sie übrigens daran, dass Sie

  a) zwei Sekunden nach dem Markieren mit der Hand drüber wischen können, ohne dass es schmiert, und

  b) Sie über eine markierte Stelle mit Tinte schreiben können, ohne dass es verläuft.

  Mit billigem Gerät werden Sie nicht glücklich.

  Versuchen Sie auch, ob Ihnen die Lern-Technik des Exzerpieren hilft.[0.2]

- Sie werden für Ihr Studium in mehreren Modulen ein elementares **Zeichenbesteck** benötigen: Ein Geodreieck, ein Lineal, einen Zirkel. Achten Sie bitte auch dabei auf Qualität und nicht primär auf die Kosten. Das Geodreieck sollte die „große“ Variante sein, mit Griff (ab ca. 3 EUR), und der Zirkel sollte nicht unbedingt die 2,95-EUR-NoName-Version sein. Allerdings benötigen Sie heutzutage keine drei Nadelspitzen-Wechseleinsätze und keine fünf Tusche-Kartuschen-Wechseleinsätze mehr; es reicht, wenn Sie nur Bleistiftminen einsetzen können und der Zirkel eine stabile Rändelschraube zur Weiteneinstellung und einen abknickbaren Schenkel hat, der aber dann bitte auch in der eingestellten Position bleibt und nicht schon beim Hingucken verrutscht. Denken Sie auch an ein paar Quadratzentimeter feines Sandpapier zum Spitzen der Zirkelmine. Für 10 ... 15 EUR erhalten Sie entsprechende brauchbare Produkte.

[0.2] Exzerpieren: „Schreibend lesen“: Das Exzerpieren (lat. excerpere ”herausklauben, auslesen”) ist eine immer noch effektive Methode zum Erarbeiten von Textinhalten (Lesetechnik) und somit als Vorstufe zum Schreiben von Arbeiten (Hausarbeit) unverzichtbar. Das Exzerpt als ein Protokoll des Gelesenen kann sowohl wörtliche Zitate als auch sinngemäße Wiedergaben und Zusammenfassungen enthalten. Es ist eine individuelle Auswertung des Gelesenen, d. h., Sie bestimmen, was Sie für wichtig genug halten, es aufzuschreiben.
(Quelle: http://www.wissen.de/exzerpieren-schreibend-lesen; abgerufen am 2017-03-22)

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

- **Taschenrechner:** Sie benötigen für mehrere Module einen Taschenrechner. Bei Prüfungen sind aus nachvollziehbaren Gründen lediglich einfache, technisch-wissenschaftliche Rechner zugelassen. Insbesondere darf Ihr Taschenrechner weder eine Kommunikationsschnittstelle haben (SIM-Karte, WLAN, ...), noch – je nach Dozent oder Fakulät – graphisch sein, noch programmierbar sein, noch eingebaute, fest programmierbare Funktionen haben (beispielsweise für die Berechnung der Standardabweichung). Fragen Sie bei Ihren Dozenten nach, welche Modelle zugelassen sind; möglicherweise führt auch Ihr Fachbereich eine Liste „erlaubter“ Geräte.

  Vergleichen Sie die Geräte in einem guten Fachgeschäft, und wählen Sie dann Ihren persönlichen Favoriten aus.

  Kostenpunkt für ein brauchbares Gerät, was auch mal einen „Absturz“ vom Tisch aushält: Ca. 20 ... 30 EUR.

- Last but not Least: Ingenieure schreiben auch heutzutage noch überwiegend mit dem **Bleistift.** Finden Sie heraus, welche Härte zu Ihnen passt (meistens HB / H1), und besorgen Sie sich gute Bleistifte. Diese erkennen Sie daran, dass sie sich ohne Schmiererei wieder ausradieren lassen, und der verbleibende Abdruck dezent genug ist, um nicht aufzufallen.

  Für Nürnberg gilt: Hier haben Sie die Qual der Wahlen – Die Nürnberger Gegend ist Deutschlands „Bleistift-Zentrum“.

  Bei Prüfungen dürfen Sie keine Bleistifte verwenden, weil Bleistiftschrift nicht als „dokumentenecht“ gilt.

  Es fällt statistisch auf, dass Akademiker eher wenig mit Kugelschreibern arbeiten. Ich empfehle Ihnen Tinte (der gute alte „Schulfüller“ hat schon seine Berechtigung!), und zusätzlich einige bunte Micro-Faser-Stifte.

- Gehen Sie in ein **Schreibwaren-Fachgeschäft**, lassen Sie sich beraten und probieren Sie Schreibgerät-/Papier-Paarung hinsichtlich der Kriterien Handhabbarkeit, Durchschlagen auf die Rückseite, Radierbarkeit, Kontrast, Wischfestigkeit, Verhalten bei Hautfett / Hautschweiß usw. aus ... die über den Verlauf Ihres Studiums zusammen kommenden Mehrkosten von insgesamt vielleicht 100 EUR für qualitativ gute und zu Ihnen passende Produkte stehen wirklich in keinem Verhältnis zu dem Ärger, den Sie in den nächsten Jahren erfahren werden, wenn Sie sich vermeintlich günstige anonyme No-Name-Produkte z. B. vom Versandhandel besorgen und dann ohne vorherige Prüfung darauf vertrauen, dass Ihre Mitschriften rein zufällig nicht schmieren, abfärben, vergilben, ...

2 Tipps zum Lernen „der Mathematik“

Sie finden im Internet einige Tipps, wie sie sich „die Mathematik“ erarbeiten können.

Insbesondere empfehlen wir Ihnen das Studium der entsprechenden Ausführungen zu Beginn des Brückenkurs-Skripts von Herrn Martin Glatz[0.3] (siehe Literaturempfehlungen).

[0.3] **[Glat12]**.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Hier folgen einige Gesichtspunkt ein gedrängter Form; diese wurden vom Kollegen Gerhard Scheitler (Hochschule München, FOM Hochschule) aus verschiedenen Quellen (u. a. Arens / Hettlich u. a.) zusammen getragen.

Ratschläge zur Vorlesung

- ***Denken und schreiben Sie mit***. Durch das Schreiben prägt sich der Stoff besser ein.
- Es ist üblich, dass man nicht alle Inhalte einer Vorlesung sofort versteht; versuchen Sie aber, stets ***am Ball*** zu ***bleiben***.
- ***Stellen Sie Fragen***, falls Sie etwas nicht verstanden haben.
- Auch Dozenten machen Fehler, weisen Sie ihn höflich darauf hin, falls Sie dies bemerken.
- Versuchen Sie ***Ablenkungen*** (Facebook, WhatsApp etc.) zu ***vermeiden***.
- Sie können sich gerne während der Übungen unterhalten, aber nicht dann, wenn der Dozent etwas erklärt.

Ratschläge zu Hausaufgaben und Nachbearbeitung der Vorlesung

- Planen Sie mehrere Stunden für Hausaufgaben und ***Nachbearbeitung der Vorlesungsinhalte*** ein.
- Erinnern Sie sich an die Themen, zentralen Definitionen, Sätze und Regeln?
- Arbeiten Sie die Vorlesungsinhalte anhand der Aufgaben und des Skripts nach.
- Machen Sie sich Begriffe und Notationen an eigenen, einfachen Beispielen klar.
- Lernen Sie nicht stur auswendig; versuchen Sie, die ***Zusammenhänge*** zu ***verstehen***.
- Bilden Sie ***Arbeits-/Lerngruppen mit Kommiliton(inn)en***, mit denen Sie gut zusammenarbeiten können.
- Holen Sie sich erst dann Hinweise, wenn Sie nach intensiver Beschäftigung mit einer Aufgabe nicht weiterkommen.
- ***Erklären Sie den Stoff*** Ihren Kommilitonen.
- Formulieren Sie Ihre Lösungen so, dass jemand anderes Ihre Gedankengänge verstehen und nachvollziehen kann.

Ratschläge zum Umgang mit dem Vorlesungsskript

- Orientieren Sie sich bei der Vorbereitung auf die nächste Vorlesung am Inhalt des Vorlesungsskripts und ***notieren Sie sich erste Überlegungen*** und Fragen zum neuen Thema.
- ***Verwenden Sie das Skript neben den Vorlesungsnotizen*** ebenfalls ***bei der Nachbearbeitung*** der Vorlesung. Haben sich Ihre ersten Fragen geklärt?
- ***Fragen Sie*** direkt in der nächsten Vorlesung ***nach***, wenn Sie in der Nacharbeit etwas nicht verstanden haben.?
- ***Beachten Sie*** bei Sätzen und Definitionen ***alle Voraussetzungen***.
- Suchen Sie bei Herleitungen nach den Stellen, an denen die Voraussetzungen benutzt werden.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

- Bedenken Sie, dass in einem Skript auch (Schreib)fehler sein können.

Ratschläge zu Tutorien oder Lernvideos

- Besuchen Sie ***möglichst jedes Tutorium***.
- Stellen Sie im Tutorium Fragen.
- Machen Sie sich mit den ***Aufgaben vor dem Tutorium*** vertraut und ***bearbeiten*** Sie sie, wenn möglich – verstehen Sie alle Begriffe?
- ***Nutzen Sie das Angebot*** der vorlesungsbegleitenden Lehrvideos (falls vorhanden), bis hin zu selbst gesuchten YouTube-Videos!
- Beachten Sie dabei: Mathematik ist kein „Zuschauersport“ – Mathematik kann man nur durch ***Machen*** lernen!

Ratschläge zum konkreten Lösen von Aufgaben

- ***Bearbeiten Sie viele Aufgaben***: Übung macht den Meister!
- ***Lesen Sie*** die Aufgabenstellung ***genau***: Ist nach einer Lösung oder einer Lösungsmenge gefragt? Im zweiten Fall sollten Sie auch eine Menge angeben.
- ***Was sind die Voraussetzungen*** in der Aufgabenstellung?
- ***Welche Begriffe*** der Aufgabenstellung ***kennen Sie*** aus der Vorlesung oder anderen ähnlichen Aufgabenstellungen?
- Notieren Sie in Ihren Lösungen, wo Sie welche Ergebnisse der Vorlesung oder Übung benutzen – wiederholen Sie bei dieser Gelegenheit diese benutzten Ergebnisse.
- Ist Ihr ***Ergebnis plausibel***?
- Wenn Sie bei einer Aufgabe nicht weiterkommen, sollten Sie überlegen, ob eine ähnliche Aufgabe in einer Tutorübung besprochen worden ist. Wie wurde sie dort gegebenenfalls gelöst?
- Seien Sie nicht demotiviert, wenn Sie eine Aufgabe nicht lösen können – ***auch beim Lösungsversuch lernt man***.

Ratschläge zur Prüfungsvorbereitung

- ***Ständiges Mitarbeiten*** spart viel Prüfungsvorbereitung.
- ***Formulieren Sie*** die zentralen Definitionen, Sätze und Regeln separat in einer ausführlichen Zusammenfassung.
- ***Machen Sie sich einen Spickzettel*** mit einer eigenen, stichwortartigen Gliederung: Was Sie notieren, werden Sie wissen.

3 Schlussbemerkung

Bei Rückfragen, Problemen, Verständnis-Schwierigkeiten, ... sprechen Sie Ihre Brückenkurs-Dozenten an – ***nichts auf die „lange Bank“ schieben.***

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg für Ihr Studium, und natürlich insbesondere, dass Sie „die Mathematik“ mit gutem Ergebnis meistern werden.

Im August 2026,

Rolf B. Drescher (RBD) und Knuth Götz (KG)

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Literaturempfehlungen

Für die Literaturarbeit gibt es eine Reihe von Regeln und Vorgehensweisen, z. B. wie finde ich passende Literatur, wie zitiere ich richtig, u. v. m. Hierzu werden Ihnen entsprechende Einführungsveranstaltungen angeboten. Besuchen Sie diese!

Slide 10

Beachten Sie bitte insbesondere: Wenn Sie einer Buchempfehlung folgen möchten, dann ist in der Empfehlung nicht zwangsläufig die aktuelle, letzte Auflage des betreffenden Buches aufgeführt. Auch hier ist **Ihre Eigeninitiative** gefragt – ist die aktuelle Auflage wirklich „besser“ als die empfohlene? Sind ggf. sehr relevante Kapitel in einer neuen Auflage gestrichen oder sehr stark gekürzt? ...

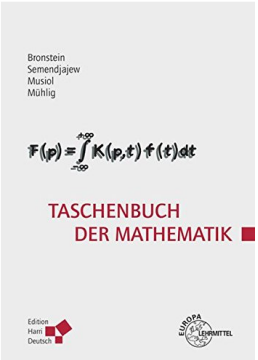
Die DNB-Internet-Links (zuletzt geprüft 2026-09-01) sind Verweise zum jeweiligen Titel in der Sammlung der Deutschen Nationalbibliothek. Die DNB bietet Ihnen (ähnlich wie andere Portale, wie EBSCO, Google Scholar, WorldCat, IEEE Xplore, KVK, OPAC u. v. m.) die Möglichkeit, wissenschaftliche Quellen zu finden und die bibliographischen Angaben für Ihr Literaturverzeichnis in verschiedenen Formaten zu exportieren.

Hinweis zum Urheberschutz: Die in der Literaturempfehlung gezeigten Buchcover-Bilder sind urheberrechtlich geschützte Werke im Eigentum der jeweiligen Rechteinhaber.

Sofern ein DNB-Eintrag vorhanden ist, wurden die Bilder aus diesem Eintrag entnommen. Bei Werken ohne DNB-Eintrag wurden die Bilder von der angegebenen URL entnommen. Werke ohne Coverbild wurden teilweise mit einem selbst erstellten Symbolbild versehen.

Formelsammlungen

Wie bereits angedeutet: Besorgen Sie sich eine gute Formelsammlung. Dabei meinen wir mit „gut“: Die Formelsammlung sollte umfassend sein und alle in der Ingenieurmathematik benötigten Teilgebiete abdecken.



[BRON20] „Der Bronstein“ gilt gemeinhin als „König der Formelsammlungen“; man nennt eine Funktion (scherzhaft) „Bronstein-integrabel“, wenn Sie in dieser Formelsammlung dazu eine Stammfunktion finden.

Bronstein, Semenjajew, Musiol, Mühlig: Taschenbuch der Mathematik.

Verlag Europa-Lehrmittel GmbH, 11. Auflage, 2020

DNB: https://d-nb.info/1214312756

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

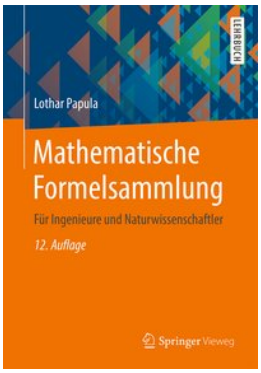
Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.



[**BART18**] Bartsch, Sachs: Taschenbuch mathematischer Formeln für Ingenieure und Naturwissenschaftler.

Carl Hanser Verlag, 24. Auflage, 2018

DNB: https://d-nb.info/1158689853



[**Papu17**] Papula: Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler.

Springer Vieweg, 12., überarbeitete Auflage 2017

DNB: https://d-nb.info/1120033896

Es gibt sicherlich noch viele weitere gute Formelsammlungen; nehmen Sie unsere Empfehlungen als Vorlage für die notwendigen Mindest-Inhalte. Eine Formelsammlung, wie sie an Gymnasien im Leistungskurs Mathematik verwendet wird, ist jedenfalls deutlich „zu dünn“ als Referenz für einen Ingenieur.

Lehrbücher speziell für den Brückenkurs



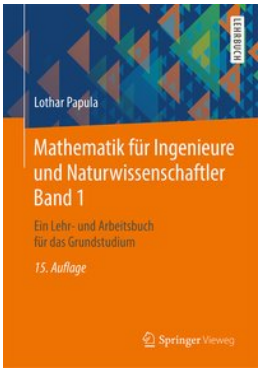
[**Bosc10**] Bosch, K.: Brückenkurs Mathematik: Eine Einführung mit Beispielen und Übungsaufgaben.

Oldenbourg Wissenschaftsverlag München; 14., korrigierte Auflage, 2010

DNB: https://d-nb.info/1006822836

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Lehrbücher

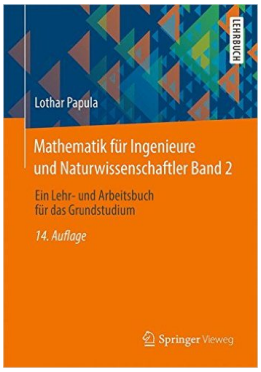


Wie bereits oben angedeutet: „Der Papula“ hat sich quasi als Standard für die Ingenieurmathematik etabliert.

Papula, L.: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1: Grundlagen. Funktionen, Differential- und Integralrechnung, Folgen und Reihen, Komplexe Zahlen.
Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium.

Vieweg + Teubner; 15., überarbeitete Auflage, 2018

DNB: https://d-nb.info/1159786844

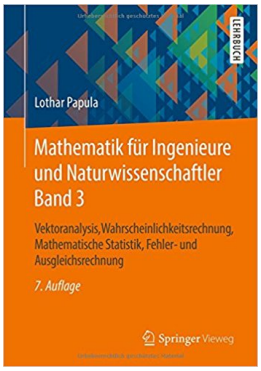


Wie bereits oben angedeutet: „Der Papula“ hat sich quasi als Standard für die Ingenieurmathematik etabliert.

Papula, L.: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2: Lineare Algebra, Fourier-Reihen, Differential- und Integralrechnung mit mehreren Variablen, Differentialgleichungen, Fourier- und Laplace-Transformation.
Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium.

Vieweg + Teubner; 14., überarbeitete und erweiterte Auflage, 2015

DNB: https://d-nb.info/1063202817

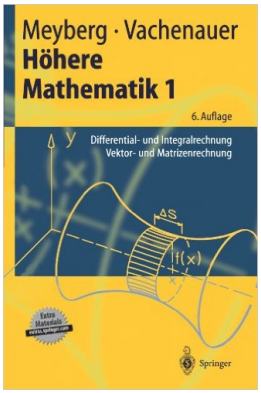


Wie bereits oben angedeutet: „Der Papula“ hat sich quasi als Standard für die Ingenieurmathematik etabliert.

Papula, L.: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 3: Vektoranalysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Statistik, Fehler- und Ausgleichsrechnung.
Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium.

Springer Vieweg Verlag; 7., überarbeitete und erweiterte Auflage, 2016

DNB: https://d-nb.info/107986556X



Meyberg, K., Vachenauer, P. (2001):

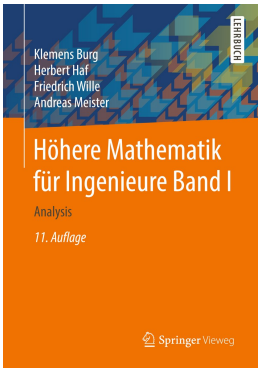
Höhere Mathematik 1: Differential- und Integralrechnung, Vektor- und Matrizenrechnung; 6., korrigierte Auflage, Heidelberg, Springer-Verlag 2001

Höhere Mathematik 2: Differentialgleichungen, Funktionentheorie, Fourier-Analysis, Variationsrechnung; 4., korrigierte Auflage, Heidelberg, Springer-Verlag 2001

DNB: https://d-nb.info/961928441 (Bd. 1)

DNB: https://d-nb.info/96192828X (Bd. 2)

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.



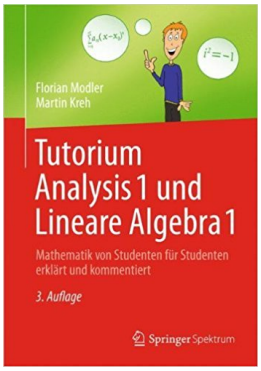
Burg, K., Haf, H., Wille, F., Meister, A. (2017):

Höhere Mathematik für Ingenieure Band I (Analysis); 11., aktualisierte und erweiterte Auflage, Wiesbaden, Springer Vieweg 2017

Höhere Mathematik für Ingenieure Band 3 (Gewöhnliche Differentialgleichungen, Distribution, Integraltransformationen); 6., aktualisierte Auflage, Wiesbaden, Springer Vieweg 2013

DNB: https://d-nb.info/1142234649 (Bd. 1)

DNB: https://d-nb.info/1032066822 (Bd. 3)

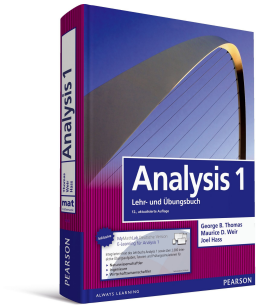


Modler, F., Kreh, M. (2014): Tutorium Analysis 1,2 und Lineare Algebra 1,2; 3. Aufl.

Heidelberg, Springer Spektrum Akademischer Verlag 2014

DNB: https://d-nb.info/1042240388 (1)

DNB: https://d-nb.info/1052148611 (2)

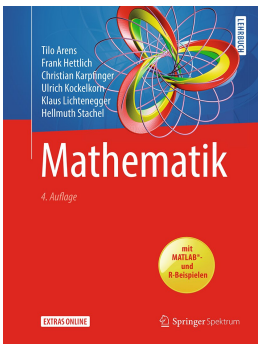


Thomas, G., Weir, M., Hass, J. (2014): Analysis 1 + 2; 12. Aufl.

Hallbergmoos, Pearson Studium 2014

DNB: https://d-nb.info/1026537088 (1)

DNB: https://d-nb.info/1029434093 (2)



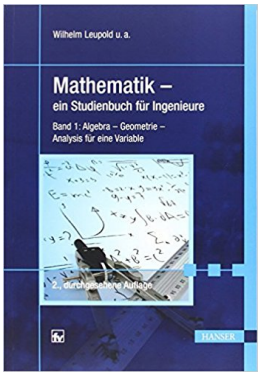
Arens, T., Hettlich, F., Karpfinger, C., Kockelkorn, U., Lichtenegger, K., Stachel, H. (2018): Mathematik; 4. Aufl.

Heidelberg, Springer Spektrum Akademischer Verlag 2018

DNB: https://d-nb.info/1159780455

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.



Leupold, W. (2003): Mathematik – ein Studienbuch für Ingenieure, Band 1 und 2

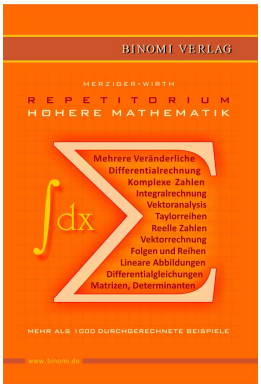
2. Aufl., Leipzig, Carl Hanser Verlag 2003

DNB: https://d-nb.info/969203209 (Bd. 1)

DNB: https://d-nb.info/97878443X (Bd. 2)

Selbstverständlich existieren darüber hinaus viele weitere gute Lehrbücher. Wiederum **Ihre Eigeninitiative:** Blättern Sie im Papula, vergleichen Sie es mit anderen Lehrbüchern, finden Sie heraus, welcher Autoren-Schreibstil Ihnen besonders liegt, und entscheiden Sie dann.

Repetitorien

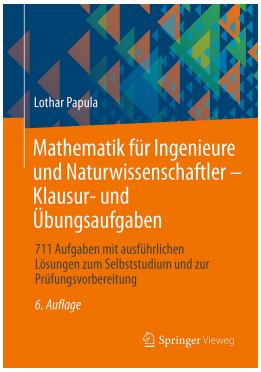


Merziger, G.; Wirth, Th.: Repetitorium Höhere Mathematik: Mehr als 1000 durchgerechnete Beispiele.

Binomi Verlag Barsinghausen; 7., revidierte Auflage 2016

DNB: https://d-nb.info/1084598930

Aufgabensammlungen



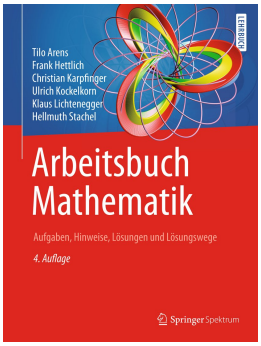
Papula, L.: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler - Klausur- und Übungsaufgaben: 711 Aufgaben mit ausführlichen Lösungen zum Selbststudium und zur Prüfungsvorbereitung.

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH - Springer Vieweg; 6., erw. u. überarb. Auflage 2020

DNB: https://d-nb.info/1211195678

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

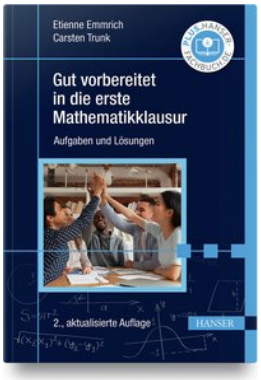
Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.



Arens, T., Hettlich, F., Karpfinger, C., Kockelkorn, U., Lichtenegger, K., Stachel, H. (2018): Arbeitsbuch Mathematik: Aufgaben, Hinweise, Lösungen und Lösungswege.

4. Auflage. Springer Spektrum 2018

DNB: https://d-nb.info/1161818642



Emmrich, E., Trunk, C. (2020): Gut vorbereitet in die erste Mathematikklausur: Aufgaben und Lösungen.

Hanser, 2., aktualisierte Auflage 2020

DNB: https://d-nb.info/1210295547

Online-Angebote

Sie finden auch recht gute Angebote im Internet; hierbei ist jedoch etwas Augenmaß geboten. Bekanntlich findet man Im Internet überwiegend eher Zweifelhaftes; nach „Juwelen“ muss man suchen.

Nachstehen eine kleine Auswahl - die Zielgruppen sind dabei gemischt, d. h. Sie finden – neben Angeboten für nichttechnische Fachrichtungen – auch Angebote für Naturwissenschaftler und Ingenieure.

Untenstehende Links wurden zuletzt am 2026-09-02 geprüft (sofern nicht anders angegeben).

Portale

Hier finden Sie einige Links zu Mathematik-Portalen.

Serlo:	https://de.serlo.org/mathe
Vorwerk:	https://www.vorwerg-net.de/Mathematik/Mathematik.htm
Arndt Brünner:	https://www.arndt-bruenner.de/mathe/mathekurse.htm
Mathe-Seiten:	https://www.mathe-seite.de/
Matroids Matheplanet:	https://matheplanet.com/

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Brückenkurs / Vorkurs

Online Mathematik Brückenkurs:
https://www.ombplus.de/ombplus/public/index.html

SOS Mathematik – Brückenkurs:
https://elearning.th-wildau.de/course/view.php?id=10656

Sammlung einzelner Seiten:
https://www.math.uni-hamburg.de/teaching/vorkurs/2017/uebungen.html

[**Glat12**] Glatz, Martin: **Hier besonders zu empfehlen:** Herr Glatz gibt auf den ersten 25 Seiten viele Informationen und Tipps zum „Mathematik-Lernen“.
https://oehunigraz.at/wp-content/uploads/2023/01/brueckenkurs-mathematik-skriptum-13-14-final.pdf

[**BOCK12**] Bock, Wolfgang / Bracke, Martin / Krumke, Sven O. / Stockis, Jean-Pierre:
https://www.math.uni-tuebingen.de/user/keilen/download/Lehre/VKSS13/vkskript.pdf

[**Bisc18**] Bischoff, Alfred:
https://www.ruhr-uni-bochum.de/mathe-wiwi/skripte/vorkurs

[**Kier21**] Kierfeld, Jan:
https://cmt.physik.tu-dortmund.de/storages/cmt-physik/r/kierfeld/lecture_notes/kierfeld_Vorkurs.pdf

[**BEUT20**] BEUTH Hochschule (Aufgabensammlung):
https://projekt.bht-berlin.de/fileadmin/projekt/brueckenkurse/brueckenkurs_aufg_verteilt.pdf

[**POTS15**] Universität Potsdam (Aufgabensammlung):
https://www.uni-potsdam.de/fileadmin/projects/mnfakul/Dokumente_und_%C3%9Cbersichten/Studium_und_Lehre/Aufgabensammlung_Brueckenkurs_2015.pdf

Skripten

[**Junk03**] Junk, Michael:
http://www.math.uni-konstanz.de/numerik/personen/rheinlae/Lehre/Analysis2/HoehereMathematik.pdf

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

[**Ippi17**] ~~Ippisch, Olaf:~~
~~https://www.mathematik.tu-clausthal.de/fileadmin/AG-WissenschaftlichesRechnen/mitschrift_in~~
Leider nicht mehr verfügbar! Siehe:
~~https://www.mathematik.tu-clausthal.de/arbeitsgruppen/wissenschaftliches-rechnen/veroeffent~~

[**Feru07**] Ferus, Dirk: Portalseite mit etlichen Links zu (Teil-)Skripten
https://page.math.tu-berlin.de/~ferus/skripten.html

[**Haer12**] Härterich, Jörg:
https://moodle.ruhr-uni-bochum.de/course/view.php?id=600

[**RUMP18**] Rumpf, Martin / Lenz, Martin / Kiesel, Antje:
https://ins.uni-bonn.de/media/public/courses/WS1718/ingenieurmathematik-i/MatheGeodaesie.pdf

Aufgabensammlungen

[**Haft14**] Haftmann, Rolf:
https://www-user.tu-chemnitz.de/~rhaf/Aufgabensammlung/Sammlung/Aufgabensammlung.pdf

[**Erdm11**] Erdmann, Carsten:
http://www.carsten-erdmann.de/files/Analysis_1_1_Uebungsskript.pdf

[**Froe03**] Fröhner:
https://www.mathacad.de/downloads/AufgabenSammlungAllgemeine_Mathe.pdf

[**Stro05**] Sammlung vieler Aufgaben (Universität Stuttgart) – wird fortlaufend weiter geführt / ergänzt:
https://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/aufgaben/

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Kleines Glossar Mathematik

Hier finden Sie ein begonnenes Glossar.

Es wird zukünftig ergänzt werden. Helfen Sie uns dabei! Melden Sie uns, wenn Sie einen mathematischen Begriff hier nicht finden.

Slide 11

Bearbeitungsstand: 2026-09-02.

Quellen: Im Wesentlichen WIKIPEDIA (deutsch)[0.1]; Abruf im Zeitraum August 2018 ... September 2026; Unterstützung durch KI.

Die Angaben wurden zu 100 % gegengeprüft.

A | B | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | Z

A

Abbildung

Eine **Abbildung** ist eine Funktion, also eine eindeutige Zuordnung, die jedem Element einer Quellmenge genau ein Element einer Zielmenge zuordnet.

Abduktion

Bei einer **Abduktion** wird zu einer beobachteten Folge oder Wirkung eine mögliche erklärende Ursache bzw. Hypothese gesucht. Ein abduktiver Schluss liefert im Allgemeinen keine logisch zwingende, sondern eine plausible Erklärung.

Ableitung

Die **Ableitung** $f'(x_0)$ einer Funktion f an einer Stelle x_0 ist – sofern sie existiert – der Grenzwert des Differenzenquotienten. Geometrisch ist sie die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

Abstraktion

Das Wort **Abstraktion** (lateinisch abstractus ‚abgezogen', Partizip Perfekt Passiv von abstrahere ‚abziehen', ‚entfernen', ‚trennen') bezeichnet meist den induktiven Denkprozess des erforderlichen Weglassens von Einzelheiten und des Überführens auf etwas Allgemeineres oder Einfacheres.

Abszisse

Die **Abszisse** ist die erste bzw. horizontale Koordinate eines Punktes im kartesischen Koordinatensystem, meist die x-Koordinate. Die zugehörige Achse heißt Abszissenachse oder x-Achse.

[0.1] Bitte beachten Sie: WIKIPEDIA ist an sich nicht zitierfähig. Wenn Sie dennoch daraus zitieren, müssen Sie die Angaben gegenprüfen.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Abzählbarkeit

Eine unendliche Menge heißt **abzählbar unendlich**, wenn sie gleichmächtig zur Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist. Eine Menge heißt **höchstens abzählbar**, wenn sie endlich oder abzählbar unendlich ist.

Addition

Die **Addition** gehört zu den Grundrechenarten:
Summand + Summand = Summe;
Beispiel: $3 + 4 = 7$.

Algebra

Die **Algebra** ist ein grundlegendes Teilgebiet der Mathematik, das sich unter anderem mit Rechenoperationen, Gleichungen und algebraischen Strukturen wie Gruppen, Ringen und Körpern befasst.

Algebraische Funktion

Eine **algebraische Funktion** $y = f(x)$ ist eine Funktion, deren Werte lokal eine Polynomgleichung $P(x, y) = 0$ erfüllen, wobei P ein von Null verschiedenes Polynom in zwei Variablen ist. Rationale Funktionen sind besondere algebraische Funktionen.

Allquantor

Der **Allquantor** $\forall$ ist ein Quantor der Prädikatenlogik. Die Formel $\forall x\, P(x)$ bedeutet: „Für alle x gilt $P(x)$“ bzw. „Für jedes x gilt $P(x)$“.

Äquivalenz

Zwei Aussagen bzw. Formeln heißen **logisch äquivalent**, wenn sie unter jeder Belegung denselben Wahrheitswert besitzen. Die Äquivalenz wird häufig mit $\Leftrightarrow$ oder $\equiv$ bezeichnet. Allgemein bedeutet Äquivalenz Gleichwertigkeit.

Äquivalenzklasse

Zu einer Äquivalenzrelation R auf einer Menge M ist die **Äquivalenzklasse** eines Elements $x \in M$ die Menge $[x] = \{y \in M \mid xRy\}$ aller zu x äquivalenten Elemente.

Äquivalenzrelation

Eine Relation R auf einer Menge M heißt **Äquivalenzrelation**, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Zu jedem $x \in M$ gehört die Äquivalenzklasse aller zu x äquivalenten Elemente.

Äquivalenzumformung

Eine **Äquivalenzumformung** überführt eine Gleichung oder Ungleichung in eine andere Form, ohne ihre Lösungsmenge zu verändern. Ausgangs- und Endaussage sind damit logisch äquivalent.

Alphabet

Ein **Alphabet** Σ_b ist eine wohldefinierte Menge von b unterscheidbaren Symbolen.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Analysis

Die **Analysis** ist die Lehre von Funktionen, Ableitungen, Integralen, Reihen und Grenzwerten. Sie untersucht, wie sich Größen verändern und wie man diese Veränderungen beschreibt und berechnet.

Antisymmetrie

Eine zweistellige Relation R auf einer Menge M heißt **antisymmetrisch**, wenn aus xRy und yRx stets $x = y$ folgt.

Applikate

Die **Applikate** ist in einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem die dritte Koordinate, also gewöhnlich die z-Koordinate. Die zugehörige Achse heißt Applikatenachse oder z-Achse.

Approximation

Eine **Approximation** ist eine gezielte Annäherung an einen exakten Wert, eine Funktion oder ein anderes mathematisches Objekt. Die Qualität einer Approximation wird häufig durch einen Fehler oder eine Fehlerschranke beschrieben.

Argument

Beim **logischen Schließen** wird aus einer Anzahl von Aussagen (den Prämissen oder Annahmen) eine neue Aussage (die Konklusion) gebildet.
Dieses Gebilde nennt man einen logischen Schluss oder ein **Argument**.

Assoziativität

Eine Verknüpfung heißt **assoziativ**, wenn bei drei Operanden die Klammerung die Auswertung nicht verändert. Beispiel: $3 + (4 + 5) = (3 + 4) + 5$.

Aussage

Eine **Aussage** ist ein sprachlicher oder formaler Ausdruck, dem eindeutig ein Wahrheitswert – in der klassischen Logik wahr oder falsch – zugeordnet werden kann.

Aussageform

Eine **Aussageform** ist ein Ausdruck mit freien Variablen, der nach Einsetzen zulässiger Werte zu einer wahren oder falschen Aussage wird. Aussageformen entsprechen in der Prädikatenlogik Prädikaten.

Aussagenlogik

Die **Aussagenlogik** untersucht, wie sich der Wahrheitswert zusammengesetzter Formeln aus den Wahrheitswerten ihrer Teilaussagen ergibt. Formeln werden aus Aussagenvariablen und Junktoren aufgebaut.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Aussagenvariablen

Eine **Aussagenvariable** ist ein formales Zeichen, beispielsweise A oder p, das für eine beliebige Aussage stehen kann. In der Aussagenlogik werden aus Aussagenvariablen und Junktoren Formeln aufgebaut.

Axiom

Ein **Axiom** ist eine spezielle Aussage: Ein Grundsatz einer Theorie, einer Wissenschaft oder eines axiomatischen Systems, der innerhalb dieses Systems weder begründet noch deduktiv abgeleitet wird.

B

Belegung

Eine **Belegung** ordnet den Variablen einer logischen Formel konkrete Werte bzw. Wahrheitswerte zu. Dadurch lässt sich der Wahrheitswert der Formel für diese Belegung bestimmen.

Beschränktheit

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt **nach oben beschränkt**, wenn es eine obere Schranke S mit $x \leq S$ für alle $x \in M$ gibt. Entsprechend heißt M **nach unten beschränkt**, wenn eine untere Schranke s mit $s \leq x$ für alle $x \in M$ existiert. Ist beides erfüllt, heißt M beschränkt.

Betrag

Der **Betrag** $|x|$ einer reellen Zahl x ist ihr Abstand von 0 auf der Zahlengeraden. Er ist stets nichtnegativ: $|x| \geq 0$, und $|x| = 0$ gilt genau für $x = 0$.

Beweis

Ein **Beweis** ist eine nachvollziehbare, nach anerkannten Schlussregeln geführte Herleitung einer mathematischen Aussage aus Definitionen, Voraussetzungen, bereits bewiesenen Aussagen und gegebenenfalls Axiomen.

Bijektion

Eine **Bijektion** ist eine bijektive Funktion.

Bijektivität

Eine Funktion heißt **bijektiv**, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist. Dann besitzt jedes Element der Zielmenge genau ein Urbild, und die Funktion besitzt eine Umkehrfunktion. Eine bijektive Funktion heißt auch **Bijektion**.

Bildmenge

Die **Bildmenge** einer Funktion $f\colon A \to B$ ist die Menge aller tatsächlich angenommenen Funktionswerte: $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq B$.

Binom

Ein **Binom** (lat. bi „zwei“; nomen „Name“) ist ein Polynom mit zwei Gliedern.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partner)
Alle Rechte vorbehalten
Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Binomialkoeffizient

Der **Binomialkoeffizient** $\binom{n}{k}$ gibt an, wie viele k-elementige Teilmengen eine n-elementige Menge besitzt: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ für $0 \leq k \leq n$. Er ist ein Grundbegriff der Kombinatorik.

Bitotalität

Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt **bitotal**, wenn sie sowohl links- als auch rechtstotal ist: Jedes Element von A besitzt mindestens einen Partner in B und jedes Element von B mindestens einen Partner in A.

Bivalenz

Das Prinzip der Zweiwertigkeit oder **Bivalenzprinzip** besagt für die klassische Logik, dass jede aussagefähige Formel genau einen der beiden Wahrheitswerte wahr oder falsch besitzt.

D

Deduktion

Bei einer **Deduktion** wird aus gegebenen Prämissen nach gültigen Schlussregeln eine Konklusion hergeleitet. Sind die Prämissen wahr und ist der Schluss gültig, muss auch die Konklusion wahr sein.

Definalität

Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt **linkstotal** oder **definal**, wenn jedes Element der Quellmenge A zu mindestens einem Element der Zielmenge B in Relation steht.

Definitionsbereich

Definitionsbereich ist eine andere Bezeichnung für die Definitionsmenge einer Funktion.

Definitionsmenge

Die **Definitionsmenge** oder der **Definitionsbereich** einer Funktion ist die Quellmenge aller zulässigen Argumente, für die die Funktion definiert ist.

Differenzenquotient

Der **Differenzenquotient** einer Funktion f beschreibt die mittlere Änderungsrate bzw. Steigung zwischen zwei Stellen:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \qquad \Delta x \neq 0.$$

Differenzierbarkeit

Eine Funktion f ist an der Stelle x_0 **differenzierbar**, wenn der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

existiert und endlich ist. Dieser Grenzwert ist die Ableitung $f'(x_0)$.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partner)
Alle Rechte vorbehalten
Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Differenzmenge

Die **Differenzmenge** zweier Mengen M_1 und M_2 ist die Menge aller Elemente, die in M_1, aber nicht in M_2 enthalten sind.

Direkter Beweis

Bei einem **direkten Beweis** wird die zu beweisende Aussage unmittelbar aus gegebenen Voraussetzungen, Definitionen und bereits bekannten Sätzen durch gültige Schlussfolgerungen hergeleitet.

Disjunktion

Die **Disjunktion** $A \vee B$ ist in der Aussagenlogik die inklusive ODER-Verknüpfung: Sie ist wahr, wenn mindestens eine der beiden Formeln wahr ist. In der Mengenlehre heißen zwei Mengen **disjunkt**, wenn ihre Schnittmenge leer ist.

Diskrete Mathematik

Die **diskrete Mathematik** untersucht endliche oder abzählbare Strukturen. Ein wichtiges Teilgebiet ist die Kombinatorik.

Distributivität

Distributivität beschreibt die Verträglichkeit zweier Verknüpfungen. Für Addition und Multiplikation gilt beispielsweise das Distributivgesetz $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Division

Die **Division** gehört zu den Grundrechenarten:
Dividend : Divisor = Quotient oder Zähler : Nenner = Quotient;
Beispiel: $4 : 2 = 2$.

E

Eineindeutigkeit

Eine Relation heißt **eineindeutig**, wenn sie sowohl rechts- als auch linkseindeutig ist: Zu jedem Element auf jeder Seite gehört höchstens ein Partner auf der anderen Seite. Bei einer Funktion entspricht Linkseindeutigkeit der Injektivität.

Element

Ein **Element** ist ein Objekt, das zu einer Menge gehört. Die Zugehörigkeit von x zu einer Menge M schreibt man $x \in M$.

Existenzquantor

Der **Existenzquantor** $\exists$ ist ein Quantor der Prädikatenlogik. Die Formel $\exists x\, P(x)$ bedeutet: „Es gibt mindestens ein x, für das $P(x)$ gilt“.

Extensionalbereich

Der **Extensionalbereich** eines Begriffs oder Prädikats ist die Menge der Gegenstände, auf die der Begriff bzw. das Prädikat zutrifft.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Extensionalität

Die **Extension** bzw. der Extensionalbereich eines Begriffs ist die Menge der Gegenstände, auf die er zutrifft. Die **Extensionalitätsthese** besagt vereinfacht, dass Begriffe hinsichtlich ihrer Extension betrachtet und bei gleicher Extension als gleichwertig behandelt werden.

F

Faktorisieren

Faktorisieren bedeutet, einen mathematischen Ausdruck als Produkt von Faktoren darzustellen. Bei ganzen Zahlen spricht man insbesondere von der Primfaktorzerlegung, wenn die Faktoren Primzahlen sind.

Fakultät

Für eine nichtnegative natürliche Zahl n ist die **Fakultät** definiert durch $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ für $n \geq 1$ und $0! = 1$. Sie tritt unter anderem in der Kombinatorik auf.

Folge

Eine **Folge** ist eine Funktion, deren Definitionsmenge typischerweise die natürlichen Zahlen oder ein Endabschnitt davon ist. Eine Zahlenfolge schreibt man etwa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Formel

Eine **Formel** ist ein nach festgelegten syntaktischen Regeln gebildeter mathematischer oder logischer Ausdruck. In der Logik kann einer geschlossenen Formel ein Wahrheitswert zugeordnet werden.

Funktion

Eine **Funktion** oder Abbildung $f\colon A \to B$ ordnet jedem Element x der Quellmenge A genau ein Element $f(x)$ der Zielmenge B zu. x heißt Argument, $f(x)$ Funktionswert.

Funktionalität

Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt **rechtseindeutig** oder **funktional**, wenn zu jedem $a \in A$ höchstens ein $b \in B$ mit aRb existiert. Ist die Relation zusätzlich linkstotal, ist sie eine Funktion.

Funktionswert

Ist f eine Funktion und x ein Element ihrer Definitionsmenge, so heißt $f(x)$ der **Funktionswert** von f an der Stelle x.

G

Ganze Zahl

Die **ganzen Zahlen** umfassen die natürlichen Zahlen, ihre negativen Gegenzahlen und 0: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Geordnetes Paar

Ein **geordnetes Paar** (a, b) besteht aus zwei Elementen, bei denen die Reihenfolge wesentlich ist. Im Allgemeinen gilt $(a, b) \neq (b, a)$. Geordnete Paare bilden die Elemente eines kartesischen Produkts.

Gerade

Eine **Gerade** ist ein eindimensionales geometrisches Objekt ohne Anfangs- und Endpunkt. In der Ebene kann eine nichtvertikale Gerade beispielsweise durch $y = mx + b$ beschrieben werden.

Gleichung

Eine **Gleichung** setzt zwei Terme mit dem Gleichheitszeichen gleich, beispielsweise $T_1 = T_2$. Enthält sie Variablen, besteht die Lösungsmenge aus den Belegungen, für die die Gleichheit wahr ist.

Glossar

Ein **Glossar** (lat. *glossarium*) ist eine Liste von Wörtern oder Fachbegriffen mit beigefügten Erklärungen, Definitionen oder Übersetzungen. Ist es eigenständig, spricht man auch von einem Wörterbuch; als Anhang eines Werkes von einem Wörter- oder Begriffsverzeichnis.

Graph

Der **Graph** einer Funktion $f\colon A \to B$ ist die Menge aller geordneten Paare $(x, f(x))$ mit $x \in A$: $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subseteq A \times B$.

Grenzwert

Der **Grenzwert** (Limes) beschreibt den Wert, dem sich die Werte einer Folge oder Funktion beliebig annähern. Beispielsweise bedeutet $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, dass $f(x)$ beliebig nahe bei L liegt, sobald x hinreichend nahe bei x_0 liegt.

Grundmenge

Eine **Grundmenge** oder ein **Universum** U ist die Menge aller Objekte, die in einem bestimmten Zusammenhang betrachtet werden. Andere dort auftretende Mengen werden häufig als Teilmengen von U aufgefasst.

Gruppe

Eine **Gruppe** ist eine Menge G mit einer inneren Verknüpfung, die assoziativ ist, ein neutrales Element besitzt und zu jedem Element ein inverses Element besitzt. Ist die Verknüpfung zusätzlich kommutativ, spricht man von einer abelschen Gruppe.

Größter gemeinsamer Teiler

Der **größte gemeinsame Teiler** (ggT) zweier ganzer Zahlen m und n, die nicht beide 0 sind, ist die größte positive natürliche Zahl, die sowohl m als auch n teilt.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

H

Hinreichend

Eine Bedingung A heißt **hinreichend** für eine Aussage B, wenn aus A stets B folgt. Damit ist nicht gesagt, dass A auch notwendig für B ist. Beispiel: Differenzierbarkeit einer Funktion an einer Stelle ist hinreichend für ihre Stetigkeit an dieser Stelle.

Hochzusammengesetzte Zahl

Eine **hochzusammengesetzte Zahl** ist eine positive ganze Zahl, die mehr positive Teiler besitzt als jede kleinere positive ganze Zahl.

I

Implikation

Die **Implikation** ist in der klassischen Aussagenlogik der Junktor „wenn A, dann B“, geschrieben $A \to B$. Die materiale Implikation ist genau dann falsch, wenn A wahr und B falsch ist; in allen anderen Fällen ist sie wahr. Davon zu unterscheiden ist die Aussage, dass B aus A logisch folgt.

Indexmenge

Eine **Indexmenge** ist eine Menge, deren Elemente zur Kennzeichnung bzw. Nummerierung anderer Objekte dienen. Häufig wird als Indexmenge eine Teilmenge der natürlichen Zahlen verwendet.

Indirekter Beweis

Bei einem **indirekten Beweis** oder Widerspruchsbeweis nimmt man die Negation der zu beweisenden Aussage an und zeigt, dass daraus ein Widerspruch folgt. In der klassischen Logik folgt daraus die ursprüngliche Aussage. Verwandt ist der Satz vom ausgeschlossenen Dritten.

Induktion

Induktion bezeichnet allgemein ein Schlussverfahren, bei dem aus einzelnen Beobachtungen oder Fällen eine allgemeinere Regel vermutet oder begründet wird. Davon zu unterscheiden ist die vollständige Induktion, ein mathematisches Beweisverfahren.

Infimum

Das **Infimum** einer nach unten beschränkten Menge M ist ihre größte untere Schranke. Es muss nicht Element von M sein. Ist es Element von M, so ist es zugleich das Minimum.

Injektion

Eine **Injektion** ist eine injektive Funktion.

Injektivität

Eine Funktion $f\colon A \to B$ heißt **injektiv**, wenn verschiedene Elemente der Quellmenge verschiedene Funktionswerte besitzen: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Eine injektive Funktion heißt auch **Injektion**.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Integral

Ein **Integral** fasst Beiträge einer Funktion über einem Intervall zusammen. Beim bestimmten Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ kann der Wert geometrisch als orientierter Flächeninhalt zwischen Funktionsgraph und x-Achse interpretiert werden.

Intensionalität

Die **Intension** eines Begriffs ist sein Begriffsinhalt, also die Gesamtheit der Merkmale oder Eigenschaften, die zur Bedeutung des Begriffs gehören. Intensionale Betrachtungen unterscheiden sich damit von der extensionalen Betrachtung der bezeichneten Gegenstände.

Intervall

Ein **Intervall** ist eine zusammenhängende Teilmenge der reellen Zahlen: Enthält ein Intervall zwei Zahlen $a < b$, so enthält es auch jede reelle Zahl x mit $a < x < b$. Je nachdem, ob die Randpunkte dazugehören, unterscheidet man offene, abgeschlossene und halboffene Intervalle.

Intervallschachtelung

Eine **Intervallschachtelung** ist eine Folge abgeschlossener, ineinander geschachtelter Intervalle $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots$. Gehen zusätzlich ihre Längen gegen 0, so enthalten alle Intervalle genau eine gemeinsame reelle Zahl.

Inverses Element

Ist e das neutrale Element einer Verknüpfung, so heißt a^{-1} **inverses Element** zu a, wenn $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$ gilt.

Irrationale Zahl

Eine **irrationale Zahl** ist eine reelle Zahl, die nicht als Quotient zweier ganzer Zahlen dargestellt werden kann. Beispiele sind $\sqrt{2}$ und π.

J

Junktor

Ein **Junktor** ist in der Aussagenlogik eine logische Verknüpfung, mit der aus einer oder mehreren Formeln neue Formeln gebildet werden, z. B. Negation, Konjunktion, Disjunktion und Implikation.

K

Kalkül

Ein **Kalkül** ist ein formales System von Zeichen und Regeln, mit denen aus gegebenen Formeln oder Aussagen weitere Ausdrücke abgeleitet werden können. Typischerweise umfasst ein Kalkül Grundzeichen, Formationsregeln und Transformations- bzw. Schlussregeln. Enthält ein Kalkül ausgezeichnete Ausgangsformeln (Axiome), spricht man von einem **axiomatischen Kalkül**.

Kardinalität

Kardinalität ist ein anderes Wort für die Mächtigkeit einer Menge.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Kartesisches Produkt

Das **kartesische Produkt** zweier Mengen A und B ist die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$.

Kegelschnitt

Ein **Kegelschnitt** ist eine ebene Kurve, die als Schnitt einer Ebene mit einem Kreiskegel entsteht. Zu den nicht ausgearteten Kegelschnitten gehören Ellipse, Parabel und Hyperbel; der Kreis ist ein Sonderfall der Ellipse.

Kleinstes gemeinsames Vielfaches

Das **kleinste gemeinsame Vielfache** (kgV) zweier ganzer Zahlen m und n, die nicht beide 0 sind, ist die kleinste positive natürliche Zahl, die sowohl ein Vielfaches von m als auch von n ist.

Koeffizient

Ein **Koeffizient** ist ein Faktor, der eine Variable oder einen Term multipliziert. Im Polynom $3x^2 - 2x + 5$ sind beispielsweise 3, -2 und 5 Koeffizienten.

Kombinatorik

Die **Kombinatorik** ist ein Teilgebiet der diskreten Mathematik. Sie untersucht insbesondere, auf wie viele Arten endliche Strukturen angeordnet, ausgewählt oder kombiniert werden können.

Kommutativität

Eine Verknüpfung heißt **kommutativ**, wenn die Reihenfolge ihrer beiden Operanden vertauscht werden kann, ohne dass sich das Ergebnis ändert. Beispiel: $3 + 5 = 5 + 3$.

Komplementärmenge

Das **Komplement** einer Menge M bezüglich einer Grundmenge U ist $U \setminus M$, also die Menge aller Elemente von U, die nicht in M enthalten sind.

Komplexe Zahl

Eine **komplexe Zahl** hat die Form $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $i^2 = -1$. Die Menge der komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Konjunktion

Die **Konjunktion** $A \wedge B$ ist die logische UND-Verknüpfung zweier Formeln. Sie ist genau dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr sind.

Konklusion

Die **Konklusion** (von lat. conclusio = „Abschluss“, „Schlussfolgerung“) ist der logische Schluss, der sich aus einer oder mehreren Prämissen ergibt. Beispiel aus der formalen Logik:

- Prämisse 1: Alle Menschen sind sterblich.
- Prämisse 2: Sokrates ist ein Mensch.
- Konklusion: Sokrates ist sterblich.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Kontradiktion

Eine **Kontradiktion** ist in der Aussagenlogik eine Formel, die unter jeder möglichen Belegung falsch ist. Umgangssprachlich bezeichnet „Widerspruch“ auch zwei Aussagen, die nicht gleichzeitig wahr sein können.

Kontraposition

Die **Kontraposition** einer Implikation „Wenn A, dann B“ ist die Aussage „Wenn nicht B, dann nicht A“. Beide Aussagen sind logisch äquivalent. Sie ist nicht mit dem Umkehrschluss „Wenn B, dann A“ zu verwechseln.

Koordinate

Eine **Koordinate** ist eine Zahl, die zusammen mit weiteren Koordinaten die Lage eines Punktes in einem Koordinatensystem beschreibt.

Koordinatensystem

Ein **Koordinatensystem** legt Regeln fest, mit denen Punkten eines geometrischen Raumes Zahlenwerte, die Koordinaten, zugeordnet werden. Im kartesischen Koordinatensystem werden in der Ebene meist x- und y-Koordinate, im Raum zusätzlich eine z-Koordinate verwendet.

Korollar

Ein **Korollar** ist eine Folgerung, die sich mit geringem zusätzlichen Begründungsaufwand aus einem bereits bewiesenen Satz ergibt.

Kurve

Eine **Kurve** ist ein eindimensionales geometrisches Objekt, das beispielsweise durch eine stetige Abbildung eines Intervalls in einen geometrischen Raum beschrieben werden kann. Anschaulich kann man sie als die Bahn eines sich stetig bewegenden Punktes auffassen.

Körper

Ein **Körper** ist eine Menge mit Addition und Multiplikation, in der die üblichen Rechenregeln gelten und jedes von 0 verschiedene Element bezüglich der Multiplikation ein Inverses besitzt. Beispiele sind $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

L

Lemma

Ein **Lemma** ist ein bewiesener Hilfssatz, der vor allem dazu dient, den Beweis eines anderen Satzes vorzubereiten oder zu vereinfachen.

Limes

Limes ist die lateinische Bezeichnung für den Grenzwert.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten
Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Logik

Die **Logik** untersucht Regeln des gültigen Schlussfolgerns und die formalen Beziehungen zwischen Aussagen. In der mathematischen Logik werden dazu formale Sprachen, Formeln und Schlussregeln verwendet.

Lösungsmenge

Die **Lösungsmenge** ist die Menge aller Werte oder Tupel, die eine gegebene Gleichung, Ungleichung, ein Gleichungs- bzw. Ungleichungssystem oder eine andere Bedingung erfüllen.

M

Matrix

Eine **Matrix** ist eine rechteckige Anordnung von Zahlen oder anderen mathematischen Objekten in Zeilen und Spalten. Matrizen werden unter anderem zur Darstellung linearer Abbildungen verwendet.

Maximum

Ein **Maximum** einer geordneten Menge M ist ein Element $m \in M$ mit $x \leq m$ für alle $x \in M$. Es ist also das größte Element von M und zugleich das Supremum, sofern es existiert.

Menge

Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte zu einem Ganzen. Diese Objekte heißen Elemente der Menge. Die Untersuchung von Mengen und Mengenoperationen ist Gegenstand der Mengenlehre.

Mengeninklusion

Die **Mengeninklusion** $A \subseteq B$ bedeutet, dass jedes Element von A auch Element von B ist; also ist A eine Teilmenge von B.

Mengenlehre

Die **Mengenlehre** untersucht Mengen, ihre Elemente, Beziehungen zwischen Mengen und Operationen wie Schnitt und Vereinigung.

Minimum

Ein **Minimum** einer geordneten Menge M ist ein Element $m \in M$ mit $m \leq x$ für alle $x \in M$. Es ist also das kleinste Element von M und zugleich das Infimum, sofern es existiert.

Monotonie

Eine Funktion heißt in einem Intervall ihres Definitionsbereiches:

- **Monoton steigend**, wenn stets gilt: Aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) \leq f(x_2)$. Etwas anschaulicher ausgedrückt: Die Funktion verläuft in dem Abschnitt teils horizontal, teils steigend.
  - **Streng monoton steigend**, wenn $f(x_1) < f(x_2)$. In dem Abschnitt steigt die Funktion durchgehend und verläuft niemals horizontal oder gar fallend.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

- **Monoton fallend**, wenn stets gilt: Aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) \geq f(x_2)$. Die Funktion verläuft in diesem Abschnitt somit teils horizontal, teils fallend.
  - **Streng monoton fallend**, wenn $f(x_1) > f(x_2)$. In diesem Abschnitt fällt die Funktion durchgehend und verläuft niemals horizontal oder gar steigend.

Multiplikation

Die **Multiplikation** gehört zu den Grundrechenarten:
Multiplikand · Multiplikator = Produkt oder Faktor · Faktor = Produkt;
Beispiel: $4 \cdot 2 = 8$.

Mächtigkeit

Die **Mächtigkeit** oder **Kardinalität** einer Menge beschreibt ihre Anzahl von Elementen. Bei endlichen Mengen ist dies die gewöhnliche Elementanzahl; bei unendlichen Mengen werden Kardinalzahlen zum Vergleich verschiedener Unendlichkeiten verwendet.

N

Natürliche Zahl

Die **natürlichen Zahlen** dienen dem Zählen und Ordnen. Sie werden mit $\mathbb{N}$ bezeichnet. Je nach Konvention beginnt $\mathbb{N}$ mit 0 oder mit 1; gegebenenfalls wird $\mathbb{N}_0$ für $\{0, 1, 2, \ldots\}$ verwendet.

Negation

Die **Negation** ist der einstellige Junktor „nicht“. Sie kehrt den Wahrheitswert einer Aussage um: Ist A wahr, ist $\neg A$ falsch, und umgekehrt.

Neutrales Element

Ein **neutrales Element** e einer Verknüpfung $\circ$ verändert andere Elemente nicht: $e \circ a = a \circ e = a$ für alle zulässigen a.

Normale

Eine **Normale** ist eine senkrechte Gerade zur Tangente an einem Punkt auf einer Kurve oder Fläche. Sie steht also im rechten Winkel zum betrachteten Objekt.

Notwendigkeit

Eine Bedingung A heißt **notwendig** für eine Aussage B, wenn B nur gelten kann, wenn auch A erfüllt ist. Damit ist nicht gesagt, dass A auch hinreichend für B ist. Beispiel: Stetigkeit ist eine notwendige Bedingung für Differenzierbarkeit.

O

Obere Schranke

Eine Zahl S heißt **obere Schranke** einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}$, wenn $x \leq S$ für alle $x \in M$ gilt. Die kleinste obere Schranke ist das Supremum.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Operator

Ein **Operator** ist eine Abbildung, deren Argumente und/oder Werte selbst mathematische Objekte wie Funktionen, Vektoren oder Matrizen sein können. Beispiele sind der Ableitungs- und der Integraloperator.

Ordinate

Die **Ordinate** ist die zweite bzw. vertikale Koordinate eines Punktes im kartesischen Koordinatensystem, meist die y-Koordinate. Die zugehörige Achse heißt Ordinatenachse oder y-Achse.

Ordnungsrelation

Eine **Ordnungsrelation** ist eine zweistellige Relation, mit der Elemente hinsichtlich einer Ordnung verglichen werden. Eine partielle Ordnung ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv; eine totale Ordnung erlaubt zusätzlich den Vergleich je zweier Elemente. Die übliche Relation $\leq$ auf den reellen Zahlen ist eine totale Ordnung.

P

Partialbruch

Ein **Partialbruch** ist ein Bruchterm, der als Summand in einer Partialbruchzerlegung einer rationalen Funktion auftritt.

Partialbruchentwicklung

Partialbruchentwicklung ist eine andere Bezeichnung für die Partialbruchzerlegung.

Partialbruchzerlegung

Die **Partialbruchzerlegung** oder **Partialbruchentwicklung** stellt eine rationale Funktion als Summe einfacher Partialbrüche dar. Sie erleichtert insbesondere die Integration rationaler Funktionen.

Partialdivision

Partialdivision ist eine andere Bezeichnung für die Polynomdivision.

Partition

Eine **Partition** einer Menge M ist eine Familie nichtleerer, paarweise disjunkter Teilmengen von M, deren Vereinigung ganz M ergibt.

Polare

Die **Polare** eines Punktes bezüglich eines nicht ausgearteten Kegelschnitts ist eine diesem Punkt durch die projektive Geometrie zugeordnete Gerade. Beim Kreis kann sie für einen außerhalb liegenden Punkt als Verbindungslinie der beiden Berührpunkte der von diesem Punkt ausgehenden Tangenten konstruiert werden.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Polynom

Ein **Polynom** in einer Variablen x ist ein Ausdruck der Form $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ mit nichtnegativen ganzzahligen Exponenten. Die Zahlen a_k heißen Koeffizienten.

Polynomdivision

Die **Polynomdivision**, auch **Partialdivision** genannt, ist ein mathematisches Rechenverfahren, bei dem ein Polynom durch ein anderes dividiert wird.

Potenz

Eine **Potenz** a^n bezeichnet für natürliche Exponenten n die wiederholte Multiplikation der Basis a mit sich selbst. a heißt Basis und n Exponent.

Potenzmenge

Die **Potenzmenge** einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M.

Primzahl

Eine **Primzahl** ist eine natürliche Zahl größer als 1, die genau zwei positive Teiler besitzt: 1 und sich selbst.

Produkt

Das **Produkt** ist das Ergebnis einer Multiplikation.

Prädikat

Ein **Prädikat** ist eine Aussageform mit einer oder mehreren freien Variablen. Werden für diese Variablen konkrete Werte eingesetzt oder werden sie durch Quantoren gebunden, entsteht eine Aussage.

Prädikatenlogik

Die **Prädikatenlogik** erweitert die Aussagenlogik um Prädikate, Variablen und Quantoren. Dadurch können Aussagen über Eigenschaften von Objekten und Beziehungen zwischen Objekten formalisiert werden.

Prämisse

Die **Prämisse** (von lat. praemissa = „das Vorausgeschickte“) bezeichnet eine Aussage, die in einer Argumentation als gegeben angenommen wird, um daraus eine logische Schlussfolgerung (Konklusion) abzuleiten. Beispiel aus der formalen Logik:

- Prämisse 1: Alle Vögel haben Federn.
- Prämisse 2: Ein Spatz ist ein Vogel.
- Konklusion: Ein Spatz hat Federn.

Q

Quantifikator

Quantifikator ist eine andere Bezeichnung für einen Quantor.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Quantor

Ein **Quantor** oder Quantifikator ist ein Operator der Prädikatenlogik, der angibt, für wie viele Elemente eines betrachteten Bereichs eine Aussageform gelten soll. Die wichtigsten Quantoren sind der Allquantor und der Existenzquantor. Quantoren binden Variablen.

Quellmenge

Die **Quellmenge** einer Funktion oder Relation ist die Menge, aus der die ersten Argumente stammen. Bei einer Funktion $f\colon A \to B$ ist A die Quellmenge.

R

Rationale Funktion

Eine **rationale Funktion** ist ein Quotient zweier Polynome, $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, wobei $q(x)$ nicht für alle x gleich 0 ist. Zur Definitionsmenge gehören nur die Stellen mit $q(x) \neq 0$.

Rationale Zahl

Eine **rationale Zahl** ist eine Zahl, die sich als Bruch $\frac{p}{q}$ mit ganzen Zahlen p, q und $q \neq 0$ darstellen lässt. Die Menge der rationalen Zahlen wird mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet.

Reelle Zahl

Die **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$ umfassen die rationalen und die irrationalen Zahlen. Sie können eindeutig als Punkte auf der Zahlengeraden dargestellt werden.

Reflexivität

Eine zweistellige Relation R auf einer Menge M heißt **reflexiv**, wenn für jedes $x \in M$ die Beziehung xRx gilt.

Reihe

Eine **Reihe** ist eine formale bzw. konvergente unendliche Summe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ der Glieder einer Folge (a_n). Die endlichen Summen $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ heißen Partialsummen und bilden die Folge der Partialsummen. Konvergiert diese Folge, so heißt ihr Grenzwert die Summe der Reihe.

Relation

Eine **Relation** R zwischen zwei Mengen A und B ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts $A \times B$. Gilt $(a, b) \in R$, schreibt man häufig auch aRb.

Ring

Ein **Ring** ist eine Menge mit zwei Verknüpfungen, üblicherweise Addition und Multiplikation. Die Addition bildet eine kommutative Gruppe; die Multiplikation ist assoziativ, und beide Verknüpfungen sind durch die Distributivgesetze miteinander verbunden. Je nach Konvention werden zusätzlich ein Einselement und/oder Kommutativität der Multiplikation gefordert.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

S

Satz

Ein **Theorem** oder **Satz** ist eine mathematische Aussage, deren Gültigkeit durch einen Beweis aus vorausgesetzten Aussagen, Definitionen und gegebenenfalls Axiomen hergeleitet wurde.

Satz vom ausgeschlossenen Dritten

Der **Satz vom ausgeschlossenen Dritten** ist ein Prinzip der klassischen Logik: Für jede Aussage A gilt $A \vee \neg A$.

Schnittmenge

Die **Schnittmenge** zweier Mengen M_1 und M_2 ist die Menge aller Elemente, die sowohl in M_1 als auch in M_2 enthalten sind.

Signum

Das **Signum** einer Zahl ist ihr Vorzeichen; die zugehörige Signumfunktion nimmt die Werte -1, 0 oder 1 an.

Signumfunktion

Die **Signumfunktion** $\operatorname{sgn}(x)$ gibt das Vorzeichen einer reellen Zahl an: $\operatorname{sgn}(x) = -1$ für $x < 0$, 0 für $x = 0$ und 1 für $x > 0$.

Steigung

Die **Steigung** einer Geraden beschreibt die Änderung der vertikalen gegenüber der horizontalen Koordinate. Für zwei Punkte mit $x_1 \neq x_2$ gilt $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Bei einer differenzierbaren Funktion ist $f'(x_0)$ die lokale Steigung ihres Graphen an der Stelle x_0.

Stetigkeit

Eine Funktion f heißt an einer Stelle x_0 **stetig**, wenn $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt. Anschaulich besitzt der Funktionsgraph dort keinen Sprung oder keine Lücke.

Subtraktion

Die **Subtraktion** gehört zu den Grundrechenarten:
Minuend - Subtrahend = Differenz;
Beispiel: $4 - 1 = 3$.

Supremum

Das **Supremum** einer nach oben beschränkten Menge M ist ihre kleinste obere Schranke. Es muss nicht Element von M sein. Ist es Element von M, so ist es zugleich das Maximum.

Surjektion

Eine **Surjektion** ist eine surjektive Funktion.

Surjektivität

Eine Funktion $f\colon A \to B$ heißt **surjektiv**, wenn jedes Element von Zielmenge B mindestens ein Urbild in A besitzt. Dann gilt $\operatorname{Bild}(f) = B$. Eine surjektive Funktion heißt auch **Surjektion**.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Symmetrie

Eine zweistellige Relation R auf einer Menge M heißt **symmetrisch**, wenn für alle $x, y \in M$ aus xRy stets yRx folgt.

Symmetrische Differenzmenge

Die **symmetrische Differenz** zweier Mengen M_1 und M_2 ist die Menge aller Elemente, die in genau einer der beiden Mengen enthalten sind: $(M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1)$.

T

Tangente

Eine **Tangente** an eine Kurve in einem Punkt ist eine Gerade, die dort dieselbe lokale Richtung bzw. Steigung wie die Kurve besitzt. Sie kann die Kurve an anderen Stellen durchaus schneiden.

Tautologie

Eine **Tautologie** ist in der Aussagenlogik eine Formel, die unter jeder möglichen Belegung wahr ist.

Teilmenge

Eine Menge A ist eine **Teilmenge** einer Menge B, wenn jedes Element von A auch in B enthalten ist. Man schreibt: $A \subseteq B$.

Term

Ein **Term** ist ein mathematischer Ausdruck, der aus Zahlen, Konstanten, Variablen, Funktionszeichen, Verknüpfungszeichen und Klammern aufgebaut sein kann und bei zulässiger Belegung einen Wert bezeichnet.

Theorem

Ein **Theorem** oder **Satz** ist eine mathematische Aussage, deren Gültigkeit durch einen Beweis aus vorausgesetzten Aussagen, Definitionen und gegebenenfalls Axiomen hergeleitet wurde.

These

Eine **These** ist eine Behauptung bzw. Aussage, deren Gültigkeit begründet oder bewiesen werden soll.

Transitivität

Eine zweistellige Relation R auf einer Menge M heißt **transitiv**, wenn für alle $x, y, z \in M$ aus xRy und yRz stets xRz folgt. Beispiel: Aus $2 < 5$ und $5 < 9$ folgt $2 < 9$.

U

Umkehrfunktion

Ist $f\colon A \to B$ bijektiv, so existiert eine **Umkehrfunktion** $f^{-1}\colon B \to A$ mit $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in A$ und $f(f^{-1}(y)) = y$ für alle $y \in B$.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Ungleichung

Eine **Ungleichung** vergleicht zwei Terme mit einem Ordnungszeichen, beispielsweise $<$, $\leq$, $>$ oder $\geq$. Ihre Lösungsmenge besteht aus den Belegungen, für die die angegebene Beziehung erfüllt ist.

Universum

Universum ist in diesem Zusammenhang eine andere Bezeichnung für die Grundmenge der betrachteten Objekte.

Untere Schranke

Eine Zahl s heißt **untere Schranke** einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}$, wenn $s \leq x$ für alle $x \in M$ gilt. Die größte untere Schranke ist das Infimum.

Urbild

Für eine Funktion $f\colon A \to B$ und eine Teilmenge $C \subseteq B$ ist das **Urbild** $f^{-1}(C) = \{x \in A \mid f(x) \in C\}$. Für einen einzelnen Wert $y \in B$ bezeichnet man entsprechend die Menge aller x mit $f(x) = y$ als Urbild von y.

V

Variable

Eine **Variable** ist ein Platzhalter für einen Wert, der sich ändern kann oder der (noch) nicht bekannt ist.

Vektor

Ein **Vektor** wird in elementaren Anwendungen durch eine geordnete Liste von Zahlen beschrieben, beispielsweise $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Vektoren können unter anderem Richtungen, Verschiebungen oder andere Größen mit mehreren Komponenten darstellen.

Venn-Diagramm

Ein **Venn-Diagramm** veranschaulicht Mengen durch Flächen und macht Beziehungen wie Schnitt, Vereinigung und Komplement sichtbar.

Vereinigungsmenge

Die **Vereinigungsmenge** zweier Mengen M_1 und M_2 ist die Menge aller Elemente, die in M_1 oder in M_2 enthalten sind.

Verkettung

Die **Verkettung** zweier Abbildungen ist das Hintereinanderausführen der beiden Abbildungen.

Vollständige Induktion

Die **vollständige Induktion** ist ein Beweisverfahren für Aussagen über natürliche Zahlen. Man zeigt zuerst einen Induktionsanfang und anschließend, dass aus der Gültigkeit für n die Gültigkeit für $n + 1$ folgt.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten
Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

W

Wahrheitswert

In der klassischen zweiwertigen Logik besitzt eine Aussage genau einen der beiden **Wahrheitswerte** wahr oder falsch.

Z

Zahlengerade

Die **Zahlengerade** veranschaulicht die reellen Zahlen als Punkte einer orientierten Geraden. Jeder reellen Zahl entspricht genau ein Punkt und umgekehrt.

Zahlenmenge

Eine **Zahlenmenge** ist eine Menge, deren Elemente Zahlen sind. Wichtige Beispiele sind $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

Zielmenge

Die **Zielmenge** einer Funktion $f\colon A \to B$ ist die Menge B, in der alle Funktionswerte liegen. Sie ist von der Bildmenge zu unterscheiden, die nur die tatsächlich angenommenen Werte enthält.

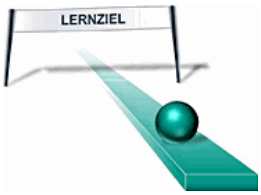
© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

1 Einleitung

1.1 Inhalt und Lernziele

Slide 12



Sie können nach erfolgreichem Abschluss des Seminars:

- in mathematischen Aufgabenstellungen die Grundrechenregeln sicher anwenden (insbesondere Klammerregeln);
- grundlegende algebraische Umformungen vornehmen;
- Potenzieren, Radizieren und die Logarithmusgesetze anwenden;
- lineare und quadratische Gleichungen lösen;
- Lösungen lösbarer Grundtypen für Wurzel-, Exponential- und logarithmische Gleichungen ermitteln;
- die Grundbegriffe und Grundrechenregeln komplexer Zahlen anwenden;
- die Satzgruppe des Pythagoras anwenden und mit sin, cos rechnen;
- mit den Grundlagen der Vektor- und Matrizenrechnung sicher umgehen;
- Polynome faktorisieren;
- mit den Grundfunktionen der Analysis sicher umgehen;
- die Grundlagen der Infinitesimalrechnung anwenden;
- die elementaren Grundlagen der Euklidischen Geometrie anwenden.

Dieser Brückenkurs Mathematik richtet sich vor allem an Studierende ingenieurwissenschaftlicher Fachrichtungen, die nicht über abiturentsprechende mathematische Kenntnisse verfügen. Aber auch dann, wenn Ihre Schulzeit schon länger zurückliegt, oder wenn Sie im Gebrauch mathematischer Formeln und Vorgehensweisen unsicher sind, werden Sie von der Teilnahme an diesem Seminar profitieren.

Dieser Brückenkurs ist eine kurze Wiederholung, Auffrischung und Zusammenfassung der für Ingenieure aller Fachrichtungen besonders wichtigen Aspekte der Schulmathematik. Er enthält schwerpunktmäßig die Themen:

- Elementare Mengenlehre
- Grund- und höhere Rechenarten
- Terme und Term-Umformungen
- Lösen von Gleichungen und Ungleichungen
- Die wichtigsten Kapitel der Euklidischen Geometrie
- Elementare Trigonometrie

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

- Zahlenfolgen und -Reihen
- Elementare Funktionen
- Einführung in die Infinitesimalrechnung
- Komplexe Zahlen

Die Autoren verzichten dabei in allen mathematischen Skripten bewusst auf mathematische Strenge; im Vordergrund steht die Vermittlung derjenigen Kenntnisse und Fertigkeiten, die Sie sowohl für Ihr Studium als auch für Ihr Berufsleben als Ingenieur benötigen werden. Insbesondere wird aus Zeitgründen fast vollständig auf logisch exakte Beweise verzichtet.

Natürlich kann ein derartiges Seminar niemals zwölf oder dreizehn Jahre schulischer Ausbildung ersetzen. Die Autoren erwartet von Ihnen, dass Sie die bei Ihnen auftretenden Probleme selber identifizieren, im Seminar (soweit möglich) ansprechen, und Wissenslücken in Eigenverantwortung schließen.

Der Zweck dieses Seminars kann demnach nur sein, Ihnen Anregungen zum Selbststudium zu bieten. Hierfür könnten z. B. die folgenden Selbst-Fragen hilfreich sein:

- Bei welchen der angegebenen Themen fehlt mir Vorwissen und / oder Übung?
- Was verstehe ich gar nicht?
- Wo sollte ich mir Sekundärliteratur suchen?
- Wo sollte ich jemanden um Hilfe bitten?

Für jede Mathematikveranstaltung – also auch für diese – gilt:

Nur die eigenständige Beschäftigung mit dem Unterrichtsstoff kann Ihnen die Sicherheit geben, dass Sie die Dinge wirklich verstanden haben. Deswegen bieten die Autoren mit diesem Skriptum eine Aufgabensammlung an. Diese sollten Sie ergänzend selbständig bearbeiten, und dabei auftretende Probleme im Seminar ansprechen.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

2 Einführung

2.1 Die mathematische Sprache

Die Mathematik ist eine streng **deduktive** Wissenschaft.[2.1] Fast jede Teildisziplin der Mathematik definiert eine Reihe von sog. Axiomen,[2.2] das sind Grundsätze, die nicht hergeleitet werden und die ohne Beweis als wahr gelten.

Slide 13

Ausgehend von diesen Axiomen werden durch streng logische Schlussfolgerungen neue Aussagen (Sätze) hergeleitet; der Wahrheitsgehalt einer Theorie (eines Satzes) wird umgekehrt mittels streng formal-logischen Vorgehens daran geprüft, ob sich die zu prüfende Aussage auf bereits bewiesene Sätze (und damit letztendlich bis zu den Axiomen) zurück führen lässt.

Beispiel: Die ersten drei Peano-Axiome[2.3] lauten (Teilgebiet Arithmetik):

Regel 2.1: Peano-Axiome

1. 1 ist eine natürliche Zahl.
2. Jede natürliche Zahl n hat eine natürliche Zahl $n+1$ als Nachfolger.
3. 0 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.

Die Mathematik bedient sich einer sehr strengen und formalen Sprache. Wenngleich es auch einige landestypische Besonderheiten gibt, und für denselben Sachverhalt manchmal verschiedene Symbole verwendet werden, so versteht doch jeder Mathematiker weltweit einen mathematischen Sachverhalt oder Gedankengang, den ein anderer Mathematiker unter Verwendung dieser „mathematischen Sprache“ aufgeschrieben hat.

Da die Mathematik die grundlegende Wissenschaft schlechthin ist, auf die jede andere Wissenschaft in der einen oder anderen Weise stets Bezug nimmt,[2.4] ist es unerlässlich, dass Sie sich für Ihr Studium und für Ihr späteres Leben einen soliden „Wortschatz“ dieser „mathematischen Sprache“ aneignen.

[2.1] lat. deductio = Abführen, Fortführen, Ableitung

[2.2] gr. $\alpha\xi\iota\omega\mu\alpha$ = Grundwahrheit, Grundsatz

[2.3] Giuseppe Peano (* 27. August 1858 in Spinetta, heute Teil von Cuneo, Piemont; † 20. April 1932 in Turin) war ein italienischer Mathematiker. Er arbeitete in Turin und befasste sich mit mathematischer Logik, mit der Axiomatik der natürlichen Zahlen (Entwicklung der Peano-Axiome) und mit Differentialgleichungen erster Ordnung.

[2.4] Selbst anscheinend „un-mathematische“ Disziplinen, wie beispielsweise die Sprachwissenschaften, Medizin, Archäologie oder die Sozialwissenschaften verwenden teilweise recht komplizierte mathematisch-statistische Verfahren.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Die Autoren möchten an dieser Stelle nicht zu formal werden und Ihnen eine formale Grammatik der mathematischen Symbole und Operatoren liefern. Stattdessen soll hier einfach eine Auflistung der wichtigsten Symbole, Operatoren und Fachbegriffe erfolgen. Diese Auflistung ist mit Sicherheit unvollständig, im mathematischen Sinne nicht exakt genug, und an der einen oder anderen Stelle fehlerbehaftet.

Die Autoren sind für Anregungen, Kritik und Hinweise auf Fehler dankbar.

Wenn Sie sich für eine exaktere und mathematisch strenge Definition interessieren, empfehlen wir das Skriptum von Markus Junker, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg.[2.5]

2.2 Das griechische Alphabet

Nicht nur in der Mathematik und den Natur- und Ingenieurwissenschaften, sondern auch in vielen anderen Bereichen des täglichen Lebens begegnen Ihnen die griechischen Buchstaben. Da die 52 Buchstaben des lateinischen Alphabets (Groß- und Kleinbuchstaben) nicht ausreichen, um z. B. alle physikalischen Größen bezeichnen zu können, bedient man sich zusätzlich der Buchstaben des griechischen Alphabets.

Für Studierende der mathematischen oder naturwissenschaftlich-technischen Fächer ist es unabdingbar, die griechischen Buchstaben zu kennen.

Das bedeutet nun nicht, dass Sie alt- oder neugriechisch lernen müssten.

Die Autoren empfehlen jedoch **dringend**, die griechischen Buchstaben auswendig zu lernen. Die nachfolgende Tabelle gibt Ihnen einen Überblick.

Die vierstellige Zeichenkombination gibt den Unicode-Wert des Zeichens in hexadezimaler Darstellung an, in Klammern steht die dezimale Umrechnung des Unicode-Wertes.

Bitte beachten Sie, dass es von einigen Buchstaben verschiedene Schreibweisen gibt, und dass die Buchstaben in den verschiedenen Computer-Schriftfonts ggf. unterschiedlich aussehen können. Nicht alle Buchstaben-Varianten sind in jedem Schriftfont enthalten (gilt insbesondere für das kleine Theta (Variante) ϑ und das kleine Sigma (Satzende-Sigma) ς).[2.6]

[2.5] **[Junk10]**.
[2.6] **[Dres16]**.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Hinweise zur Eingabe von Unicode-Zeichen in Textverarbeitungs-Programme:

LaTeX:

Griechische Buchstaben werden im Mathematik-Modus eingegeben.

\$\omega\$ ergibt das kleine Omega: ω

\$\Omega\$ ergibt das große Omega: Ω

\$\theta\$ ergibt das kleine Theta in der Hauptschreibweise: θ

\$\vartheta\$ ergibt das kleine Theta in der Variantenschreibweise: ϑ

u. s. w.

Microsoft©Word©:

1. Hexadezimalen Code eingeben und direkt danach ALT-C (die linke Alt-Taste drücken und gedrückt halten, und direkt anschließend zusätzlich die C-Taste drücken).

   Beispiel: 03d6 ALT-C $\rightarrow \varpi$

2. Die linke ALT-Taste gedrückt halten und mit dem rechten Ziffernblock den dezimalen Unicode eingeben, danach die linke ALT-Taste los lassen.

   Beispiel: ALT-958 $\rightarrow \xi$

   Anmerkung: NUM LOCK muss eingeschaltet sein; funktioniert nicht auf Notebooks (mangels Ziffernblock)

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Tabelle 2.1: Griechische Buchstaben

Buchstabe	Unicode groß	Unicode klein	LaTeX Groß	LaTeX Klein	Groß	Klein
Alpha	U+0391 (913)	U+03B1 (945)	`$A$`	`$\alpha$`	A	α
Beta	U+0392 (914)	U+03B2 (946)	`$B$`	`$\beta$`	B	β
Gamma	U+0393 (915)	U+03B3 (947)	`$\Gamma$`	`$\gamma$`	Γ	γ
Delta	U+0394 (916)	U+03B4 (948)	`$\Delta$`	`$\delta$`	Δ	δ
Epsilon	U+0395 (917)	U+03B5 (949)	`$E$`	`$\epsilon$`	E	ϵ
		U+03F5 (1013)		`$\varepsilon$`		ε
Zeta	U+0396 (918)	U+03B6 (950)	`$Z$`	`$\zeta$`	Z	ζ
Eta	U+0397 (919)	U+03B7 (951)	`$H$`	`$\eta$`	H	η
Theta	U+0398 (920)	U+03B8 (952)	`$\Theta$`	`$\theta$`	Θ	θ
		U+03D1 (977)		`$\vartheta$`		ϑ
Jota	U+0399 (921)	U+03B9 (953)	`$I$`	`$\iota$`	I	ι
Kappa	U+039A (922)	U+03BA (954)	`$K$`	`$\kappa$`	K	κ
Lambda	U+039B (923)	U+03BB (955)	`$\Lambda$`	`$\lambda$`	Λ	λ
My	U+039C (924)	U+03BC (956)	`$M$`	`$\mu$`	M	μ
Ny	U+039D (925)	U+03BD (957)	`$N$`	`$\nu$`	N	ν
Xi	U+039E (926)	U+03BE (958)	`$\Xi$`	`$\xi$`	Ξ	ξ
Omikron	U+039F (927)	U+03BF (959)	`$O$`	`$o$`	O	o
Pi	U+03A0 (928)	U+03C0 (960)	`$\Pi$`	`$\pi$`	Π	π
		U+03D6 (982)		`$\varpi$`		ϖ
Rho	U+03A1 (929)	U+03C1 (961)	`$P$`	`$\rho$`	P	ρ
		U+03F1 (1009)		`$\varrho$`		ϱ
Sigma	U+03A3 (931)	U+03C2 (962)	`$\Sigma$`	`$\sigma$`	Σ	σ
		U+03C3 (963)		`$\varsigma$`		ς
Tau	U+03A4 (932)	U+03C4 (964)	`$T$`	`$\tau$`	T	τ
Ypsilon	U+03A5 (933)	U+03C5 (965)	`$\Upsilon$`	`$\upsilon$`	Υ	υ
Phi	U+03A6 (934)	U+03C6 (966)	`$\Phi$`	`$\phi$`	Φ	ϕ
		U+03D5 (981)		`$\varphi$`		φ
Chi	U+03A7 (935)	U+03C7 (967)	`$X$`	`$\chi$`	X	χ
Psi	U+03A8 (936)	U+03C8 (968)	`$\Psi$`	`$\psi$`	Ψ	ψ
Omega	U+03A9 (937)	U+03C9 (969)	`$\Omega$`	`$\omega$`	Ω	ω

Quelle: Eigene Darstellung

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

2.3 Mathematische Operatoren und Symbole

Im Folgenden finden Sie eine kleine Zusammenstellung der wichtigsten mathematischen Operatoren und Symbole.

Tabelle 2.2: Symbole der Logik

Logik			
Symbol	**Bedeutung**	**Beispiel**	
$\neg$	Verneinung	$\neg A$	nicht A
$\wedge$	Konjunktion	$A \wedge B$	A und B
$\vee$	Disjunktion	$A \vee B$	A oder B
$\rightarrow \Rightarrow$	Implikation	$A \rightarrow B$	Wenn A, dann B
$\leftrightarrow \Leftrightarrow$	Bikonditional	$A \leftrightarrow B$	Genau dann B, wenn auch A
$\forall$	Allquantor	$\forall n \in \mathbb{N} : n + 1 > n$	Für alle n gilt: …
$\exists$	Existenzquantor	$\exists z \in \mathbb{Z} : z \cdot z = 4$	Es gibt (mindestens) ein z, …

Quelle: Eigene Darstellung

Tabelle 2.3: Relationen

Relationen		
Symbol	**Bedeutung**	**Beispiel**
$=$	Gleich	$x = 5$
$:=$	per Definition gleich	$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
$\simeq$	Asymptotisch gleich	$2^n \simeq 2^n + 1$ für $n \rightarrow \infty$
$\widehat{=}$	Entspricht	$50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$: 1 h Fahrtzeit $\widehat{=}$ 50 km Fahrtstrecke
$\sim \propto$	Proportional	$E \propto \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$ (Elektrostatik: Coulomb'sches Gesetz)
$\neq$	Ungleich	$3 \neq 7$
$\approx$	Ungefähr gleich	$125{,}8 \approx 126$
$<$	Kleiner als	$10 < 11$
$\leq \leqslant$	Kleiner als oder gleich	$11 \leq 11$
$>$	Größer als	$47 > 35$
$\geq \geqslant$	Größer als oder gleich	$47 \geq 35$
$\ll$	Klein gegen / Wesentlich kleiner als	$1 \ll 1000$
$\gg$	Groß gegen / Wesentlich größer als	$2500 \gg 40$

Quelle: Eigene Darstellung

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Tabelle 2.4: Symbole der Mengenlehre

Mengenlehre			
Symbol	**Bedeutung**	**Beispiel**	
$\in \notin$	Element-Operator	$x \in \mathbb{M}$ $x \notin \mathbb{M}$	x ist Element der Menge $\mathbb{M}$ x ist kein Element der Menge $\mathbb{M}$
$\subseteq \subset$ $\nsubseteq \not\subset$	Teilmenge-Operator	$\mathbb{M}_1 \subseteq \mathbb{M}_2$ $\mathbb{M}_1 \subset \mathbb{M}_2$ $\mathbb{M}_1 \nsubseteq \mathbb{M}_2$ $\mathbb{M}_1 \not\subset \mathbb{M}_2$	$\mathbb{M}_1$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{M}_2$ $\mathbb{M}_1$ ist eine echte Teilmenge von $\mathbb{M}_2$ $\mathbb{M}_1$ ist keine Teilmenge von $\mathbb{M}_2$ $\mathbb{M}_1$ ist keine echte Teilmenge von $\mathbb{M}_2$
$\cap$	Schnitt-Operator	$\mathbb{M}_1 \cap \mathbb{M}_2$	Schnittmenge von $\mathbb{M}_1$ und $\mathbb{M}_2$
$\cup$	Vereinigungs-Operator	$\mathbb{M}_1 \cup \mathbb{M}_2$	Vereinigungsmenge von $\mathbb{M}_1$ und $\mathbb{M}_2$
$\setminus$	Differenz-Operator	$\mathbb{M}_1 \setminus \mathbb{M}_2$	Differenzmenge $\mathbb{M}_1$ ohne $\mathbb{M}_2$
$\lvert\cdots\rvert$	Mächtigkeits-Operator	$\lvert\mathbb{M}\rvert$	Anzahl der Elemente in $\mathbb{M}$
$\triangle$	Symmetrische Differenzmenge	$\mathbb{M}_1 \triangle \mathbb{M}_2$	Symmetrische Differenzmenge von $\mathbb{M}_1$ und $\mathbb{M}_2$
$\times$	Kreuzprodukt (Kartesisches Produkt)	$\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2$	Kartesisches Produkt von $\mathbb{M}_1$ und $\mathbb{M}_2$
$\{\cdots\}$	Zugehörigkeits-Klammer	$M = \{x_1, x_2, x_3\}$	$x_1 \ldots x_3$ sind Elemente der Menge $\mathbb{M}$
$\emptyset \varnothing \{\,\}$	Leere Menge	$\emptyset \varnothing \{\,\}$	Die Menge, welche keine Elemente enthält
$\mathbb{M}$	Menge (allgemein)	$\mathbb{M}$	
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen	$\mathbb{N}$	$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ bzw. $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen incl. Null	$\mathbb{N}_0$	$\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ [2.7]
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen	$\mathbb{Z}$	
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen	$\mathbb{Q}$	
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen	$\mathbb{R}$	
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen	$\mathbb{C}$	

Quelle: Eigene Darstellung

[2.7] Hier ist die herrschende Lehrmeinung leider nicht eindeutig. Manche Autoren bezeichnen mit $\mathbb{N}$ die Zahlen ab einschließlich Eins, andere die Zahlen ab einschließlich Null. Durch $\mathbb{N}_0$ ist hingegen eindeutig die Menge $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ festgelegt.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

2.4 Mathematik-Software

Mittlerweile ist auf dem Markt eine Fülle mathematischer Software erhältlich. Stellvertretend seien nur einige genannt, die die Autoren selber verwenden.

Matlab ist weit verbreitet. Prüfen Sie in Ihrer Fakultät, ob die THN eine Campuslizenz zur Verfügung stellt.
Alternativ hierzu sei das freie und quelloffene **Octave** genannt: https://www.gnu.org/software/octave/, zuletzt geprüft am 2025-08-03. Octave ist zu über 99 % kompatibel zu Matlab.

Sage: Ein recht leistungsfähiges, freies (Open Source) Computeralgebrasystem.
Siehe https://www.sagemath.org, zuletzt geprüft am 2025-08-03.

Wolfram|Alpha: Internetbasierte intelligente Suchmaschine, die u. a. den Befehlsvorrat von Mathematica versteht.
Mathematica (Wolfram Research) ist derzeit bei Computeralgebrasystemen der Standard schlechthin, ist allerdings ein recht teures kommerzielles Programm. Die freie, in Wolfram|Alpha eingebaute Version hat allerdings eine CPU-Zeit-Beschränkung.
Siehe https://www.wolframalpha.com, zuletzt geprüft am 2025-08-03.
In meinem Downloadbereich finden Sie ein kleines Tutorial zum Umgang mit Wolfram|Alpha.

R ist eine freie (Open Source) mathematische Software mit Schwerpunkt auf statistischen Berechnungen. R verfügt über ausgesprochen flexible graphische Ausgabemöglichkeiten.
Siehe https://www.r-project.org, zuletzt geprüft am 2025-08-03.

WinFunktion (bhv Verlag), ab 2015 **Mathematik alpha** (Freeware) ist eine sehr einfach und intuitiv zu bedienende Software, die im Anspruch zwischen Abiturniveau und erstem Semester eines ingenieurwissenschaftlichen Studiums liegt. Diese Software kostete ca. 20 EUR und war als Hilfe für diejenigen unter Ihnen gut geeignet, die die elementaren Gebiete der Mathematik einüben möchten. Die freie Nachfolgerversion Mathematik alpha finden Sie hier zum Download: https://mathematikalpha.de/ (zuletzt geprüft 2025-08-03).

Nicht zuletzt sind auch in **EXCEL**© bzw. dem freien Pendant **Open Office Calc** eine ganze Fülle mathematischer Funktionen eingebaut; man kann sogar mit komplexen Zahlen rechnen.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

2.5 Regeln für die Schreibweise von Formeln

Für die Schreibweise von Formeln gibt es eine Reihe von Regeln, die u. a. in der DIN 1304 (Formelzeichen), DIN 1338 (Formelschreibweise und Formelsatz) und DIN EN ISO 80000-1:2013 (Größen und Einheiten) dargelegt sind.

Beachten Sie diese Regeln![2.8]

Hier ein stark verkürzter Auszug:

- Formelzeichen und Variablen werden kursiv geschrieben (z. B. R, I, i, x);
- In ihrer Bedeutung feststehende Bezeichner werden in Steilschrift geschrieben (z. B. $\sin, \cos, \mathrm{e}$, das Differential d bei $\mathrm{d}t$ oder $\mathrm{d}x$, die imaginäre Einheit i bzw. j);
- Zahlen und Einheiten werden in Steilschrift geschrieben (z. B. $R = 2\,\Omega$).
- Zwischen Zahlenwert und Einheit kommt ein „geschütztes schmales Leerzeichen“ (Shift-Strg-Leer in WORD©, 5/8 Leerzeichen \, in LaTeX).

[2.8] Spätestens bei Ihrer Abschlussarbeit werden Sie sich mit den genannten Konventionen auseinander setzen müssen. Wenn Sie sich nicht daran halten, ist Ihr Ergebnis zwar nicht „falsch“; die Mehrzahl der Leser wird dies jedoch negativ bemerken. Eine gute Zusammenfassung finden Sie z. B. hier:
http://www.ifte.de/infos/dissertation/formelschreibweise.pdf
https://tu-dresden.de/ing/elektrotechnik/ifa/ressourcen/dateien/richtlinie_wiss_arbeiten/auszug_din_1338.pdf?lang=de
Beide Links wurden zuletzt am 2024-08-03 geprüft.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Tabelle 2.5: Schreibweise von Formeln

Gegenstand	Schriftlage	Beispiele
Zahlen, in Ziffern geschrieben	geradestehend	1; 1234; −0,734
Zahlen, durch Buchstaben dargestellt, bei freier Bedeutung	kursiv/geneigt	n-fach; 2^n; a_{ik}
Zahlen, durch Buchstaben dargestellt, bei konventioneller Bedeutung	geradestehend	e = 2,71828… (eulersche Zahl) $i^2 = j^2 = -1$ (imaginäre Einheit)
Formelzeichen für physikalische Größen, auch physikalische Konstanten	kursiv/geneigt	i (elektr. Stromstärke); m (Masse) $e \approx 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ As (Elementarladung) $\mu_0 = 4\,\pi \cdot 10^{-7}$ H/m (magn. Feldkonstante)
Zeichen für Funktionen und Operatoren, wenn deren Bedeutung frei wählbar ist	kursiv/geneigt	$y = f(x)$ $u(t) = U_0 \sin \omega t$
Zeichen für Funktionen und Operatoren, wenn mit konventioneller Bedeutung	geradestehend	d; ∂; Δ; Σ div; lim; Re (Realteil); lg
Zeichen für Einheiten	geradestehend	m (Meter); µF (Mikrofarad)
Symbole für Chemie und Atomphysik	geradestehend	Fe (Eisen); e^- (Elektron)
Wortabkürzungen	geradestehend	p_{abs} (absolut); F_{min} (minimal)

Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Formelsatz; abgerufen am 2017-03-25

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

2.6 Häufige Fehler beim Schreiben mathematischer Formeln

Auf den nachfolgenden Seiten finden Sie eine Aufstellung fehlerhafter mathematischer Notationen, verbunden mit einem Hinweis auf die richtige Schreibweise.

Diese Aufstellung stammt von den Kollegen Scheitler (FOM Hochschule, Campus München) und Mahnke (FOM Hochschule, Campus Bremen und Hamburg) (mit vielem Dank für die freundliche Genehmigung zur Verwendung).

Das Nicht-Beachten bei Prüfungsleistungen führt i. d. R. zum Punktabzug.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Formale Anmerkungen zu mathematischen Notationen

Nach dem Berechnen eines Zahlenwertes darf mit dem Ergebnis nach dem Gleichheitszeichen nicht direkt weitergerechnet werden.

richtig	falsch
$5+6+1=12$ $12:4=3$	$5+6+1=\frac{12}{4}=3$

Bei Summen mit negativen Zahlen als zweiten Summanden und bei Produkten mit negativen Zahlen als zweiten Faktor sind Klammern um die negativen Zahlen zu setzen. (Subtraktion und Division analog)

richtig	falsch
$5\cdot(-3)=-15$ $5+(-3)=2$	$5\cdot-3=-15$ $5+-3=2$

Bei Doppelbrüchen ist der Hauptbruchstrich auf Höhe des Gleichheitszeichens zu schreiben

richtig	falsch
$y=\frac{\frac{1}{2}}{3}$	$y=\frac{\frac{1}{2}}{3}$; $y=\frac{\frac{1}{2}}{3}$; $y=\frac{\frac{1}{2}}{3}$

Bei Brüchen sind Rechensymbole zwischen diesen auf Höhe der Hauptbruchstriche zu notieren.

richtig	falsch
$K_2(q)=G_0+\frac{G_1}{q}+\frac{G_2}{q^2}+\frac{G_3}{q^3}$	$K_2(q)=G_0+\frac{G_1}{q}+\frac{G_2}{q^2}+\frac{G_3}{q^3}$

Bei Brüchen sind Zählerterm und Nennerterm vollständig durch einen Bruchstrich zu trennen.

richtig	falsch
$y=\frac{x+3}{x^2+5x+4}$	$y=\frac{x}{x^2+}+3\ 5x+4$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Bei Potenzen ist der Exponent kleiner als die Basis und oben rechts von der Basis zu notieren.

richtig	falsch
q^3	q^3 ; $q3$; ^3q

Bei Produkten zwischen Summen sind Klammern zu setzen.

richtig	falsch
$G(x) = x^2+5x+4$ $G'(x) = 2x+5$ $\Rightarrow \varepsilon_{x;G}(x) = (2x+5)\cdot\frac{x}{x^2+5x+4}$	$G(x) = x^2+5x+4$ $G'(x) = 2x+5$ $\Rightarrow \varepsilon_{x;G}(x) = 2x+5\cdot\frac{x}{x^2+5x+4}$

Bei Wurzeln ist der Radikant vom Wurzelzeichen zu umschließen

richtig	falsch
$r(x) = 0{,}5\cdot\sqrt{x^2-100}$	$r(x) = 0{,}5\cdot\sqrt{x^2}-100$

Beim Rechnen mit einheitenbehafteten Größen sind in den Wirtschaftswissenschaften entweder die Einheiten konsequent zu verwenden oder konsequent wegzulassen.

richtig	falsch
$3000€\cdot\frac{1-(1{,}04)^5}{1-1{,}04}\approx 16.248{,}97€$ $3000\cdot\frac{1-(1{,}04)^5}{1-1{,}04}\approx 16.248{,}97\ [€]$ $3000\cdot\frac{1-(1{,}04)^5}{1-1{,}04}\approx 16.248{,}97$	$3000\cdot\frac{1-(1{,}04)^5}{1-1{,}04}\approx 16.248{,}97€$

Bei Äquivalenzumformungen sind bei der Multiplikation mit Summen verbindlich Klammern zu setzen

richtig	falsch
$\frac{x}{3x+2} = 5 \quad \vert\cdot(3x+2)$	$\frac{x}{3x+2} = 5 \quad \vert\cdot 3x+2$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

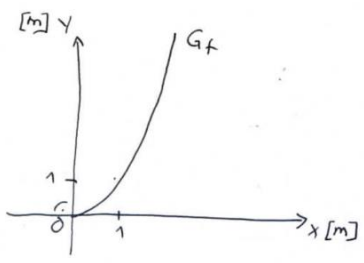
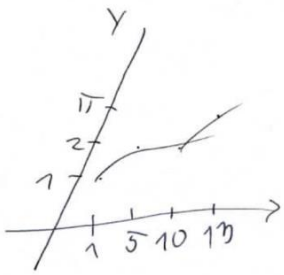
Beim Rechnen mit einheitenbehafteten Größen sind in den Ingenieurwissenschaften grundsätzlich die Einheiten in die Berechnung mit einzubeziehen.
Ein Weglassen ist nicht gestattet.

richtig	**falsch**
$v = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 12\,m} \approx 15{,}34 \sqrt{\frac{m^2}{s^2}} \approx 15 \frac{m}{s}$	$v = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 12} \approx 15 \frac{m}{s}$

Bei quadratischen Gleichungen sind diese sauber aufzustellen (auf einer Seite des Gleichheitszeichens muss eine Null stehen) und die Mitternachtsformel ist formal korrekt und abhängig von der Variablen der Gleichung zu formulieren.

richtig	**falsch**
$p(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$ $\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2}$ $= \begin{cases} -4 = \lambda_1 \\ -1 = \lambda_2 \end{cases}$	$p(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 4$ $x = \frac{-5 \pm \sqrt{75}}{2} - 4 \cdot 4$ $x_1 = -4$ $x_2 = -1$

Beim Zeichnen und Skizzieren eines Koordinatensystems sind als Achsen zwei gerade Zahlenstrahlen zu zeichnen, die sich im 90° Winkel schneiden, die Enden der Zahlenstrahlen sind in Richtung der positiven Werteentwicklung mit Pfeilspitzen zu markieren, die Achsen zu beschriften (Größe und Einheit) und je Achse mindestens zwei Skalierungspunkte zu wählen, von deren Abstand aus sich (je nach gewählter Skalierung) die Abstände aller weiteren Skalierungspunkte sinnvoll ableiten. Die eingezeichneten Graphen sind sauber zu beschriften.

richtig	**falsch**
	

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Bei Ableitungen von Funktionen einer Veränderlichen sind das korrekte Funktionssymbol und die korrekte Ableitungsvariable zu verwenden.	
richtig	**falsch**
$p(a) = a^2 + 5a + 4$ $p'(a) = 2a + 5 = \frac{d}{da} p(a)$	$p(a) = a^2 + 5a + 4$ $f(x) = 2a + 5$ $\frac{dp(a)}{dx} = 2a + 5$

Bei partiellen Ableitungen von Funktionen mehrerer Veränderlicher sind das korrekte Funktionssymbol und die korrekte Ableitungsvariable zu notieren.	
richtig	**falsch**
$K(x;y) = x^2y^2 + 5xy + x$ $\frac{\partial K}{\partial x} = 2xy^2 + 5y + 1$ $K_y = 2x^2y + 5x$ $\partial_x K = 2xy^2 + 5y + 1$	$K(x;y) = x^2y^2 + 5xy + x$ $\frac{2}{\partial x} = 2xy^2 + 5y + 1$ $K'(y) = x^2 \cdot 2y + 5x$

Bei Integralen ist das Differenzial verbindlich zu notieren.	
richtig	**falsch**
$I = \int \frac{1}{x} dx$	$I = \int \frac{1}{x}$

Bei Integralen über Summen sind diese in Klammern zu setzen.	
richtig	**falsch**
$I = \int \left(\frac{1}{x} + x^2\right) dx$	$I = \int \frac{1}{x} + x^2 \, dx$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Bei unbestimmten Integralen ist die additive Konstante bei der Lösung verbindlich zu setzen.

richtig	falsch
$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C \quad (C \in \mathbb{R})$	$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}$

Bei der Substitutionsmethode von bestimmten Integralen sind nach der Substitution entweder die umgerechneten Integrationsgrenzen anzugeben oder die ursprünglichen zunächst in Klammern zu setzen und dann nach der Rücksubstitution einzusetzen.

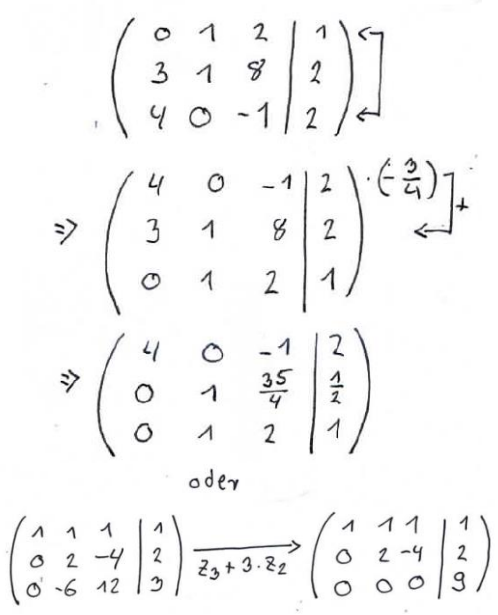
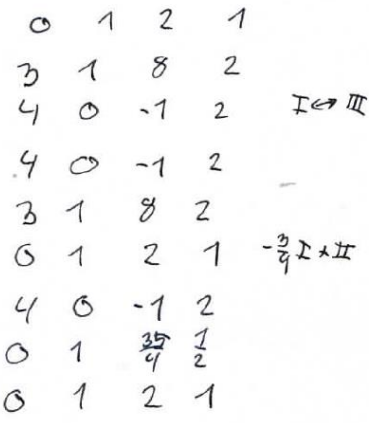
richtig	falsch
$I = \int_0^1 \sqrt{2x+1}\,dx$ $u = 2x+1$, $\frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$ OG: $x=1$, $u=3$; UG: $x=0$, $u=1$ $\Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_1^3 \sqrt{u}\,du$ oder $\int_0^1 \sqrt{2x+1}\,dx = \left[\begin{array}{l} u = 2x+1 \\ du = 2dx \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int_1^3 \sqrt{u}\,du$	$\int_0^1 \sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{u}\,dx$ $\int_0^1 \sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{u}\,du$ $\int_0^1 \sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du$

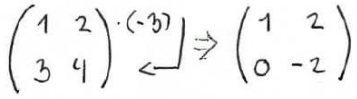
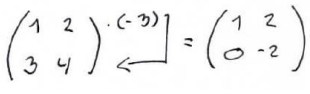
Bei der partiellen Integration bestimmter Integrale sind die Integrationsgrenzen durchgängig zu verwenden.

richtig	falsch
$\int_0^1 x\cdot e^x\,dx = [x\cdot e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx$ oder $\int_0^1 x\cdot e^x\,dx = x\cdot e^x\Big\vert_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx$	$\int_0^1 x\cdot e^x\,dx = x\cdot e^x - \int_0^1 e^x\,dx$ $\int_0^1 x\cdot e^x\,dx = x\cdot e^x - \int e^x\,dx$

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Bei Matrizen sind die korrekten Klammern zu verwenden.	
richtig	**falsch**
$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$ oder $\begin{matrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{matrix}$

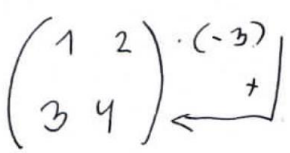
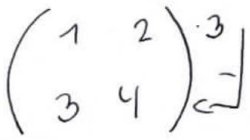
Beim Gaußverfahren sind die Klammern der erweiterten Koeffizientenmatrix verbindlich zu setzen und die elementaren Umformungen eindeutig zu benennen.	
richtig	**falsch**
	

Beim Gaußverfahren sind zwischen Gaußschritten maximal Implikationspfeile zulässig.	
richtig	**falsch**
	

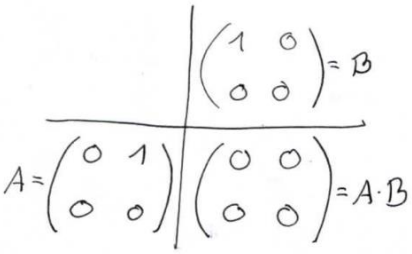
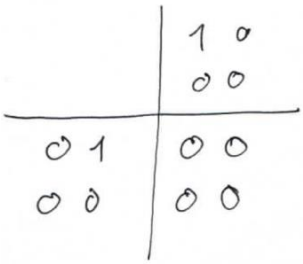
© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

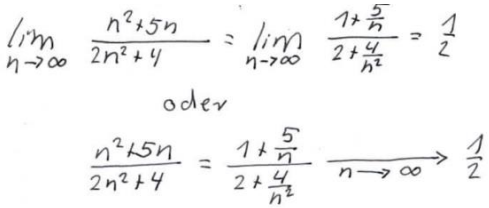
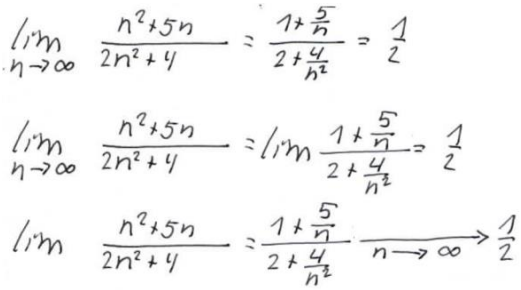
Beim Gaußverfahren wird bei der Formulierung der Gaußschritte in der Pfeilsymbolik ausschließlich addiert.

richtig	**falsch**
	

Beim Falkschen Schema sind die Matrizenklammern verbindlich zu notieren..

richtig	**falsch**
	

Beim Berechnen von Grenzwerten sind die Grenzwertbedingungen entweder bei jeder Gleichheit oder erst am Ende der Termumformungen konsequent einheitlich zu formulieren.

richtig	**falsch**
	

© 2018 Prof. Dr. G. Scheitler und Prof. Dr. N. Mahnke

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

3 Grundlegende Rechenfertigkeiten

3.1 Die 4 Grundrechenarten

3.1.1 Addition

Slide 14

Definition 3.1: Addition

Die ***Addition*** (lateinisch additio, von addere „hinzufügen“), umgangssprachlich auch „Plus-Rechnen“ oder „Und-Rechnen“ genannt, ist eine der vier Grundrechenarten in der Arithmetik.[3.1]

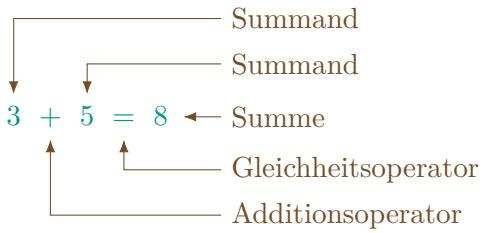
Die Addition basiert auf dem Vorgang des Zählens. Deshalb verwendet man für den Vorgang, eine Addition auszuführen, neben „Addieren“ auch den Ausdruck „Zusammenzählen“.

Das Rechenzeichen für die Addition ist das Pluszeichen „+“. Es wurde 1489 von Johannes Widmann eingeführt.

Beispiel: $2 + 3 = 5$ wird gelesen als „zwei plus drei (ist) gleich fünf“ oder umgangssprachlich „zwei und drei ergibt fünf“.

Slide 15

Die rechts stehende Abbildung verdeutlicht die übliche Nomenklatur in der mathematischen Sprache.



Slide 16

Beim schriftlichen Addieren werden die Summanden übereinander geschrieben und von rechts nach links stellenweise addiert.

Slide 17

Falls sich dabei ein Übertrag in die nächsthöhere Stelle ergibt, wird dieser entweder dort notiert – oder man merkt sich diesen Übertrag.

		4	7	8	9	9
+		7	1	3	4	9
	1		1	1	1	
=	1	1	9	2	4	8

Werden mehrere Zahlen schriftlich addiert, dann kann sich auch ein mehrfacher Übertrag ergeben.

Dieser wird ebenfalls in der nächsthöheren Stelle notiert – oder gemerkt – und entsprechend berücksichtigt.

		4	7	8	9	9
+		7	1	3	4	9
+		2	5	0	8	4
+		8	9	9	8	7
	2	2	2	3	2	
=	2	3	4	3	1	9

Auch Dezimalzahlen werden schriftlich stellenweise addiert. Dabei müssen die Zahlen so untereinander geschrieben werden, dass die ***Dezimalkommas untereinander stehen***. Dadurch befinden sich jeweils gleichwertige Stellen in derselben Spalte.

Haben die Summanden unterschiedlich viele Nachkommastellen, können fehlende Nachkommastellen durch Nullen ergänzt werden. Beispielsweise gilt

[3.1] https://de.wikipedia.org/wiki/Addition; Abruf 23-JUL-2020.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

$47{,}38 = 47{,}380$.

Anschließend wird wie bei natürlichen Zahlen von rechts nach links addiert. Entstehende Überträge werden in der nächsthöheren Stelle berücksichtigt. Das Dezimalkomma der Summe steht in derselben Spalte wie die Dezimalkommas der Summanden.

	4	7	,	3	8	0
+		5	,	4	2	7
	1			1		
=	5	2	,	8	0	7

Slide 19

3.1.1.1 Übungsaufgaben zur schriftlichen Addition

Übungsaufgabe 3.1: Schriftliche Addition v1

Addieren Sie schriftlich. Tragen Sie auftretende Überträge in die kleinen Kästchen ein.

.1.97)

		2	4	3
+		5	1	6
=				

??

.1.98)

		3	1	4	2
+		4	2	5	6
=					

??

.1.99)

		2	3	8
+		1	4	5
=				

??

.1.100)

		4	7	2	6
+		3	5	8	1
=					

??

.1.101)

		4	5	8	7	9
+		2	3	6	5	4
=						

??

.1.102)

		8	0	7	5	4
+			6	9	3	7
=						

??

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

.1.103)

		9	7	2	4	9
+		6	5	7	6	8
=						

??

.1.104)

		6	8	5	3	4	7
+		4	9	6	8	7	5
=							

??

.1.105)

		1	2	3	4	5
+		2	3	4	5	6
+		3	4	5	6	7
=						

??

.1.106)

		3	6	9	7	5
+		4	1	8	8	5
+		2	5	7	9	7
=						

??

.1.107)

		4	8	7	2	6
+		3	5	6	8	9
+		2	7	8	5	4
+		1	9	4	6	7
=						

??

.1.108)

	4	7	,	3	8	0
+		5	,	4	2	7
=			,			

??

.1.109)

	1	2	8	,	7	5	0
+		3	6	,	9	8	6
=				,			

??

.1.110)

		7	,	3	9	5
+	4	8	,	2	7	0
+		6	,	9	0	8
=			,			

??

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

.1.111)

	1	2	8	7	,	4	5	0
+			9	6	,	8	0	7
+				7	,	9	0	0
+		3	5	6	,	0	2	8
=					,			

??

3.1.2 Subtraktion

Definition 3.2: Subtraktion

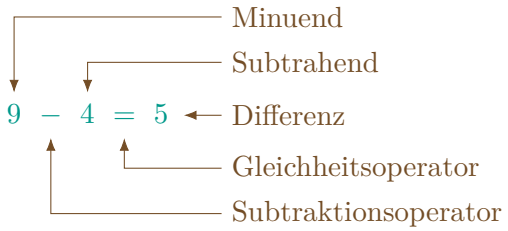
Die ***Subtraktion*** (von lat. subtrahere „wegziehen“, „entfernen“), umgangssprachlich auch „Minus-Rechnen“ genannt, ist eine der vier Grundrechenarten der Arithmetik.[3.2]

Unter der Subtraktion versteht man das Abziehen einer Zahl von einer anderen. Mathematisch handelt es sich bei der Subtraktion um eine zweistellige Verknüpfung.

Die Subtraktion ist die Umkehroperation der Addition. Das Rechenzeichen für die Subtraktion ist das Minuszeichen „−“.

Slide 22

Die rechts stehende Abbildung verdeutlicht die übliche Nomenklatur in der mathematischen Sprache.



Slide 23

Beim schriftlichen Subtrahieren werden Minuend und Subtrahend übereinander geschrieben und von rechts nach links stellenweise subtrahiert.

	7	1	3	4	9
−	4	7	8	9	9
	1	1	1		
=	2	3	4	5	0

Slide 24

Falls sich dabei eine „Anleihe“ von der nächsthöheren Stelle ergibt, wird diese notiert – oder gemerkt.

Bei mehreren Subtrahenden werden diese zunächst addiert und die Summe dann gemeinsam stellenweise vom Minuend abgezogen.

	2	1	5	6	8	0
−		7	1	3	4	9
−		2	5	0	8	4
−		8	9	9	8	7
	2	2	1	2	2	
=		2	9	2	6	0

Dabei kann es zu mehrfachen „Anleihen“ kommen – diese werden notiert oder gemerkt und entsprechend berücksichtigt.

Auch Dezimalzahlen werden schriftlich stellenweise subtrahiert. Dabei müssen Minuend und Subtrahend so untereinander geschrieben werden, dass die ***Dezimalkommas untereinander stehen***. Dadurch befinden sich jeweils gleichwertige Stellen in derselben Spalte.

[3.2] https://de.wikipedia.org/wiki/Subtraktion; Abruf 23-JUL-2020.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Haben Minuend und Subtrahend unterschiedlich viele Nachkommastellen, können fehlende Nachkommastellen durch Nullen ergänzt werden.

Beispielsweise gilt

$$47{,}38 = 47{,}380.$$

	4	7	,	3	8	0
−		5	,	1	2	7
					1	
=	4	2	,	2	5	3

Anschließend wird – wie bei natürlichen Zahlen – von rechts nach links subtrahiert. Falls erforderlich, wird eine „Anleihe“ von der nächsthöheren Stelle vorgenommen. Das Dezimalkomma der Differenz steht in derselben Spalte wie die Dezimalkommas von Minuend und Subtrahend.

Slide 26

3.1.2.1 Übungsaufgaben zur schriftlichen Subtraktion

Übungsaufgabe 3.2: Schriftliche Subtraktion v1

Subtrahieren Sie schriftlich. Tragen Sie erforderliche „Anleihen“ in die kleinen Kästchen ein.

.1.97)

	8	6	4
−	3	2	1
=			

??

.1.98)

	9	7	5	4
−	4	3	2	1
=				

??

.1.99)

	6	3	8
−	2	4	5
=			

??

.1.100)

	7	4	2	8	3
−	3	1	6	5	9
=					

??

.1.101)

	8	4	2	7
−	3	1	6	8
=				

??

.1.102)

	8	6	4	2	0
−	3	7	5	3	1
=					

??

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

.1.103)

	7	0	0	0	3
−	2	8	6	4	7
=					

??

.1.104)

	6	5	0	0	0	0
−	2	7	8	9	4	6
=						

??

.1.105)

	9	0	5	0	4	0
−	4	7	8	6	5	9
=						

??

.1.106)

	8	2	0	5	0	6	7
−	3	9	4	7	8	2	9
=							

??

.1.107)

	9	0	0	0	0	0	3	
−	4	5	6	7	8	9	7	
=								

??

.1.108)

	4	7	,	3	8	0	
−		5	,	1	2	7	
=			,				

??

.1.109)

	1	2	8	,	7	5	0	
−		3	6	,	9	8	6	
=				,				

??

.1.110)

	7	0	3	,	9	5	0	
−		2	6	,	8	7	4	
=				,				

??

.1.111)

	1	0	0	0	,	0	0	0	
−		4	5	6	,	7	8	9	
=					,				

??

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

3.1.3 Multiplikation

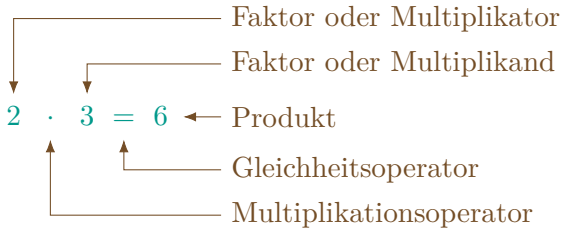
Definition 3.3: Multiplikation

Die ***Multiplikation*** (lateinisch multiplicatio, von multiplicare ‚vervielfachen', auch Malnehmen genannt) ist eine der vier Grundrechenarten in der Arithmetik. Ihre Umkehroperation ist die Division (das Teilen).

Das Rechenzeichen für die Multiplikation ist das Malzeichen „·" bzw. „×".[3.3]

Slide 29

Die rechts stehende Abbildung verdeutlicht die übliche Nomenklatur in der mathematischen Sprache.



Slide 30

Beim schriftlichen Multiplizieren mit einem einstelligen Multiplikand wird der Multiplikator von rechts nach links mit dem Multiplikanden multipliziert.

Ergibt sich dabei ein zweistelliges Teilprodukt, wird die höchstwertige Stelle als Übertrag notiert und dort additiv berücksichtigt.

Slide 31

							·	
	1	4	7	6	7	9	·	5
	5	0	5	0	5	5		
	2	3	3	3	4			
=	7	3	8	3	9	5		

Bei der stellenweise Addition kann sich auch noch ein additiver Übertrag in die nächsthöhere Stelle ergeben, der zusätzlich berücksichtigt werden muss.

Slide 32

								·	
		1	4	7	6	7	9	·	9
		9	6	3	4	3	1		
		3	6	5	6	8			
	1	1		1	1				
=	1	3	2	9	1	1	1		

Bei mehrstelligen Multiplikanden ergeben sich entsprechend mehrere Teilprodukte (eines je Multiplikand-Stelle); diese werden versetzt übereinander geschrieben und addiert.

									·			
			1	4	7	6	7	9	·	5	9	1
			1	4	7	6	7	9				
	1	3	2	9	1	1	1					
	7	3	8	3	9	5						
		1	1	1	1							
=	8	7	2	7	8	2	8	9				

Hintergrund für das „Versetzen": $79 \cdot 591 = (70 + 9) \cdot 591 = 70 \cdot 591 + 9 \cdot 591$ (Distributivgesetz). Eigentlich müßte man beim Versetzen nach links (= Multiplikation mit 10) an die frei gewordene Stelle eine 0 schreiben; dies wird i. d. R. (aus Bequemlichkeitsgründen) unterlassen.

Bei der Multiplikation von Dezimalbrüchen werden die Faktoren zunächst so multipliziert, als hätten sie kein Dezimalkomma.

Anschließend wird das Dezimalkomma im Produkt gesetzt. Die Anzahl der Nachkommastellen des Produkts ist gleich der ***Summe der Nachkommastellen der beiden Faktoren***.

[3.3] https://de.wikipedia.org/wiki/Multiplikation; Abruf 23-JUL-2020.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Im Beispiel besitzt der erste Faktor zwei und der zweite Faktor drei Nachkommastellen. Das Produkt muss daher fünf Nachkommastellen besitzen:

$$1234 \cdot 5678 = 7006652$$

und damit

$$12{,}34 \cdot 5{,}678 = 70{,}06652.$$

Slide 34

$12{,}34 \cdot 5{,}678$

Dezimalkommas zunächst weglassen

$1234 \cdot 5678 = 7006652$

$2 + 3 = 5$ Nachkommastellen

$12{,}34 \cdot 5{,}678 = 70{,}06652$

Anders als bei Addition und Subtraktion müssen die Dezimalkommas beim schriftlichen Multiplizieren ***nicht*** untereinander stehen.

3.1.3.1 Übungsaufgaben zur schriftlichen Multiplikation

Übungsaufgabe 3.3: Schriftliche Multiplikation v1

Multiplizieren Sie schriftlich. Tragen Sie auftretende Überträge in die kleinen Kästchen ein.

.1.97)

	2	4	3	·	3
=					

??

.1.98)

	1	3	2	4	·	4
=						

??

.1.99)

		5	8	0	7	·	6
=							

??

.1.100)

		4	8	3	2	6	·	7
=								

??

.1.101)

		1	4	7	6	7	9	·	9
=									

??

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

.1.102) $2406{,}12 = \;??$

.1.103) $3187{,}24 = \;??$

.1.104) $5609{,}37 = \;??$

.1.105) $43867{,}79 = \;??$

.1.106) $72408{,}83 = \;??$

.1.107) $35072{,}46 = \;??$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

.1.108)

				6	7	2	9	·	5	8	4
=											

??

.1.109)

			4	8	0	3	6	·	2	0	6
=											

??

.1.110)

				8	7	3	4	·	9	0	7
=											

??

.1.111)

				4	5	8	2	7	·	6	3	9
=												

??

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

3.1.4 Division

Definition 3.4: Division

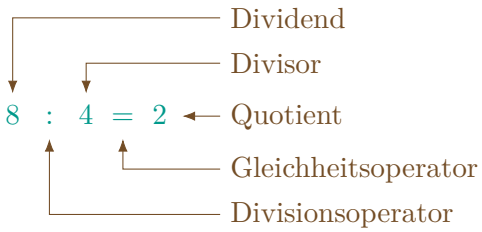
Die ***Division*** ist eine der vier Grundrechenarten der Arithmetik. Sie ist die Umkehroperation der Multiplikation.

Die Division wird umgangssprachlich auch als „Teilen“ bezeichnet.

Es wird ein Dividend durch einen Divisor geteilt, das Resultat nennt sich Quotient.

Die schriftliche Division ist die Methode des Teilens mit Stift und Papier. Sie wird im Schulunterricht der Grundschule gelehrt. Als Rechenzeichen für die Division werden „:“, „÷“ oder „/“ verwendet (Geteiltzeichen).[3.4]

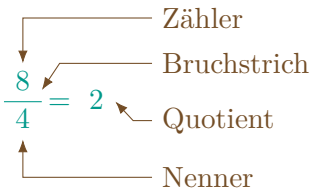
Die rechts stehende Abbildung verdeutlicht die übliche Nomenklatur in der mathematischen Sprache. Manchmal findet man – anstelle des Doppelpunkts – auch den / oder den ÷ als Divisionsoperator.



Slide 37

Eselsbrücke: Divi**d**end kommt im Lexikon vor Divi**s**or.

Zusätzlich zu einer der drei gebräuchlichen Divisionsoperatoren „:“, „÷“ oder „/“ ist auch die Schreibweise als ***Bruch*** üblich.



Slide 38

Das schriftliche Dividieren ist eine Kombination von Multiplizieren und Subtrahieren.

Anders als bei den anderen Grundrechenarten arbeitet man beim Dividieren von links nach rechts.

	1	1	2	3	3	:	4	7	=	2	3	9
-		9	4									
		1										
		1	8	3								
-		1	4	1								
			4	2	3							
-			4	2	3							
					0							

Bei der Division durch einen Dezimalbruch wird zunächst der Divisor in eine natürliche Zahl umgewandelt. Dazu wird sein Dezimalkomma so weit nach rechts verschoben, bis keine Nachkommastellen mehr vorhanden sind.

Damit sich der Quotient nicht ändert, muss das Dezimalkomma im Dividend um genau dieselbe Anzahl Stellen verschoben werden. Dies entspricht der Multiplikation von Dividend und Divisor mit derselben Zehnerpotenz:

[3.4] https://de.wikipedia.org/wiki/Division_(Mathematik); Abruf 23-JUL-2020.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

$$a : b = (10^n a) : (10^n b).$$

12,936 : 2,4

Dividend und Divisor mit 10 multiplizieren

129,36 : 24 = 5,39

Beispielsweise gilt:

$$12{,}936 : 2{,}4 = 129{,}36 : 24 = 5{,}39.$$

Anschließend wird wie gewohnt schriftlich dividiert. Wird beim Dividieren das Dezimalkomma des Dividenden überschritten, wird an der entsprechenden Stelle auch im Quotienten das Dezimalkomma gesetzt.

Falls erforderlich, dürfen rechts vom Dezimalkomma weitere Nullen angefügt werden, ohne den Wert des Dividenden zu verändern.

Slide 40

3.1.4.1 Übungsaufgaben zur schriftlichen Division

Übungsaufgabe 3.4: Schriftliche Division v1

Dividieren Sie schriftlich. Nutzen Sie die Kästchen für die einzelnen Rechenschritte und gegebenenfalls für „Anleihen“.

.1.97)

	8	4	:	4	=		
−							
−							

??

.1.98)

	1	5	6	:	3	=		
−								
−								

??

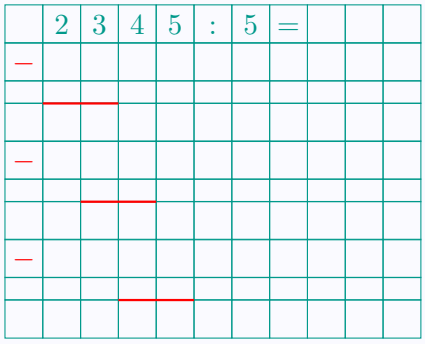
.1.99)

	9	7	2	:	6	=			
−									
−									
−									

??

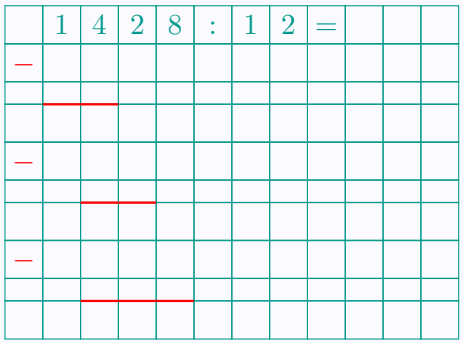
Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

.1.100)



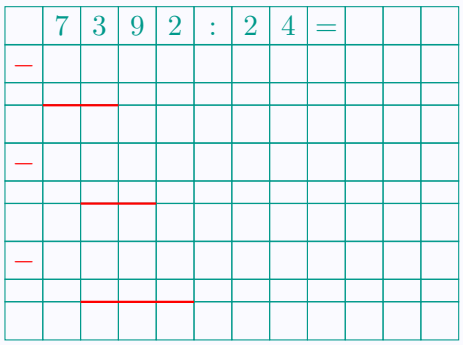
??

.1.101)



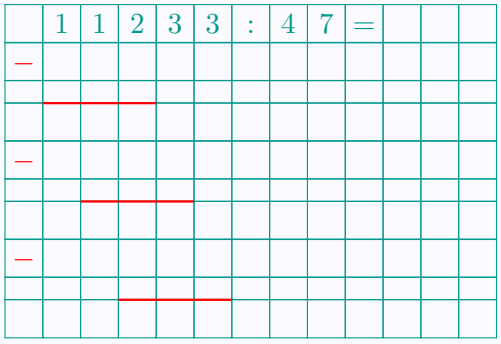
??

.1.102)



??

.1.103)



??

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

.1.104)

	4	8	3	8	4	:	7	2	=			
−												
−												
−												

??

.1.105)

	9	8	8	8	:	9	6	=			
−											
−											
−											

??

.1.106)

	1	3	6	2	5	:	1	2	5	=			
−													
−													
−													

??

.1.107)

	1	6	9	9	2	:	1	4	4	=			
−													
−													
−													

??

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

.1.108)

	3	9	5	5	2	:	1	9	2	=			
−													
−													
−													

??

.1.109) 82,5 : 5

−												
−												
−												

??

.1.110) 45,36 : 1,2

−														
−														
−														

??

.1.111) 7,392 : 0,24

−														
−														
−														

??

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

3.1.5 Kopfrechnen



Hinweis 3.1: Kopfrechnen

Ein Akademiker muss in der Lage sein, einfache Aufgaben fehlerfrei im Kopf rechnen zu können.

Trainieren Sie diese Fähigkeit!

Im Folgenden sind einige Tipps für das Kopfrechnen aufgeführt.

Zur Reihenfolge: Manchen Menschen fällt es leichter, von links nach rechts zu rechnen; anderen können es besser anders herum. Trainieren Sie das Rechnen in **beiden** Richtungen!

Slide 43

Das „kleine Einmaleins“

Das kleine Einmaleins sollten Sie auswendig können!

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Addition

Addieren Sie „glatte größere Zahlen“, und ziehen Sie die Differenz wieder ab:

$$247 + 28 \quad = 247 + (30 - 2) \quad = 277 - 2 \quad = 275$$

Addieren Sie „glatte kleinere Zahlen“, und addieren Sie die Differenz zusätzlich:

$$247 + 32 \quad = 247 + (30 + 2) \quad = 277 + 2 \quad = 279$$

Analog für die Subtraktion.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Multiplikation mit 5

Multiplizieren Sie mit 10 (im Kopf einfach eine Null anhängen) und dividieren Sie durch 2:

$$2917 \cdot 5 \quad = 2917 \cdot 10 : 2 \quad = 29170 : 2 \quad = 14585$$

Multiplikation

Nutzen Sie die Distributivgesetze!

$$23 \cdot 7 \quad = (20 + 3) \cdot 7 \quad = 20 \cdot 7 + 3 \cdot 7 \quad = 140 + 21 \quad = 161$$
$$98 \cdot 5 \quad = (100 - 2) \cdot 5 \quad = 100 \cdot 5 - 2 \cdot 5 \quad = 500 - 10 \quad = 490$$

Vereinfachen durch Verdoppeln / Halbieren:

$$25 \cdot 16 \quad = 50 \cdot 8 \quad = 100 \cdot 4 \quad = 200 \cdot 2 \quad = 400$$
$$12 \cdot 75 \quad = 6 \cdot 150 \quad = 3 \cdot 300 \quad = 900$$

Nutzen Sie das Kommutativgesetz! Bsp. wenn Ihnen das Rechnen von links nach rechts leichter fällt (Aber: Trainieren Sie beide Richtungen, s. o.):

$$3 \cdot 27 \quad = 27 \cdot 3 \quad = (30 - 3) \cdot 3 \quad = 90 - 9 \quad = 81$$

3. Binomische Formel

Dieser Trick hilft beim Multiplizieren großer Zahlen, wenn ein Faktor etwas kleiner, der andere Faktor etwas größer als eine „glatte“ Zahl ist:

$$27 \cdot 33 \quad = (30 - 3) \cdot (30 + 3) \quad = 30^2 - 3^2 \quad = 900 - 9 \quad = 891$$
$$68 \cdot 72 \quad = (70 - 2) \cdot (70 + 2) \quad = 70^2 - 2^2 \quad = 4.900 - 4 \quad = 4.896$$

Geschickt ergänzen und zusammenfassen

Bilden Sie möglichst „glatte“ Zwischenergebnisse:

$$37 + 63 + 18 + 82 = (37 + 63) + (18 + 82) = 100 + 100 = 200$$

Subtraktion durch gleichsinniges Verändern

Die Differenz ändert sich nicht, wenn Minuend und Subtrahend um denselben Betrag verändert werden:

$$503 - 198 = 505 - 200 = 305$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Multiplikation mit 9, 11 oder 99

Nutzen Sie das Distributivgesetz:

$$47 \cdot 9 = 47 \cdot (10 - 1) = 470 - 47 = 423$$
$$36 \cdot 11 = 36 \cdot (10 + 1) = 360 + 36 = 396$$

Multiplikation mit 25, 50 oder 125

Nutzen Sie einfache Vielfache von 100 bzw. 1.000:

$$48 \cdot 25 = 48 \cdot 100 : 4 = 1.200$$
$$36 \cdot 50 = 36 \cdot 100 : 2 = 1.800$$
$$24 \cdot 125 = 24 \cdot 1.000 : 8 = 3.000$$

Hinweis 3.1: Weiterführende Links

Hier finden Sie weitere Informationen (alle Links zuletzt geprüft am 2026-08-31):

- https://www.gut-erklaert.de/mathematik/kopfrechnen-tipps-beispiele.html
- https://www.superprof.de/blog/kopfrechnen-ueben/
- https://www.ingenieur.de/karriere/arbeitsleben/alltag/kopfrechnen-wie-kann-ich-es-verbessern/
- https://www.mathemakustik.de/kopfrechnen/

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

3.1.5.1 Übungsaufgaben zum Kopfrechnen

Übungsaufgabe 3.5: Kopfrechnen (1) v1

.1.97) $368 + 29 = ??$

.1.98) $703 - 198 = ??$

.1.99) $1836 \cdot 5 = ??$

.1.100) $23 \cdot 7 = ??$

.1.101) $542 + 38 = ??$

.1.102) $47 \cdot 9 = ??$

.1.103) $25 \cdot 16 = ??$

.1.104) $387 + 613 + 42 + 58 = ??$

.1.105) $36 \cdot 11 = ??$

.1.106) $1002 - 497 = ??$

.1.107) $48 \cdot 25 = ??$

.1.108) $3 \cdot 27 = ??$

.1.109) $98 \cdot 6 = ??$

.1.110) $36 \cdot 50 = ??$

.1.111) $27 \cdot 33 = ??$

.1.112) $12 \cdot 75 = ??$

.1.113) $24 \cdot 125 = ??$

.1.114) $68 \cdot 72 = ??$

.1.115) $104 \cdot 99 = ??$

.1.116) $84 \cdot 11 = ??$

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

4 Grundbegriffe der Logik und Mengenlehre

4.1 Logische Grundbegriffe

4.1.1 Aussagenlogik

Slide 44

Slide 46

Definition 4.1: Aussage

Eine ***Aussage*** im Sinn der aristotelischen Logik[4.1] ist ein sprachliches Gebilde, von dem es sinnvoll ist zu fragen, ob es wahr oder falsch ist (sogenanntes ***Aristotelisches Zweiwertigkeitsprinzip***).

- Es ist nicht erforderlich, sagen zu können, ob das Gebilde wahr oder falsch ist.
- Es genügt, dass die **Frage** nach Wahrheit („Zutreffen“) oder Falschheit („Nicht-Zutreffen“) **sinnvoll** ist (was zum Beispiel bei Fragesätzen, Ausrufen und Wünschen nicht der Fall ist).
- Aussagen sind somit Sätze, die Sachverhalte beschreiben und denen man einen Wahrheitswert zuordnen kann.

Beispiel 4.1: Aussagen

„Guten Tag!“ oder „Wie spät ist es?“ sind keine Aussagen.
„Es regnet“, „$3 \cdot 3 = 42$“ oder „Alle Xammel sind Bemmel“ sind Aussagen.

Slide 47

Im Folgenden verwenden wir als Wahrheitswerte wahr (W) und falsch (F).

Logische Aussagen lassen sich mit **logischen Operatoren (Junktoren)** zu neuen logischen Aussagen verknüpfen. Zur Darstellung verwendet man **Wahrheitstabellen**.

A und B seien *Aussagen*. Dann sind die wichtigsten logischen Operatoren:

Slide 48

- **Verneinung (Negation):**
  nicht A Symbol: $\neg A$
  $\neg A$ ist genau dann wahr, wenn A falsch ist, und umgekehrt.

A	$\neg A$
F	W
W	F

[4.1] Aristoteles (* 384 v. Chr. in Stageira; † 322 v. Chr. in Chalkis auf Euböa) gehört zu den bekanntesten und einflussreichsten Philosophen und Naturforschern der Geschichte. Sein Lehrer war Platon, doch hat Aristoteles zahlreiche Disziplinen entweder selbst begründet oder maßgeblich beeinflusst, darunter Wissenschaftstheorie, Naturphilosophie, Logik, Biologie, Physik, Ethik, Staatstheorie und Dichtungstheorie. Aus seinem Gedankengut entwickelte sich der Aristotelismus.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Slide 49

- **Konjunktion:**
  A und B Symbol: $A \wedge B$
  $A \wedge B$ ist dann und nur dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr sind.

A	B	$A \wedge B$
F	F	F
F	W	F
W	F	F
W	W	W

Slide 50

- **Disjunktion:**
  A oder B Symbol: $A \vee B$
  $A \vee B$ ist dann wahr, wenn A oder B oder beide wahr sind.

A	B	$A \vee B$
F	F	F
F	W	W
W	F	W
W	W	W

Slide 51

- **(Materiale) Implikation:**[4.2]
  (schon) wenn A, dann B Symbol: $A \to B$ oder $A \Rightarrow B$
- Auch **Subjunktion** oder **Konditional** genannt.
  $A \to B$ ist dann wahr, wenn A falsch ist oder wenn A und B wahr sind: „Aus Wahrem folgt Wahres, aus Falschem folgt Beliebiges“.

A	B	$A \to B$
F	F	W
F	W	W
W	F	F
W	W	W

Slide 52

- **(Materiale) Äquivalenz:**
  B genau dann, wenn A Symbol: $A \leftrightarrow B$ oder $A \Leftrightarrow B$
- Auch **Bisubjunktion** oder **Bikonditional** genannt.
  $A \leftrightarrow B$ ist dann wahr, wenn A und B denselben Wahrheitsgehalt haben.

A	B	$A \leftrightarrow B$
F	F	W
F	W	F
W	F	F
W	W	W

Konventionen:

- Die Verneinung bei „=“ und ähnlichen Aussagen wird meistens mit Durchstreichen bezeichnet. Beispiel: $A \neq B$ und nicht $A \neg = B$;
- In Definitionsgleichungen wird „=“ als „:=“ oder „=:“ geschrieben, wobei sich der Doppelpunkt auf der Seite des zu definierenden Objektes befindet;
- Das „und“ zwischen zusammengehörenden Aussagen wird durch ein Komma ersetzt.



Hinweis 4.1: Wahrheitsgehalt der Teilaussagen

Achtung! Weder die Implikation, noch die Äquivalenz fordern, dass die verknüpften Aussagen für sich gesehen wahr sind.

Slide 53

[4.2] material von lat. materialis = in diesem Zusammenhang „inhaltlich, sich auf den Inhalt beziehend“

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beispiel 4.2: Implikation

$A =$„$2 \cdot 2 = 5$“ und $B =$„Der Mensch ist unsterblich“.

„Wenn $2 \cdot 2 = 5$ ist, dann ist der Mensch unsterblich“ ist (logisch gesehen) eine wahre Aussage!

Hingegen ist die Aussage „Wenn Starkregen fällt, dann ist die Fahrbahn nass“ eine logisch falsche Aussage (denken Sie z. B. an eine überdachte Straße).

„Aus Wahrem folgt Wahres, aus Falschem folgt Beliebiges.“

Slide 54

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

4.1.1.1 Rechenregeln der Aussagenlogik

Im Folgenden seien A und B beliebige aussagenlogische Formeln und **W** und **F** die Wahrheitswerte wahr bzw. falsch.

Tabelle 4.1: Rechenregeln der Aussagenlogik

• Kommutativgesetze:	$A + B = B + A$	[1a]
	$A \cdot B = B \cdot A$	[1b]
• Assoziativgesetze:	$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$	[2a]
	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$	[2b]
• Verschmelzungsgesetze:	$(A + B) \cdot A = A$	[3a]
(Absorptionsgesetze)	$(A \cdot B) + A = A$	[3b]
• Distributivgesetze:	$A \cdot (B \vee C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$	[4a]
	$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$	[4b]
• Komplementgesetze:	$A \cdot \overline{A} = 0$	[5a]
	$A + \overline{A} = 1$	[5b]
	$A + (B \cdot \overline{B}) = A$	[5c]
	$A \cdot (B + \overline{B}) = A$	[5d]
• de Morgan'sche Theoreme:	$\overline{(A + B)} = \overline{A} \cdot \overline{B}$	[6a]
	$\overline{(A \cdot B)} = \overline{A} + \overline{B}$	[6b]
• Neutrales Element ...		
... bezüglich Vereinigung:	$A + 0 = A$	[7a]
... bezüglich Schnitt:	$A \cdot 1 = A$	[7b]
• Extremalgesetze:	$A + 1 = 1$	[8a]
	$A \cdot 0 = 0$	[8b]
• Identität (Idempotenzgesetze):	$A + A = A$	[9a]
	$A \cdot A = A$	[9b]
• Doppelnegationsgesetz:	$\overline{\overline{A}} = A$	[10]
• Dualitätsgesetze:	$\overline{0} = 1$	[11a]
	$\overline{1} = 0$	[11b]

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Hinweis 4.2: Schreibweise der Operatoren



Mathematiker verwenden für die logischen Grundjunktoren UND, ODER, NICHT i. A. die Symbole $\wedge$, $\vee$ und $\neg$.

Ingenieure und Informatiker verwenden davon abweichend häufig $\cdot$, $+$ und die Überstreichung.

Damit schreibt sich bspw. das erste de Morgan'sche Gesetz so:

$$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B) \qquad \Leftrightarrow \qquad \overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Slide 55

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

4.1.1.2 Beweis aussagenlogischer Behauptungen

Zu beweisen ist bspw. das erste de Morgan'sche Theorem: $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$.

Aussagenlogische Behauptungen lassen sich auf zwei Arten beweisen:

A. Die mathematisch-logisch saubere „Ochsentour": Rückführung auf Axiome und bereits bewiesene einfachere Sätze. Hierfür benötigen wir das folgende Hilfs-Lemma:[4.3]

Lemma 4.1: Komplement

Seien X und Y beliebige aussagenlogische Formeln. Dann gilt:

Aus $X \wedge (\neg Y) = \mathbf{F}$ [P1] und $X \vee (\neg Y) = \mathbf{W}$ [P2] folgt $X = Y$.

Beweis 4.1: Komplement

$$
\begin{aligned}
Y &= Y \wedge \mathbf{W} && \text{[7b]}\\
&= Y \wedge (X \vee (\neg Y)) && \text{[P2]}\\
&= (Y \wedge X) \vee (Y \wedge (\neg Y)) && \text{[4a]}\\
&= (Y \wedge X) \vee \mathbf{F} && \text{[5a]}\\
&= (Y \wedge X) \vee (X \wedge (\neg Y)) && \text{[P1]}\\
&= X \wedge ((Y \vee (\neg Y)) && \text{[1b], [4b]}\\
&= X \wedge \mathbf{W} && \text{[5b]}\\
&= X && \text{[7b]}
\end{aligned}
$$

■

Beweis 4.2: Erstes de Morgan'sches Theorem

Behauptung: $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B) \quad \leftrightarrow \quad (\neg A) \wedge (\neg B) = \neg(A \vee B)$

Unter Verwendung des Lemma 4.1 ist zu zeigen:

a) $\underbrace{((\neg A) \wedge (\neg B))}_{4.1\ X} \wedge \underbrace{(A \vee B)}_{4.1\ \neg Y\,[10]} = \mathbf{F}$ und

b) $\underbrace{((\neg A) \wedge (\neg B))}_{4.1\ X} \vee \underbrace{(A \vee B)}_{4.1\ \neg Y\,[10]} = \mathbf{W}$.

a) $((\neg A) \wedge (\neg B)) \wedge (A \vee B) = \underbrace{(\underbrace{((\neg A) \wedge A)}_{\mathbf{F}\ [5a]} \wedge ((\neg B) \wedge A))}_{\mathbf{F}\ [1b]\ [8b]} \vee \underbrace{(((\neg A) \wedge B) \wedge \underbrace{((\neg B) \wedge B)}_{\mathbf{F}\ [5a]})}_{\mathbf{F}\ [8b]} = \mathbf{F}$ ✓

b) $((\neg A) \wedge (\neg B)) \vee (A \vee B) = \underbrace{(\underbrace{((\neg A) \vee A)}_{\mathbf{W}\ [5b]} \vee ((\neg A) \vee B))}_{\mathbf{W}\ [1a]\ [8a]} \wedge \underbrace{(((\neg B) \vee A) \vee \underbrace{((\neg B) \vee B)}_{\mathbf{W}\ [5b]})}_{\mathbf{W}\ [8a]} = \mathbf{W}$ ■

[4.3] Die referenzierten Gleichungsnummern in diesem Abschnitt beziehen sich auf die Rechenregeln der Aussagenlogik, siehe Tabelle 4.1 auf Seite 4-4.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

B. Ausprobieren aller Fälle – das geht hier, weil es nur endlich viele Fälle gibt, nämlich genau vier.

Wir erstellen eine Wahrheitstabelle mit den vier möglichen Fällen.

Linke Seite: $\neg(A \vee B)$

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$
F	**F**	**F**	**W**
F	**W**	**W**	**F**
W	**F**	**W**	**F**
W	**W**	**W**	**F**

Rechte Seite: $(\neg A) \wedge (\neg B)$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$
F	**F**	**W**	**W**	**W**
F	**W**	**W**	**F**	**F**
W	**F**	**F**	**W**	**F**
W	**W**	**F**	**F**	**F**

Man sieht: Für jeden der vier möglichen Fälle ist die linke Seite der Behauptung gleichwertig zur rechten Seite. ■

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

4.1.2 Prädikatenlogik

Die Prädikatenlogik beschäftigt sich mit Prädikaten und Quantoren.

Definition 4.2: Prädikat

Ein ***Prädikat*** ist eine Folge von Wörtern mit Leerstellen, die zu einer wahren oder falschen Aussage wird, wenn in jede Leerstelle ein Eigenname eingesetzt wird.

Beispiel 4.3: Prädikat

„... ist ein Mensch."

Definition 4.3: Quantor

Mit ***Quantoren*** können Aussagen darüber gemacht werden, ob die Aussage eines Prädikats auf keines, einige oder alle Individuen des Diskursuniversums zutrifft.

Slide 56

Es gibt zwei universelle Quantoren:

- Allquantor $\forall$: Der Allquantor sagt aus, dass ein Prädikat auf alle Individuen zutreffen soll.

  „Für alle (Eigenname) gilt: ..."

  Beispiel 4.4: Allquantor

  $\forall x$ (Grieche) | x (Mensch)
  „Für jedes Ding x, für das gilt: x ist ein Grieche, gilt (auch): x ist ein Mensch".

- Existenzquantor $\exists$: Der Existenzquantor besagt, dass ein Prädikat auf mindestens ein Individuum zutrifft.

  „Es gibt mindestens ein (Eigenname), für das gilt: ..." oder „... mit der Eigenschaft ..."

  Beispiel 4.5: Existenzquantor

  $\exists x$ (Tier) | (rosa)
  „Es gibt (mindestens) ein Ding x, für das gilt: x ist ein Tier, und x ist rosa".

Slide 57

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Satz 4.2: Satz für die Verneinung von All- und Existenzaussagen[Sche20]

Durch die Verneinung einer Allaussage entsteht eine Existenzaussage. Umgekehrt entsteht durch die Verneinung einer Existenzaussage eine Allaussage.

$$\neg(\forall x : A(x)) \quad \leftrightarrow \quad \exists x : \neg A(x) \tag{4.1}$$

$$\neg(\exists x : A(x)) \quad \leftrightarrow \quad \forall x : \neg A(x) \tag{4.2}$$

Slide 58

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

4.2 Grundbegriffe der Cantor'schen Mengenlehre

Definition 4.4: Menge und Element

[4.4]Eine ***Menge*** M ist eine Zusammenfassung von **wohlbestimmten** Objekten zu einem Ganzen.

Die so zusammen gefassten Objekte heißen ***Elemente*** der Menge.

„Wohlbestimmt" soll hier bedeuten, dass man für jedes Objekt x eindeutig entscheiden kann, ob es zu der Menge M gehört oder nicht.

Slide 59

Mengen werden üblicherweise mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet, z. B.:

$$A, B, C, \ldots, X, Y, Z, A_1, A_2, \ldots \tag{4.3}$$

Zahlenmengen (Mengen, deren Elemente ausschließlich Zahlen sind) werden üblicherweise mit großen lateinischen Buchstaben mit Doppelstrich bezeichnet, z. B.:

$$\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \ldots \tag{4.4}$$

Elemente werden üblicherweise mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet, z. B.:

$$a, b, c, d, \ldots, x, y, z, a_1, a_2, \ldots \tag{4.5}$$

Im Fall, dass x in der Menge M liegt, nennen wir x ein **Element** von M und schreiben $x \in M$. Im anderen Fall schreiben wir $x \notin M$.

Für die Logiker unter uns: Diese Charakterisierung des Mengenbegriffes ist logisch nicht vollständig, aber in fast allen Fällen eine hinreichende Arbeitsdefinition, um die Sprache der Mengenlehre benutzen zu können – zumindest hier in unserem Kontext.

Wenn wir ausdrücken wollen, dass eine Menge M aus den Elementen a, b, c, d, e und f besteht, schreiben wir mit Hilfe geschweifter Klammern

$$\mathbb{M} = \{\, a, b, c, d, e, f \,\} \tag{4.6}$$

Überraschenderweise ist es sogar sinnvoll, eine Menge zu betrachten, die gar keine Elemente enthält. Diese Menge heißt die **leere Menge** und wird mit

$$\emptyset \text{ oder } \varnothing \text{ oder } \{\,\} \tag{4.7}$$

bezeichnet. Wir kommen darauf später zurück.

[4.4]Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (* 19. Februar (jul.)/ 3. März 1845 (greg.) in Sankt Petersburg; † 6. Januar 1918 in Halle an der Saale) war ein deutscher Mathematiker. Cantor lieferte wichtige Beiträge zur modernen Mathematik. Insbesondere ist er der Begründer der Mengenlehre und veränderte den Begriff der Unendlichkeit.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Definition 4.5: Grundmenge, leere Menge, Mächtigkeit

Die ***Grundmenge*** oder das ***Universum*** enthält alle betrachteten Elemente.

Die Menge, die kein Element enthält, heißt ***leere Menge***. Bezeichnung: $\emptyset$, $\varnothing$ oder $\{\,\}$

Die Anzahl der Elemente einer Menge M heißt ***Mächtigkeit*** der Menge. Bezeichnung: $|\,M\,|$

Beispiel 4.6: Verschiedene Mengen

- Grundmenge = Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} := \{\,1, 2, 3, 4, \ldots\,\}$; dann gilt z. B.:
  - $2 \in \mathbb{N}$
  - $-1 \notin \mathbb{N}$
  - $\{\,x \in \mathbb{N} \,|\, x^2 = -1\,\} = \{\,\}$
  - $|\,\mathbb{N}\,| = \infty$
- $A = \{\,1, 2, 3, 4\,\}$; dann gilt z. B.:
  - $|\,A\,| = 4$

Slide 60



Hinweis 4.3: Mächtigkeit der leeren Menge

$$\text{Es gilt: } |\,\varnothing\,| = 0 \tag{4.8}$$
$$\text{Aber: } |\,\{\varnothing\}\,| = 1 \tag{4.9}$$

Slide 61

Definition 4.6: Gleichheit zweier Mengen

Zwei Mengen A und B sind ***gleich***, falls beide Mengen aus genau denselben Elementen bestehen. Man schreibt $A = B$.

$A \neq B$ bedeutet, dass A und B ***nicht gleich*** sind.

$$A = B \Leftrightarrow \forall a \,\big(\,(a \in A \Rightarrow a \in B) \wedge (a \in B \Rightarrow a \in A)\,\big) \tag{4.10}$$

oder kürzer:

$$A = B \Leftrightarrow \forall a \,(a \in A \Leftrightarrow a \in B) \tag{4.11}$$
$$A \neq B \Leftrightarrow \exists a \,\big(\,(a \in A \wedge a \notin B) \vee (a \in B \wedge a \notin A)\,\big) \tag{4.12}$$

Slide 62

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beispiel 4.7: Gleichheit von Mengen

- Gegeben sind die Mengen $A = \{4, 9, 16\}$ und $B = \{(-2)^2, (-3)^2, (-4)^2\}$. Dann gilt: $A = B$, da $(-2)^2 = 4$, etc.
- $C = \{0\} \neq \{\}$, da C die 0 als Element enthält.
- $D = \{\varnothing\} \neq \varnothing$, da D die leere Menge als Element enthält.
- Gegeben sind die Mengen $E = \{1, 1, 2, 3, 5, 5\}$ und $F = \{1, 2, 3, 5\}$.
  Dann gilt: $E = F$, da die Elemente $1, 1$ und $5, 5$ in E **nicht** wohlunterscheidbar sind (und damit als identisch gelten, mit der Konsequenz, dass es sie jeweils nur einmal gibt ...).

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

4.2.1 Darstellung von Mengen

Slide 63

- **Aufzählende Schreibweise (extensionale Darstellung):**

  Man listet alle Elemente einer Menge auf (falls möglich), wie bspw. $\mathbb{M} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

  - Gut für endliche, überschaubare Mengen
  - Nicht praktikabel bei unendlichen oder komplexen Mengen

Slide 64

- **Beschreibende Darstellung (intensionale Darstellung):**

  Man gibt eine Eigenschaft an, die alle Elemente erfüllen, wie im Beispiel $\mathbb{M} = \{x \mid x$ ist eine gerade Zahl zwischen 1 und 11$\}$ lies: „Die Menge aller x, für die gilt: ...“ – oder etwas „mathematischer“: $\mathbb{M} = \{x \in \mathbb{N} \mid x/2 \in \mathbb{N} \wedge x < 12\}$.

  - Gut für unendliche oder strukturierte Mengen
  - Auch zur Definition neuer Mengen geeignet

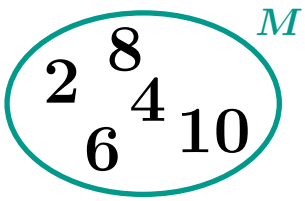
Slide 65

- **Venn-Diagramm:**

  Grafische Darstellung von Mengen und ihren Relationen (Schnitt, Vereinigung, etc.); häufig mit Kreisen oder Flächen, wie im Beispiel (Abb. 4.1)

  - Ideal für Mengenbeziehungen und Logikunterricht
  - Veranschaulichung von Teilmenge, Disjunktheit, usw.

Abbildung 4.1: Venn-Diagramm



Quelle: Eigene Darstellung

- **Mengendiagramme nach Euler:**
  Ähnlich wie Venn-Diagramme
  - Zeichnet nur tatsächlich vorkommende Beziehungen
  - Keine künstlich „vollständige“ Schnittmengendarstellung wie bei Venn
- **Nummerierung mit Indexmenge:**

  Insbesondere bei Folgen, oder bei geordneten Mengen verwendet, bspw. $\mathbb{A} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 1/n$
- **Mengenspezifische Visualisierungen**; Beispiele:
  - Zahlenmengen auf der Zahlengeraden
  - Mengen in $\mathbb{R}^2$ als Punktewolke, Flächen, Intervallschreibweise
  - Graphische Darstellungen für Funktionen als Mengen von Paaren
  - ...

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

4.2.2 Bildung neuer Mengen durch Aussonderung

Die Sprache der Mengenlehre ist sehr nützlich, um bestimmte Eigenschaften von Objekten zu formulieren und anderen Menschen Beziehungen zwischen ihnen mitzuteilen.

Dies wird in den meisten Fällen dadurch erreicht, indem man aus gegebenen Mengen bestimmte Elemente aussondert und dadurch eine neue Menge bildet.

Als Beispiel betrachten wir die Menge der geraden Zahlen. Wenn Sie jemandem, der die natürlichen Zahlen kennt, mitteilen wollen, dass Sie sich nur für die geraden Zahlen interessieren, kommen Sie möglicherweise auf die Idee zu sagen:

Slide 66

„Die geraden Zahlen sind diejenigen natürlichen Zahlen k, so dass k geteilt durch zwei ebenfalls eine natürliche Zahl ist."

In Mengenschreibweise würden Sie schreiben:

$$\mathbb{G} := \left\{ k \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{k}{2} \in \mathbb{N} \right\} \tag{4.13}$$

Dabei steht vor dem senkrechten Strich | die Grundmenge (nämlich $\mathbb{N}$, die Menge aller natürlichen Zahlen), aus der Sie bestimmte Elemente aussondern wollen, und nach dem senkrechten Strich steht diejenige Eigenschaft, die die ausgesonderten Elemente haben sollen. Man liest den senkrechten Strich „für die gilt:". [4.5]

Wenn man die Grammatik der Mengenschreibweise auf diese Weise beherrscht, kann man einen längeren sprachlichen Satz durch eine kurze Zeichenkombination darstellen. Und es gibt noch einen weiteren Vorteil: Diese Schreibweise versteht jede Mathematikerin und jeder Mathematiker weltweit – unabhängig davon, ob Sie mit ihr oder ihm eine gemeinsame Fremdsprache zur Kommunikation finden oder nicht.

[4.5] Anstelle des senkrechten Strichs „|" verwenden manche Autoren auch den Doppelpunkt „:"

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

4.2.3 Vereinigungs- und Schnittmengen

Wir haben zwei Mengen gegeben:

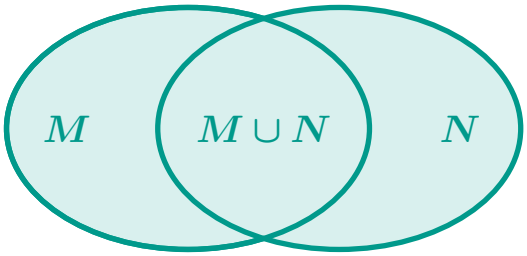
- $M = \{ a, b, c, d \}$ und
- $N = \{ a, b, U, V, W \}$

Dann gibt es eine Menge, die genau die Elemente enthält, die in **mindestens** einer der beiden Mengen M und N enthalten sind.

Diese Menge heißt die **Vereinigungsmenge** der Mengen M und N und wir erhalten mit dem **Vereinigungsoperator** $\cup$:

$$M \cup N = \{ a, b, c, d, U, V, W \} \tag{4.14}$$

Abbildung 4.2: Vereinigungsmenge

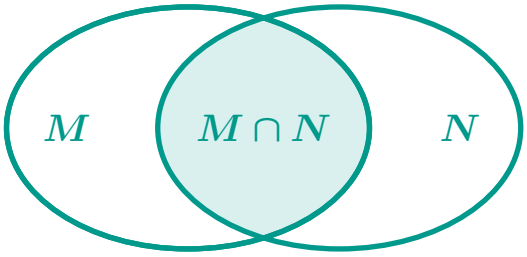


Quelle: Eigene Darstellung

Und es gibt eine Menge, die genau die Elemente enthält, die **gleichzeitig** in beiden Mengen enthalten sind. Diese Menge heißt **Durchschnittsmenge** oder **Schnittmenge** der Mengen M und N und wir erhalten mit dem **Schnittmengenoperator** $\cap$:

$$M \cap N = \{ a, b \} \tag{4.15}$$

Abbildung 4.3: Schnittmenge



Quelle: Eigene Darstellung

Gerade bei Schnittmengen wird deutlich, warum die Betrachtung der leeren Menge sinnvoll ist.

Slide 69

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beispiel 4.8: Schnittmenge

Mit der leeren Menge können wir z. B. ausdrücken, dass zwei unterschiedliche Eigenschaften inkompatibel sind. Zum Beispiel sei G die Menge der geraden Zahlen:

$$G := \left\{ a \in \mathbb{N} \;\middle|\; \frac{a}{2} \in \mathbb{N} \right\} \tag{4.16}$$

und U die Menge der ungeraden Zahlen:

$$U := \left\{ a \in \mathbb{N} \;\middle|\; \frac{a}{2} \notin \mathbb{N} \right\} \tag{4.17}$$

Eine Zahl kann nun nicht gleichzeitig gerade und ungerade sein. Diese Tatsache können wir so ausdrücken:

$$G \cap U := \left\{ a \in \mathbb{N} \;\middle|\; \frac{a}{2} \in \mathbb{N},\ \frac{a}{2} \notin \mathbb{N} \right\} = \emptyset \tag{4.18}$$

Das Komma, das die beiden (die Elemente aussondernden) Eigenschaften $\frac{a}{2} \in \mathbb{N}$ und $\frac{a}{2} \notin \mathbb{N}$ hinter dem senkrechten Strich trennt, bedeutet: Beide Eigenschaften sollen gleichzeitig erfüllt sein. Das kann man natürlich auch mit drei oder mehr solcher Eigenschaften machen.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

4.2.4 Teilmengen und Obermengen, Komplemente

Definition 4.7: Teilmengen

Definition: Eine Menge A heißt ***enthalten*** in der Menge B, wenn jedes Element aus A gleichzeitig auch in B enthalten ist, d.h.: Aus $x \in A$ folgt $x \in B$.

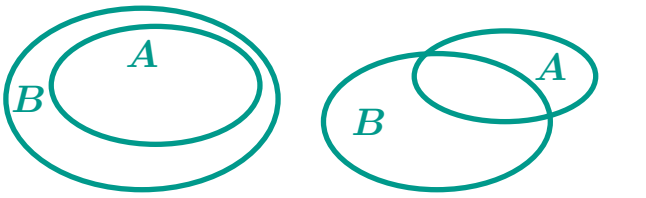
Slide 70

In diesem Fall (Abbildung 4.4 links) schreiben wir $A \subseteq B$ und nennen A eine **Teilmenge** von B.

Slide 71

Umgekehrt ist B eine **Obermenge** zu A: $B \supseteq A$.

Abbildung 4.4: Teilmengen



A ist **Teilmenge** von B
$A \subset B$

A ist **nicht Teilmenge** von B
$A \not\subset B$

Quelle: Eigene Darstellung

Definition 4.8: Echte Teilmenge

Im Falle $A \subseteq B$ und $A \neq B$ heißt A eine ***echte Teilmenge*** von B und wir schreiben: $A \subset B$.

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall a\ (a \in A \Rightarrow a \in B)) \wedge (A \neq B) \tag{4.19}$$

Es gelten folgende zwei Sätze:

Regel 4.1: Gleichheit zweier Mengen

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \tag{4.20}$$

Regel 4.2: Transitivitätssatz

$$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C \tag{4.21}$$

Slide 72

Beispiel 4.9:

- $A = \{1, 2, 3, 4\};\ B = \{1, 3\};\ C = \{5\} \quad \Rightarrow \quad B \subset A,\ C \not\subset A$
- Betrachten wir die Menge der durch vier teilbaren natürlichen Zahlen

$$V := \left\{ a \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{a}{4} \in \mathbb{N} \right\}$$

dann ist jede durch vier teilbare Zahl natürlich auch eine gerade Zahl und dies lässt sich mit Hilfe der Teilmengenrelation ausdrücken durch $V \subset G$.

Slide 73

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

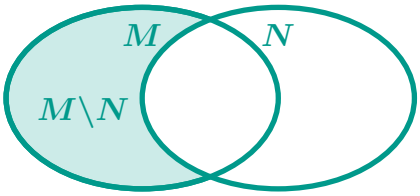
Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Um diejenigen Elemente in M auszusondern, die nicht in N enthalten sind, gibt es die Mengenoperation „ohne“ (**Differenzmenge**)

$$M \setminus N = \{\, x \in M \,|\, x \notin N \,\} \tag{4.22}$$

(die linke Seite wird gelesen „M *ohne* N“).

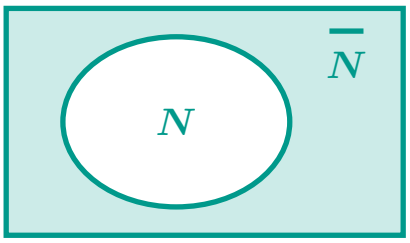
Abbildung 4.5: Differenzmenge



Quelle: Eigene Darstellung

Slide 74

Abbildung 4.6: Komplementmenge



Quelle: Eigene Darstellung

In dem Spezialfall, dass $A \subset B$ eine Teilmenge ist, können wir schließlich noch das Komplement von A in B betrachten. Dies ist die Menge der Elemente aus B, die nicht in A enthalten sind. Wir schreiben

$$A^C := \{\, x \in B \,|\, x \notin A \,\} \tag{4.23}$$

(und das ist dasselbe wie $B \setminus A$).

Beachten Sie bitte, dass der Begriff des Komplements ohne Angabe der Obermenge (bezüglich der das Komplement gebildet werden soll) sinnlos ist.

Wenn aber einmal eine Verabredung über die Obermenge (das „Universum“) getroffen wurde, ist es viel einfacher, ein c oben an die Menge zu schreiben, statt immer wieder die Notation mit dem Zeichen „\“ (ohne) zu benutzen.

[4.5] Manche Autoren verwenden für das Komplement auch einen Überstrich: $A^C = \overline{A}$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

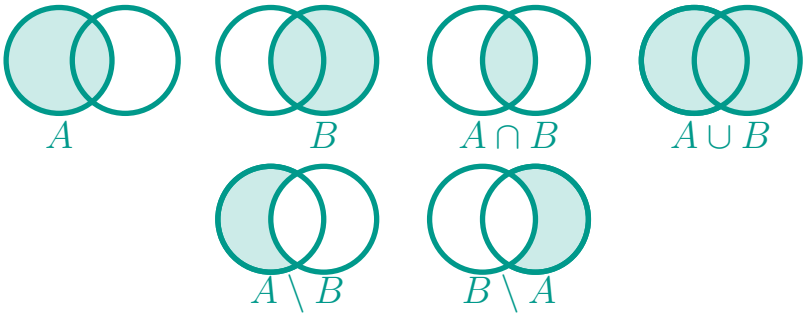
4.2.5 Venn-Diagramme und die Regeln von de Morgan

Mengen werden häufig durch sogenannte Venn-Diagramme veranschaulicht. Man malt auf einem Blatt Papier Kreise, Rechtecke oder andere geometrische Figuren und schraffiert das Innere dieser Figuren. Somit wird eine Menge durch alle Orte auf dem Blatt symbolisiert, die im Innern der gegebenen Figur liegen. Damit kann man die elementaren Mengenoperationen wie folgt veranschaulichen:

Die Elemente der Ausgangsmengen A bzw. B werden durch die grünfarbenen Bereiche symbolisiert.

Diejenigen Mengen, die bei Anwendung der verschiedenen Operationen auf A und B herauskommen, werden ebenfalls durch die grünen Bereiche symbolisiert.

Abbildung 4.7: Venn-Diagramme



Quelle: Eigene Darstellung

Solche Venn-Diagramme sind vor allem dann von Vorteil, wenn man etwas kompliziertere Identitäten zwischen Mengen veranschaulichen will. Als Beispiele dafür betrachten wir die beiden *De Morgan'schen* Regeln.

Diese beiden Regeln sind Aussagen über Teilmengen $A, B \subset M$ einer gemeinsamen Obermenge M. Die Bildung der Komplemente bezieht sich auf diese Obermenge M.

Regel 4.3: Erste de Morgan'sche Regel

Die **erste Regel von de Morgan** lautet:

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C \tag{4.24}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

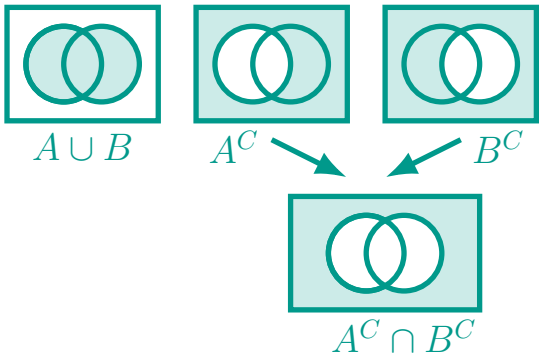
Zur Veranschaulichung betrachten wir die Venn-Diagramme von $A \cup B$ und $A^C \cap B^C$ (vgl. Abbildung 4.8).

Die Menge im linken oberen Bild ist das Komplement der Menge im unteren Bild, was die Regel bestätigt: Wegen

$$A^C = \{\, x \in M \,|\, x \notin A \,\}$$
$$B^C = \{\, x \in M \,|\, x \notin B \,\} \tag{4.25}$$

ist

Abbildung 4.8: 1. Regel von De Morgan



Quelle: Eigene Darstellung

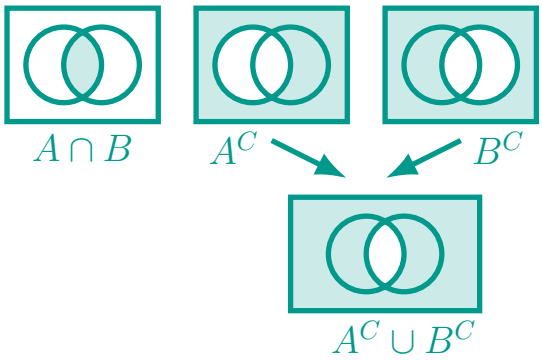
$$A^C \cap B^C = \{\, x \in M \,|\, x \notin A,\, x \notin B \,\} = \{\, x \in M \,|\, x \notin (A \cup B) \,\} \tag{4.26}$$

Regel 4.4: Zweite de Morgan'sche Regel

Die **zweite Regel von de Morgan** lautet:

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C \tag{4.27}$$

Abbildung 4.9: 2. Regel von De Morgan



Quelle: Eigene Darstellung

Zur Veranschaulichung betrachten wir die Venn-Diagramme von $A \cap B$ und $A^C \cup B^C$ (vgl. Abbildung 4.9).

Auch hier wird die Regel durch die bildliche Darstellung veranschaulicht.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Regel 4.5: Rechenregeln für Mengen

Kommutativgesetz

$A \cup B = B \cup A$ $\qquad$ $A \cap B = B \cap A$

Assoziativgesetz

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $\qquad$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Distributivgesetz

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\qquad$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

De Morgansche Regeln (dabei ist G die Grundmenge)

$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ $\qquad$ $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\qquad$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\qquad$ $\overline{G} = \emptyset$ $\qquad$ $\overline{\emptyset} = G$ $\qquad$ $\overline{\overline{A}} = A$

Transitivität

$A \subset B \ \wedge \ B \subset C \quad \Rightarrow \quad A \subset C$

4.2.5.1 Fazit zur Aussagenlogik und zur Mengenlehre

Es gibt eine enge Verbindung zwischen Aussagenlogik und Mengenlehre, insbesondere wenn man die Operationen in der Aussagenlogik durch mengenbezogene Operationen modelliert. Diese Verbindung basiert auf der **Booleschen Algebra**.

Analogie zwischen Aussagenlogik und Mengenoperationen:

Aussagenlogik	**Mengenlehre**
$A \wedge B$	$A \cap B$ (Schnitt)
$A \vee B$	$A \cup B$ (Vereinigung)
$\neg A$	A^{C} (Komplement)
$A \Rightarrow B$	$A^{\mathrm{C}} \cup B$
„wahr“ (Tautologie)	Universum U
„falsch“ (Kontradiktion)	Leere Menge $\emptyset$

Die Strukturen der Aussagenlogik und der Mengenlehre sind formal sehr ähnlich, weil sie beide auf den Gesetzen der **Booleschen Algebra** beruhen (Assoziativität, Kommutativität, Distributivität, De-Morgan-Gesetze usw.).

- ✓ $A \wedge B$ entspricht $A \cap B$ (beides gilt nur, wenn ***beides*** zutrifft)
- ✓ $A \vee B$ entspricht $A \cup B$ (gilt, wenn ***mindestens eines*** zutrifft)

Aber: Die ***Semantik*** unterscheidet sich:

- In der Aussagenlogik sind Aussagen ***wahr*** oder ***falsch***.
- In der Mengenlehre enthalten Mengen gewisse ***Elemente*** oder nicht.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

5 Grundlegende algebraische Strukturen

5.1 Präzedenz-Regeln

Für die **Präzedenz**[5.1] (Operatorrangfolge, Vorrang) bei Berechnungen gibt es eine ganz klare Hierarchie:

1. Zuerst kommen die höheren Rechenoperationen Wurzelziehen, Potenzieren und Logarithmieren
2. Dann kommen Multiplikation und Division
3. Dann kommen Addition und Subtraktion

Man sagt volkstümlich: **„Punktrechnung geht vor Strichrechnung“**.

Will man diese Vorrang-Reihenfolge anders haben, dann muss man zwingend Klammern setzen! Klammern haben die höchste Präzedenz.

Beispiel 5.1: Präzedenz-Regeln

Beispiel:

$$3+\underbrace{2\cdot 5}_{\text{Vorrang}}=3+10=13 \qquad \underbrace{(3+2)}_{\text{Vorrang}}\cdot 5=5\cdot 5=25 \tag{5.1}$$

Ähnlich gibt es ganz klare Regeln für die Assoziativität[5.2] (Reihenfolge der Ausführung):

- Grundrechenarten von links nach rechts
- Potenztürme von rechts nach links
- Zuweisungen von rechts nach links

Beispiel 5.2: Assoziativität-Regeln

$$3+2+7=\underbrace{3+2}_{5}+7=5+7=12 \tag{5.2}$$

$$2^{3^2}=2^{\overbrace{3^2}^{9}}=2^9=512 \qquad \text{und } \textbf{nicht} \text{ etwa } \left(\underbrace{2^3}_{8}\right)^2=64 \tag{5.3}$$

[5.1] lat. praecedere: „übertreffen, vorangehen“.
[5.2] lat. associare: „vereinigen, verbinden, verknüpfen, vernetzen“.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

5.1.1 KLAPUSTRI-Regel

KLA = Klammern auflösen:

Hier gilt es, die Klammern von innen nach außen aufzulösen.

Häufig verwendet man bei Klammerschachtelung unterschiedliche Klammerarten: Ganz innen die runden Klammern ( ), in der Mitte eckige Klammern [ ], ganz außen geschweifte Klammern { }. Dann beginnt man also mit den runden Klammern ( ), dann werden die eckigen Klammern [ ] und abschließend die geschweiften Klammern { } aufgelöst.

Kommen in einer Rechnung auch **Hochzahlen** oder andere höhere Rechenoperationen (Wurzeln, Logarithmen, Funktionen) vor, so müssen diese noch **vor den Punktrechnungen** durchgeführt werden!

PU = Punktrechnungen durchführen
Im zweiten Schritt werden alle Multiplikationen und Divisionen durchgeführt.

STRI = Strichrechnungen durchführen
Abschließend werden die Additionen und Subtraktionen durchgeführt.

KLAPUSTRI-Regel:

1. Klammern auflösen: ( ), [ ], { }
2. Hochzahlen berechnen: z. B. $\square^2$, $\square^3$
3. Punktrechnungen durchführen: ·, :
4. Strichrechnungen durchführen: +, −

Wichtig: Auch innerhalb der Klammern gilt: Hochzahlen vor Punkt vor Strich!

Beispiel 5.3: Präzedenz

Beispiel:

$[12 \cdot x + 5 \cdot x \cdot 2 - (10 \cdot x - 8 \cdot x)] + 18 \cdot x : 3 =$

1. Runde Klammern auflösen: $= [12 \cdot x + 5 \cdot x \cdot 2 - 2 \cdot x] + 18 \cdot x : 3$
2. Eckige Klammern auflösen:
   a) Punktrechnungen in der eckigen Klammer: $= [12 \cdot x + 10 \cdot x - 2 \cdot x] + 18 \cdot x : 3$
   b) Strichrechnungen in der eckigen Klammer: $= 20 \cdot x + 18 \cdot x : 3$
3. Punktrechnungen: $= 20 \cdot x + 6 \cdot x$
4. Strichrechnungen: $= 26 \cdot x$

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

5.1.2 Die grundlegenden Gesetze der Algebra

Für die Addition und die Multiplikation[5.3] gelten die

Regel 5.1: Kommutativgesetze:

$$a + b = b + a \qquad \text{und} \qquad a \cdot b = b \cdot a \qquad \forall a, b \in \mathbb{C} \tag{5.4}$$

Kommutativgesetz (auf Deutsch Vertauschungsgesetz): Wenn es gilt, können die Argumente einer Operation vertauscht werden, ohne dass sich das Ergebnis verändert.

Mathematische Operationen, die dem Kommutativgesetz unterliegen, nennt man ***kommutativ***[5.4].

Das heißt: Das Ergebnis einer Summe oder eines Produkts ist unabhängig von der Reihenfolge der Summanden bzw. Faktoren.

Weiter gelten die

Regel 5.2: Assoziativgesetze:

$$\begin{aligned} (a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c \qquad & \text{und} \\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c \qquad & \forall a, b \in \mathbb{C} \end{aligned} \tag{5.5}$$

Assoziativgesetz (auf Deutsch Verknüpfungsgesetz oder auch Verbindungsgesetz): Eine Verknüpfung ist ***assoziativ***[5.5], wenn die Reihenfolge der Ausführung keine Rolle spielt.

Bei der Addition oder der Multiplikation mehrerer Zahlen ist es also unerheblich, in welcher Reihenfolge die Teilsummen oder Teilprodukte gebildet werden. Daher können bei Summen und Produkten die Klammern auch weggelassen werden.

Zudem gelten die

[5.3] Für die Subtraktion und die Division gelten diese Gesetze **nicht** oder **nur eingeschränkt**.
[5.4] lat. commutare: „vertauschen“.
[5.5] lat. associare: „vereinigen, verbinden, verknüpfen, vernetzen“.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Regel 5.3: Distributivgesetze:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{und} \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \qquad \forall a, b \in \mathbb{C} \tag{5.6}$$

Distributivgesetze[5.6] (auf Deutsch Verteilungsgesetze): Das sind mathematische Regeln, die angeben, wie sich zwei zweistellige Verknüpfungen bei der Auflösung von Klammern zueinander verhalten: Nämlich dass die eine Verknüpfung in einer bestimmten Weise verträglich ist mit der anderen Verknüpfung. Insbesondere in der Schulmathematik bezeichnet man die Verwendung des Distributivgesetzes zur Umwandlung einer Summe in ein Produkt als **Ausklammern** oder **Herausheben**.

Das Auflösen von Klammern durch Anwenden des Distributivgesetzes wird als **Ausmultiplizieren** bezeichnet.

Mit diesen kann durch Ausmultiplizieren ein Produkt in eine Summe umgewandelt werden und umgekehrt durch Ausklammern eine Summe in ein Produkt.



Hinweis 5.1: Nicht-Kommutativität

Achtung: Die Subtraktion und die Division sind **nicht kommutativ!**
Im Allgemeinen ist

$$a - b \neq b - a \qquad \text{und} \qquad \frac{a}{b} \neq \frac{b}{a} \; ! \tag{5.7}$$

Insbesondere das Distributivgesetz erleichtert häufig das **Kopfrechnen**:

Beispiel 5.4: Anwendung des Distributivgesetzes beim Kopfrechnen

Beispiel: $$23 \cdot 16 = (20 + 3) \cdot 16 = 20 \cdot 16 + 3 \cdot 16 = 320 + 48 = 368 \tag{5.8}$$

In diesem Zusammenhang ist auch noch der Begriff des **neutralen Elements** wichtig.

Regel 5.4: Neutrales Element

Das neutrale Element NE bezüglich einer beliebigen Verknüpfung $\circ$ wird definiert als:

$$x \circ NE = NE \circ x = x \tag{5.9}$$

Damit ist das neutrale Element

- der Addition die 0: $x + 0 = 0 + x = x$ und
- der Multiplikation die 1: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.

[5.6] lat. distribuere: „verteilen“.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

5.2 Die 4 Grundrechenarten

Art	Symbol	Name	Nomenklatur
Strich	$+$	Addition[5.7]	Summe = Summand + Summand
Strich	$-$	Subtraktion[5.8]	Differenz = Minuend − Subtrahend
Punkt	$\cdot$	Multiplikation[5.9] [5.10]	Produkt = Multiplikand · Multiplikator
			Produkt = Faktor · Faktor
Punkt	$: \div /$	Division	Quotient = Dividend (Zähler) / Divisor (Nenner)
			→ Siehe auch Bruchrechnung

5.2.1 Strichrechnung

5.2.1.1 Schriftliche Addition

Regel 5.5: Begriffe zur Addition

Addition: Summe = Summand + Summand

Man macht Gebrauch vom Assoziativ- und Distributivgesetz.

Beispiel 5.5: Schriftliche Addition

Beispiel: $987 + 654 + 321 + 777 = 2739$.

Von rechts nach links werden die Spalten aufaddiert. In die untere Ergebniszeile kommt der Einerwert dieser Summe; wenn es einen Zehnerwert gibt, wird dieser als Übertrag in die nächsthöhere Stelle (also eine Spalte nach links) übernommen und beim Aufaddieren dieser Spalte berücksichtigt.

Im Beispiel ist dieser Übertrag durch die tiefgestellten Zahlen dargestellt.

	9	8	7
+	6	5	4
+	3	2	1
$+_{+2}$	7_{+2}	7_{+1}	7
2	7	3	9

5.2.1.2 Schriftliche Subtraktion

Regel 5.6: Begriffe zur Subtraktion

Subtraktion: Differenz = Minuend − Subtrahend

[5.7] (lat. additio, von addere: „hinzufügen“.
[5.8] lat. subtrahere: „wegziehen“, „entfernen“.
[5.9] lat. multiplicatio, von multiplicare: „vervielfachen“
[5.10] Den Multiplikationspunkt · lässt man im Zusammenhang mit Variablen meistens weg. Man schreibt z. B. $2x$ anstatt $2 \cdot x$, oder ab anstatt $a \cdot b$.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Man macht ebenfalls Gebrauch vom Assoziativ- und Distributivgesetz. Für die schriftliche Subtraktion gibt es mehrere Verfahren. In Deutschland wird in der Grundschule die Auffülltechnik gelernt („österreichisches Verfahren“): Beispiel:

Beispiel 5.6: Schriftliche Subtraktion

Beispiel: $963 - 654 = 309$.

Beim „österreichischem Verfahren“ wird von rechts nach links der Subtrahend bis zum Minuend erhöht. Wenn dies nicht geht, wird der Subtrahend um 10 erhöht (Übertrag in die nächste Stelle). Im Beispiel ist dieser Übertrag wiederum durch die tiefgestellten Zahlen dargestellt.

$$\begin{array}{rccc} & 9 & 6 & 3 \\ - & 6 & 5_{+1} & 4 \\ \hline & 3 & 0 & 9 \end{array}$$

Wenn von einem Minuend mehrere Subtrahenden abgezogen werden sollen, dann müssen die Verfahren für die schriftliche Addition und die schriftliche Subtraktion kombiniert werden.

Beispiel 5.7: Schriftliche Subtraktion, mehrere Subtrahenden

Beispiel: $987 - 654 - 123 - 25 = 185$

Man macht Gebrauch von der Identität:

$987 - 654 - 123 - 25 = 987 - (654 + 123 + 25)$.

$$\begin{array}{rccc} & 9 & 8 & 7 \\ - & 6 & 5 & 4 \\ - & 1 & 2 & 3 \\ - & {\scriptstyle +1} & 2_{+1} & 5 \\ \hline & 1 & 8 & 5 \end{array}$$

5.2.2 Punktrechnung

5.2.2.1 Schriftliche Multiplikation

Regel 5.7: Begriffe zur Multiplikation

Multiplikation: Produkt = Multiplikand · Multiplikator

Produkt = Faktor · Faktor

Das schriftliche Multiplizieren beruht ebenfalls auf dem Distributivgesetz.

Beispiel 5.8: Multiplikation nach Distributivgesetz

$$123 \cdot 456 = 123 \cdot (6 + 50 + 400) = 123 \cdot 6 + 123 \cdot 50 + 123 \cdot 400 \tag{5.10}$$

Von rechts nach links werden die Spalten aufaddiert. In die untere Ergebniszeile kommt der Einerwert dieser Summe; wenn es einen Zehnerwert gibt, wird dieser als Übertrag in die nächsthöhere Stelle (also eine Spalte nach links) übernommen und bei der Aufaddierung dieser Spalte berücksichtigt.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beispiel 5.9: Schriftliche Multiplikation

Im Beispiel ist dieser Übertrag durch die **hochgestellten** Zahlen dargestellt. Die **tiefgestellten** Zahlen stellen hingegen die Überträge bei der abschließenden schriftlichen Addition der einzelnen Teilsummen dar.

1	2	3	·	4	5	6
				7^{+1}	3^{+1}	8
			6^{+1}	1^{+1}	5	
		4_{+1}	9^{+1}_{+1}	2		
		5	6	0	8	8

5.2.2.2 Schriftliche Division

Regel 5.8: Begriffe zur Division

Division $\qquad$ Quotient $= \dfrac{\text{Dividend}}{\text{Divisor}}$

5.2.2.3 Division ohne Rest

Beispiel 5.10: Division ohne Rest

Beispiel: Wir wollen den Quotienten von 21.873 und 23 berechnen.

$$2\ 1\ 8\ 7\ 3\ :\ 2\ 3\ =\ ?\ ?\ ?$$

Dazu teilen wir den Dividenden stellenweise durch 23. Wir schauen, wie oft passt die 23 in 2 rein oder anders ausgedrückt, was ist 2 : 23?

$\widehat{2}\,1\,8\,7\,3\ :\ 2\,3\ =$ passt nicht

Passt nicht, also betrachten wir die ersten beiden Stellen, geht 21 : 23?

$\widehat{2\,1}\,8\,7\,3\ :\ 2\,3\ =$ passt nicht

Auch nicht, also betrachten wir 218. Wie häufig passt wohl die 23 hinein? Wir sehen, 218 ist fast 230, also passt fast 10-mal hinein.

$\widehat{2\,1\,8}\,7\,3\ :\ 2\,3\ =$ fast 10x

Wir probieren 9. $9 \cdot 23 = 207$ wir schreiben die 9 hinter das Gleichheitszeichen und die 207 unter die 218 und bilden die Differenz (11).

$\widehat{2\,1\,8}\,7\,3\ :\ 2\,3\ = 9$
$\underline{2\,0\,7}$
$\quad 1\,1$

Jetzt ziehen wir die nächste Stelle von oben, die 7, nach unten und erhalten unseren neuen Dividenten 117

$2\,1\,8\,\widehat{7}\,3\ :\ 2\,3\ = 9\,?$
$\underline{2\,0\,7}\downarrow$
$\quad 1\,1\,7$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Wie oft ist 117 durch 23 teilbar?
$5 \cdot 23 = 115$
Diese Ergebnis schreiben wir unter die 117 , Subtrahieren und erhalten als Ergebnis 2.

$$\begin{array}{l} 2\,1\,8\,\widehat{7}\,3 : 2\,3 = 9\,? \\ \underline{2\,0\,7} \\ \quad 1\,1\,7 \\ \quad \underline{1\,1\,5} \\ \qquad 2 \end{array}$$

Das macht man solange, bis entweder als Differenz eine Null übrig bleibt oder ein Rest, den man nicht mehr teilen kann.

$$\begin{array}{l} 2\,1\,8\,7\,\widehat{3} : 2\,3 = 9\,5\,1 \\ \underline{2\,0\,7} \;\downarrow \\ \quad 1\,1\,7\downarrow \\ \quad \underline{1\,1\,5}\downarrow \\ \qquad 2\,3 \\ \qquad \underline{2\,3} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

5.2.2.4 Division mit Rest

Wir teilen 351 durch 4. 351 ist der **Dividend**, 4 ist der **Divisor**.

$$3\,5\,1 : 4 =$$

Wir beginnen von links aus zu suchen, welchen möglichst kurzen Abschnitt des Dividenden wir durch den Divisor teilen können. Drei lässt sich nicht durch 4 teilen. Der erste Abschnitt, den wir durch 4 teilen können, sind die Ziffern 35 ganz links. 35 durch 4 ist 8, denn 8 mal 4 ist 32, und es bleibt der Rest $35 - 32 = 3$.

$$\begin{array}{l} 3\,5\,1 : 4 = 8 \\ \underline{3\,2} \\ \quad 3 \end{array}$$

Nun ziehen wir die nächste Ziffer des Dividenden, die 1, zum Rest hinunter, das ergibt 31.
Jetzt wird die 31 durch 4 geteilt. Das ergibt 7, denn 7 mal 4 ist 28, und es bleibt der Rest 31 - 28 = 3.

$$\begin{array}{l} 3\,5\,1 : 4 = 8\,7 \\ \underline{3\,2} \\ \quad 3\,1 \\ \quad \underline{2\,8} \\ \qquad 3 \end{array}$$

Alle Ziffern des Dividenden sind nun verarbeitet. Wir sind fertig:

$$3\,5\,1 : 4 = 8\,7 \text{ Rest } 3$$

Regel 5.9: Divisionsalgorithmus

Die **Division mit Rest** oder der **Divisionsalgorithmus** ist ein mathematischer Satz aus der Algebra und der Zahlentheorie. Er besagt, dass es zu zwei Zahlen n und $m \neq 0$ eindeutig bestimmte Zahlen a und b gibt, für die $n = a \cdot m + b, 0 \leq b < \mid m \mid$ gilt.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Die Zahlen a und b lassen sich durch die schriftliche Division ermitteln. Die Division mit Rest ist auch für Polynome definiert. Die allgemeinste mathematische Struktur, in der es eine Division mit Rest gibt, ist der **Modulo**-Operator.

Regel 5.10: Modulo (Rest einer Division)

Modulo berechnet den Rest b der Division n geteilt durch m. Man kann eine Funktion definieren, welche jedem Zahlenpaar $n\ ;\ m$ einem eindeutigen Teiler-Rest b zuordnet. Diese Funktion nennt man „Modulo“[5.11]; sie wird meistens mit **mod** abgekürzt. In vielen Programmiersprachen wird sie durch % dargestellt und als Operator behandelt.

Beispiel 5.11: Beispiele Modulo

Beispiele:

17 mod 3=2, weil 17:3=5 Rest 2
254 mod 37=32, weil 254:37=6 Rest 32

Die Menge aller durch 7 teilbaren natürlichen Zahlen:
$\mathbb{N}_7 := \{n \in \mathbb{N} \mid n \bmod 7 = 0\}$

5

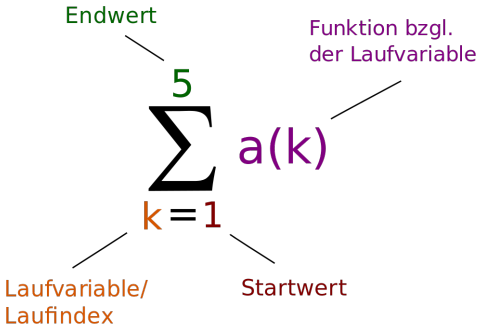
[5.11] lat. modulus, Kasus Ablativ, also: „(gemessen) mit dem Maß (des ...))“

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

5.2.3 Summen- und Produktoperator

Häufig hat man eine Summe aus gleichen oder ähnlichen Summanden. Als abgekürzte Schreibweise verwendet man dafür den Summenoperator Σ (großes griechisches Sigma):[5.12]



Regel 5.11: Das Summenzeichen

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{n-1} + a_n \qquad (k, m, n \in \mathbb{Z}, a_k \in \mathbb{C}, n \geq m) \quad (5.11)$$

Hierbei bedeutet:

i	Laufvariable, Index, Laufindex, Summationsindex
m	Untergrenze, Startwert
n	Obergrenze, Endwert
a_i	die einzelnen Summanden (Funktion bezüglich der Laufvariable)

Alle ganzen Zahlen zwischen (jeweils einschließlich) m und n werden jeweils einmal in den Term hinter dem Summenoperator eingesetzt, und dann werden die sich damit ergebenden $n - m + 1$ Summanden aufsummiert.

Beispiel 5.12: Summenzeichen

$\sum_{k=1}^{5} k^2$ → Es gibt fünf Summanden. Wir malen uns fünf „Statthalter-Kästchen“ und schreiben jeweils den aktuellen Wert von k darunter ($k = 1, 2, 3, 4, 5$):

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = \underbrace{\boxed{k^2}}_{k=1} + \underbrace{\boxed{k^2}}_{k=2} + \underbrace{\boxed{k^2}}_{k=3} + \underbrace{\boxed{k^2}}_{k=4} + \underbrace{\boxed{k^2}}_{k=5} \quad \rightarrow \text{das jeweilige } k \text{ einsetzen:}$$

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = \underbrace{\boxed{1}}_{k=1} + \underbrace{\boxed{4}}_{k=2} + \underbrace{\boxed{9}}_{k=3} + \underbrace{\boxed{16}}_{k=4} + \underbrace{\boxed{25}}_{k=5} = 55$$

[5.12] Siehe zum Summen- und Produktoperator auch (abgerufen am 2016-08-21): https://www.math.uni-sb.de/ag/wittstock/lehre/WS00/analysis1/Vorlesung/node10.html; zuletzt geprüft 2025-07-31.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beispiel 5.13: Summenzeichen

$$\sum_{k=1}^{5} 1 = \underbrace{\boxed{1}}_{k=1} + \underbrace{\boxed{1}}_{k=2} + \underbrace{\boxed{1}}_{k=3} + \underbrace{\boxed{1}}_{k=4} + \underbrace{\boxed{1}}_{k=5} = 5 \tag{5.12a}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=-2}^{3} k &= \underbrace{\boxed{k}}_{k=-2} + \underbrace{\boxed{k}}_{k=-1} + \underbrace{\boxed{k}}_{k=0} + \underbrace{\boxed{k}}_{k=1} + \underbrace{\boxed{k}}_{k=2} + \underbrace{\boxed{k}}_{k=3} \\ &= \underbrace{\boxed{-2}}_{k=-2} + \underbrace{\boxed{-1}}_{k=-1} + \underbrace{\boxed{0}}_{k=0} + \underbrace{\boxed{1}}_{k=1} + \underbrace{\boxed{2}}_{k=2} + \underbrace{\boxed{3}}_{k=3} = 3\end{aligned} \tag{5.12b}$$

$$\sum_{k=4}^{5} k^2 = \underbrace{\boxed{k^2}}_{k=4} + \underbrace{\boxed{k^2}}_{k=5} = \underbrace{\boxed{4^2}}_{k=4} + \underbrace{\boxed{5^2}}_{k=5} = 16 + 25 = 41 \tag{5.12c}$$

$$\sum_{k=2}^{2} k - 2 = \underbrace{\boxed{k-2}}_{k=2} = \underbrace{\boxed{2-2}}_{k=2} = 0 \tag{5.12d}$$

Spezialfall: Alle Summanden sind gleich:

$$\sum_{t=1}^{n} a = \underbrace{\underbrace{a}_{i=1} + \underbrace{a}_{i=2} + \underbrace{a}_{i=3} + \ldots + \underbrace{a}_{i=n}}_{n \text{ Summanden}} = n \cdot a$$

→ Der Multiplikations-Operator · ist eine abgekürzte Schreibweise für mehrfaches Summieren derselben Zahl.

Spezialfall: Die leere Summe (Obergrenze < Untergrenze), z. B.

$$\sum_{k=5}^{2} k := 0 \quad \left(\text{und nicht etwa } \sum_{k=5}^{2} k \neq 5 + 4 + 3\right)$$

Hinweis 5.2: Häufig gemachter Fehler beim Summenzeichen:



- Von $1 \ldots n$ sind n Summanden
- Von $0 \ldots n$ sind $n + 1$ Summanden

$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} a = n \cdot a$; $\sum_{i=0}^{n} a = (n+1) \cdot a$

Dieses gilt auch entsprechend für den Produktoperator (siehe unten).

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Regel 5.12: Rechenregeln für Summen:

1.) $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{k=m}^{n} a_k$ — Die konkrete Bezeichnung des Index ist bedeutungslos

2.) $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m-l}^{n-l} a_{i+l}$ — Verschiebung des Laufindex

3.) $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{n} a_{n+m-i}$ — Umgekehrte Reihenfolge der Summanden (Kommutativgesetz)

4a) $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{l} a_i + \sum_{i=l+1}^{n} a_i$ — $(m \le l < n)$ (Assoziativgesetz)

Insbesondere der nachstehende Fall wird häufig bei Beweisführungen mit Hilfe der vollständigen Induktion verwendet:

4b) $\sum_{i=m}^{n+1} a_i = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{n+1} a_i = \sum_{i=m}^{n} a_i + a_{n+1}$

5) $\sum_{i=m}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i \pm \sum_{i=m}^{n} b_i$

6) $\sum_{i=m}^{n} (c \cdot a_i) = c \cdot \sum_{i=m}^{n} a_i$ — (Distributivgesetz)

7) $\sum_{i=1}^{n} a = n \cdot a$

8) $\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ik} \right)$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Analog zum Summenoperator definiert man den Produktoperator Π (großes griechisches Pi) für mehrfaches Multiplizieren:

Regel 5.13: Das Produktzeichen

$$\prod_{i=m}^{n} a_i := a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n \qquad (i, m, n \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{R}, n \geq m \tag{5.13}$$

Hierbei bedeutet:

i	Laufvariable, Index, Laufindex, Produktindex
m	Untergrenze
n	Obergrenze
a_i	die einzelnen Faktoren

Alle ganzen Zahlen zwischen (jeweils einschließlich) m und n werden jeweils einmal in den Term hinter dem Produktoperator eingesetzt, und dann werden die sich damit ergebenden $n - m + 1$ Faktoren miteinander multipliziert.

Beispiel 5.14: Beispiele zum Produktzeichen

$$\prod_{i=1}^{5} i = \underbrace{1}_{i=1} \cdot \underbrace{2}_{i=2} \cdot \underbrace{3}_{i=3} \cdot \underbrace{4}_{i=4} \cdot \underbrace{5}_{i=5} = 5! = 120 \tag{5.14a}$$

$$\prod_{k=1}^{100} \frac{k}{k+1} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{k=1} \cdot \underbrace{\frac{2}{3}}_{k=2} \cdot \underbrace{\frac{3}{4}}_{k=3} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{99}{100}}_{k=99} \cdot \underbrace{\frac{100}{101}}_{k=100} = \frac{1}{101} \tag{5.14b}$$

$$\prod_{i=15}^{25} (i^2 - 400) = 0, \text{ da für } i = 20 \text{ gilt : } (i^2 - 400) = 20^2 - 400 = 400 - 400 = 0 \tag{5.14c}$$

Spezialfall: Alle Faktoren sind gleich:

$$\prod_{i=1}^{n} a = \underbrace{\underbrace{a}_{i=1} \cdot \underbrace{a}_{i=2} \cdot \underbrace{a}_{i=3} \cdot \ldots \cdot \underbrace{a}_{i=n}}_{n \text{ Faktoren}} = a^n$$

→ Der Potenz-Operator $\square^{\square}$ ist eine abgekürzte Schreibweise für mehrfaches Multiplizieren derselben Zahl.

Spezialfall: Das leere Produkt (Obergrenze < Untergrenze), z. B.

$$\prod_{k=5}^{3} k := 1 \quad \left(\text{und nicht etwa } \prod_{k=5}^{1} k \neq 5 \cdot 4 \cdot 3 \right)$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Regel 5.14: Rechenregeln für Produkte:

1.) $\prod_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c^n \cdot \prod_{i=1}^{n} a_i$

2.) $\prod_{i=m}^{n} a_i = \prod_{i=m}^{l} a_i \cdot \prod_{i=l+1}^{n} a_i \qquad (m \le l \le n)$

3.) $\prod_{i=m}^{n} a_i = \prod_{i=m-l}^{n-l} a_{i+l}$ (Indexverschiebung)

4) $\prod_{i=m}^{n} a_i \cdot b_i = \prod_{i=m}^{n} a_i \cdot \prod_{i=m}^{n} b_i$

Beispiel 5.15: Beispiel 1 zum Produktzeichen

$$\prod_{i=1}^{4} 2 \cdot i = (2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 4) \tag{5.15}$$

$$= \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)} \cdot \underbrace{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)} \tag{5.16}$$

$$= \quad 2^4 \quad \prod_{i=1}^{4} \cdot i \tag{5.17}$$

$$= 2^4 \cdot 4! \quad = \quad 16 \cdot 24 \quad = \quad 320 \tag{5.18}$$

Beispiel 5.16: Beispiel 2 zum Produktzeichen

$$\prod_{k=1}^{5} k = \qquad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 \tag{5.19}$$

$$= \prod_{k=1}^{3} k \cdot \prod_{k=4}^{5} k \qquad = (1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 5) = 6 \cdot 20 = 120 \tag{5.20}$$

Beispiel 5.17: Beispiel 3 zum Produktzeichen

$$\prod_{i=4}^{7} i = \qquad 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840 \tag{5.21}$$

$$= \prod_{i=4-2}^{7-2} (i+2) \quad = \quad \prod_{i=2}^{5} (i+2) \qquad = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840 \tag{5.22}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beispiel 5.18: Beispiel 4 zum Produktzeichen

$$\prod_{i=1}^{3}(i^2\cdot(i+1)) = (1^2\cdot(1+1)\cdot(2^2\cdot(2+1)\cdot(3^2\cdot(3+1) \tag{5.23}$$

$$= (1\cdot 2)(4\cdot 3)\cdot(9\cdot 4) = 864 \tag{5.24}$$

$$= \prod_{i=1}^{3} i^2 \cdot \prod_{i=1}^{3}(i+1) = (1^2\cdot 2^2\cdot 3^2)\cdot((1+1)\cdot(2+1)\cdot(3+1)) \tag{5.25}$$

$$= (1\cdot 4\cdot 9)\cdot(2\cdot 3\cdot 4) = 864 \tag{5.26}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

5.2.4 Bruchrechnung

Die wichtigsten Definitionen und Regeln im Zusammenhang mit Brüchen sollen hier noch einmal zusammengefasst werden.

Definition 5.1: Bruchrechnung

Seien $a, b \in \mathbb{C}$ mit $b \neq 0$,
dann heißt die Verknüpfung $a : b$ **Division**[5.13] von a und b.
Die Zahl $a : b$ wird als Quotient[5.14] (von a und b) bezeichnet,
a als Zähler und b als Nenner.
Alternativ werden die Notationen $\frac{a}{b}$ oder a/b oder a/b
und die Bezeichnung „Bruch“ verwendet.

5.2.4.1 Hauptnenner

Beim Addieren / Subtrahieren von Brüchen ist es nötig, die verschiedenen Brüche erst einmal auf einen gemeinsamen **Hauptnenner** oder **Generalnenner** zu bringen. Dieser ist das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV[5.15]) aller beteiligten Nenner. Sollen Brüche miteinander verglichen oder addiert / subtrahiert werden, so werden sie dazu zunächst durch **Erweitern** auf diesen gemeinsamen Nenner gebracht.

Als gemeinsamen Nenner kann man immer den Hauptnenner verwenden, dies erlaubt in vielen praktischen Fällen auch die einfachste Rechnung (weil die Zahlen dann nicht übermäßig groß werden).

Beispiel 5.19: Beispiel: Bruchrechnung

$$\frac{2}{9} + \frac{7}{5} =$$

$$= \frac{2 \cdot 5}{9 \cdot 5} + \frac{7 \cdot 9}{5 \cdot 9}$$

$$= \frac{10}{45} + \frac{63}{45}$$

$$= \frac{10 + 63}{45} = \frac{73}{45}$$

Bei dem ersten Ausdruck steht 9 und bei dem zweiten 5 im Nenner. Die Brüche können erst addiert werden, wenn bei beiden das Gleiche im Nenner steht.

Hierzu müssen die Brüche erweitert werden. Der erste Bruch kann mit dem Nenner des zweiten und der zweite Bruch mit dem Nenner des ersten erweitert werden.

Nun dürfen die Zähler addiert werden, da beide Brüche den gleichen Nenner haben .

[5.13] lat. dīvidere: „teilen“, „aufteilen“, „trennen“.
[5.14] lat. quotientem (Akkusativ von quoties): „wie oft“, „wie viele Male“.
[5.15] Kleinstes gemeinsames Vielfaches – Wichtig z. B. für die Bestimmung des Hauptnenners.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

5.2.4.2 Gleichheit von Brüchen

Regel 5.15: Gleichheit zweier Brüche

Für alle Zahlen $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ mit $b_1, b_2 \neq 0$ sind die Brüche $\frac{a_1}{b_1}$ und $\frac{a_2}{b_2}$ genau dann gleich, wenn die Produkte $a_1 \cdot b_2$ und $a_2 \cdot b_1$ gleich sind, das heißt:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow a_1 \cdot b_2 = a_2 \cdot b_1 \tag{5.27}$$

Der Wert eines Bruches wird nicht verändert, wenn man Nenner und Zähler mit dem gleichen Wert multipliziert oder dividiert.

Beispiel 5.20: Gleichheit zweier Brüche

$$\frac{6}{34} = \frac{15}{85} \quad \text{denn} \quad \frac{6:2}{34:2} = \frac{3}{17} \quad \text{und} \quad \frac{3\cdot 5}{17\cdot 5} = \frac{15}{85} \tag{5.28}$$

5.2.4.3 Erweitern und Kürzen von Brüchen

Regel 5.16: Erweitern und Kürzen von Brüchen

Für alle Zahlen $a, b, k \in \mathbb{C}$ mit $b, k \neq 0$ gilt:

$$\frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{k \cdot b} \tag{5.29}$$

Wird dieser Vorgang von links nach rechts durchgeführt, heißt er **Erweitern** des Bruchs. Wird er von rechts nach links ausgeführt, heißt die Operation **Kürzen** des Bruchs.

Beispiel 5.21: Beispiel 1 zum Kürzen von Brüchen

$$\frac{5 \cdot x - 10}{5} = \frac{5\cdot x - 5\cdot 2}{5} = \frac{5 \cdot (x-2)}{5} = x - 2 \tag{5.30}$$

Beispiel 5.22: Beispiel 2 zum Kürzen von Brüchen

$$\frac{7 - 21 \cdot x}{15 \cdot x - 5} = \frac{7 \cdot (1 - 3 \cdot x)}{5 \cdot (3 \cdot x - 1)} = \frac{-7 \cdot (3 \cdot x - 1)}{5 \cdot (3 \cdot x - 1)} = -\frac{7}{5} \tag{5.31}$$

Dieses Beispiel gilt allerdings nur für $x \neq 1/3$!

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

5.2.4.4 Addition und Subtraktion von Brüchen

Regel 5.17: Addition und Subtraktion von Brüchen

Für alle Zahlen $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ mit $b_1, b_2 \neq 0$ gilt:

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1}{b_1 \cdot b_2} \tag{5.32a}$$

und

$$\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}{b_1 \cdot b_2} \tag{5.32b}$$

Abgekürzte Schreibweise:

$$\frac{a_1}{b_1} \pm \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 \cdot b_2 \pm a_2 \cdot b_1}{b_1 \cdot b_2} \tag{5.33}$$

Beispiel 5.23: Beispiel 1 zum Addieren und Subtrahieren

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{3} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12} \tag{5.34}$$



Hinweis 5.3: Schreibweise

Man beachte: Bei der Bruchrechnung steht $1\frac{5}{12}$ für $1 + \frac{5}{12}$ und nicht für $1 \cdot \frac{5}{12}$!

Beispiel 5.24: Beispiel 2 zum Addieren und Subtrahieren

$$\begin{aligned}\mathbf{\frac{5}{36}} + \mathbf{\frac{7}{60}} &= \frac{5}{36}\frac{\cdot 60}{\cdot 60} + \frac{7}{60}\frac{\cdot 36}{\cdot 36} = \frac{300}{2160} + \frac{252}{2160} = \frac{552}{2160}\frac{:2}{:2} = \frac{276}{1080}\frac{:2}{:2} \\ &= \frac{138}{540}\frac{:2}{:2} = \frac{69}{270}\frac{:3}{:3} = \mathbf{\frac{23}{90}}\end{aligned} \tag{5.35}$$

Die obige Vorgehensweise in Beispiel 5.23 und 5.24 erzeugt als Hauptnenner des neuen Bruches das Produkt der Nenner der ursprünglichen Brüche. Dies ist jedoch nicht immer notwendig bzw. sinnvoll. Oft gibt es einen kleineren Hauptnenner. Speziell bei ganzzahligen Nennern findet man als kleinsten möglichen Hauptnenner das oben beschriebene kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner (kgV).

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beispiel 5.25: Bruchaddition mit Hauptnenner

$\frac{3}{8}+\frac{5}{12}=?$

Vielfache des Nenners 8: $8\ 16\ 24\ 32\ 40\ \ldots \Leftrightarrow \quad 24 = 8\cdot 3$

Vielfache des Nenners 12: $12\ 24\ 36\ 48\ \ldots \quad \Leftrightarrow \quad 24 = 12\cdot 2$

$$\frac{3}{8}+\frac{5}{12}=\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{3}+\frac{5}{12}\cdot\frac{2}{2}=\frac{9}{24}+\frac{10}{24}=\frac{19}{24} \tag{5.36}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

5.2.4.5 Multiplikation von Brüchen

Regel 5.18: Multiplikation von Brüchen

Für alle Zahlen $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ mit $b_1, b_2 \neq 0$ wird das Produkt zweier Brüche berechnet gemäß:

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 \cdot a_2}{b_1 \cdot b_2} \tag{5.37}$$

→ **Zwei Brüche werden demnach multipliziert, indem jeweils Zähler und Nenner getrennt voneinander multipliziert werden.**

Brüche malnehmen ist recht einfach: Man rechnet einfach Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner. Anschließend kann man das Ergebnis ggf. noch kürzen.

Beispiel 5.26: Multiplikation von Brüchen

$$\frac{5}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \tag{5.38}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{8} \tag{5.39}$$

5.2.4.6 Division von Brüchen

Regel 5.19: Division von Brüchen

Für alle Zahlen $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ mit $b_1, b_2 \neq 0$ gilt:

$$\frac{a_1}{b_1} : \frac{a_2}{b_2} = \frac{\frac{a_1}{b_1}}{\frac{a_2}{b_2}} = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{b_2}{a_2} = \frac{a_1 \cdot b_2}{b_1 \cdot a_2} = \frac{a_1 \cdot b_2}{a_2 \cdot b_1} \tag{5.40}$$

→ **Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit dessen Kehrwert multipliziert.**

Einfach gesagt: [5.16]

- Der erste Bruch bleibt wie er ist.
- Statt dem „:“ wird ein „·“ geschrieben.
- Der zweite Bruch wird umgedreht, Zähler und Nenner vertauscht.
- Die beiden „neuen“ Brüche werden multipliziert, wie man das mit Brüchen macht: Zähler · Zähler und Nenner · Nenner.

[5.16] http://www.frustfrei-lernen.de/mathematik/brueche-dividieren-kehrwehrt-zaehler-nenner.html; hier finden Sie auch weitere Übungsaufgaben

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beispiel 5.27: Beispiel 1: Bruchdivision

$$\frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8} \tag{5.41}$$

Beispiel 5.28: Beispiel 2a: Bruchdivision

$$\frac{5}{6} : \left(\frac{3}{2} : \frac{4}{3}\right) = \frac{5}{6} : \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{6} : \frac{9}{8} = \frac{5}{6} \cdot \frac{8}{9} = \frac{40}{54} = \frac{20}{27} \tag{5.42}$$

Beispiel 5.29: Beispiel 2b: Bruchdivision

$$\left(\frac{5}{6} : \frac{3}{2}\right) : \frac{4}{3} = \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3}\right) : \frac{4}{3} = \frac{10}{18} : \frac{4}{3} = \frac{10}{18} \cdot \frac{3}{4} = \frac{30}{72} = \frac{5}{12} \tag{5.43}$$

Beispiel 5.30: Beispiel 3: Bruchdivision

$$\text{Für } x \neq 1: \frac{x-1}{2} : \frac{x-1}{3} = \frac{x-1}{2} \cdot \frac{3}{x-1} = \frac{x-1}{2} \cdot \frac{3}{x-1} = \frac{3 \cdot (x-1)}{2 \cdot (x-1)} = \frac{3}{2} \tag{5.44}$$

Beispiel 5.31: Beispiel 4: Bruchdivision

$$\text{Für } b \neq 0: \frac{6 \cdot a \cdot b}{7} : \frac{b}{3} = \frac{6 \cdot a \cdot b}{7} \cdot \frac{3}{b} = \frac{18 \cdot a \cdot b}{7 \cdot b} = \frac{18 \cdot a}{7} \tag{5.45}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

5.2.5 Umwandlung von Dezimalbrüchen in Brüche und umgekehrt

a) Dezimalbrüche - gewöhnliche Brüche

$$1{,}12 = 1\frac{12}{100} = 1\frac{3}{25} \tag{5.46}$$

b) Gewöhnliche Brüche – Dezimalbrüche

$$\frac{3}{100} = 0{,}03 \tag{5.47}$$

Brüche mit dem Nenner 10, 100, 1000 usw. kann man sehr leicht in Dezimalbrüche umwandeln. Brüche mit anderen Nennern muss man auf 10, 100, 1000 usw. erweitern oder kürzen.

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{25}{25} = \frac{75}{100} = 0{,}75 \tag{5.48}$$

$$\frac{19}{8} = \frac{19}{8} \cdot \frac{12{,}5}{12{,}5} = \frac{237{,}5}{100} = 2{,}375 \tag{5.49}$$

→ Man wandelt einen Bruch in einen Dezimalbruch um, indem man den Zähler durch den Nenner dividiert.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

5.2.6 Periodische Dezimalbrüche

Dieses klappt nicht bei allen Brüchen, z. B. mit dem Nennern 3 oder 7. Einen periodischen Dezimalbruch erkennt man daran, dass sich eine Ziffer oder eine Folge von Ziffern immer wiederholen.

Die Wiederholungen können bei der ersten Nachkommastelle beginnen (**reinperiodische Dezimalbrüche**), sie können aber auch erst später beginnen (**gemischtperiodische Dezimalbrüche**).

$3{,}5555\ldots$	Periode 5	$3{,}\overline{5}$
$6{,}7111\ldots$	Periode 1	$6{,}7\overline{1}$
$0{,}132132132\ldots$	Periode 132	$0{,}\overline{132}$
$3{,}12571428571428571428\ldots$	Periode 571428	$3{,}12\overline{571428}$
$6{,}1282828\ldots$	Periode 28	$6{,}1\overline{28}$

Die Pünktchen zeigen an, dass sich diese Wiederholung endlos fortsetzt. Die sich wiederholenden Ziffern einer periodischen Dezimalzahl nennt man ihre „Periode“. Eine verkürzte Schreibweise periodischer Dezimalbrüche ist das Überstreichen der Periode (siehe obige Beispiele, rechte Spalte).

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

5.2.7 Umwandlung periodische Dezimalbrüche

5.2.7.1 Rein periodische Dezimalbrüche

Wenn man eine rein periodische Dezimalzahl in einen Bruch umrechnen will, dann zählt man zunächst die Stellen der Periode (also wie viele Stellen unter dem Periodenstrich stehen). In den **Nenner** schreibt man nun so viele 9en wie die Periode Stellen hat, in den **Zähler** schreibt man die Periode selbst.

Beispiel 5.32: Beispiel 1 Dezimalbrüche

Man schreibe die Dezimalzahl $0{,}\overline{12}$ als Bruch.

- Die Periode der Zahl $0{,}\overline{12}$ hat die Länge 2.
- Nun schreibt man in den Nenner des Bruchs genauso viele 9en, wie die Periode Stellen hat $\rightarrow \frac{?}{99}$
- In den Zähler schreibt man nun die Periode, also die Zahl 12 $\rightarrow \frac{12}{99}$

Insgesamt erhält man also: $0{,}\overline{12} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$.

Beispiel 5.33: Beispiel 2 Dezimalbrüche

Man schreibe die Dezimalzahl $0{,}\overline{357}$ als Bruch.

- Die Periode der Zahl $0{,}\overline{357}$ hat die Länge 3.
- Nun schreibt man in den Nenner des Bruchs genauso viele 9en, wie die Periode Stellen hat $\rightarrow \frac{?}{999}$
- In den Zähler schreibt man nun die Periode, also die Zahl 357 $\rightarrow \frac{357}{999}$

Insgesamt erhält man also: $0{,}\overline{357} = \frac{357}{999} = \frac{119}{333}$.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beispiel 5.34: Beispiel 3 Dezimalbrüche

Man schreibe die Dezimalzahl $2{,}\overline{23}$ als Bruch.

- Schreiben Sie den Bruch zuerst als Summe $2{,}\overline{23} = 2 + 0{,}\overline{23}$
- Nun wandelt man den zweiten Summanden in einen Bruch um:
  $2{,}\overline{23} = 2 + 0{,}\overline{23} = 2 + \frac{23}{99}$
- Nun kann die Summe wieder in einen Bruch umgewandelt werden:
  $2 + \frac{23}{99} = \frac{198}{99} + \frac{23}{99} = \frac{221}{99}$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

5.2.7.2 Gemischtperiodische Dezimalbrüche

Will man eine gemischt-periodischen Dezimalzahl in einen Bruch umwandeln, dann multipliziert man die Zahl zuerst so mit einer Potenz von 10, damit wir eine rein periodische Dezimalzahl erhalten. Diese Zahl wandelt man dann wie oben in einen Bruch um. Zum Schluss muss man aber wieder den ersten Schritt rückgängig machen und den Bruch durch die Zehnerpotenz dividieren, mit der man die Zahl am Anfang multipliziert hat.

Beispiel 5.35: Gemischtperiodischer Dezimalbruch

Man schreibe die Dezimalzahl $1{,}25\overline{142857}$ als Bruch.

- Multiplizieren mit 100: $1{,}25\overline{142857} \cdot 100 = 125{,}\overline{142857}$
- Umwandeln:
  $125{,}\overline{142857} = 125 + \frac{142857}{999.999} = 125 \cdot \frac{999.999}{999.999} + \frac{142857}{999.999} = \frac{124.999.875+142857}{999.999} = \frac{125.142.732}{999.999}$
  $= \frac{4.634.916}{37.037} = \frac{876}{7}$
- Multiplizieren mit 100 rückgängig machen:
  $\frac{876}{7} : 100 = \frac{876}{700} = \frac{219}{175} = 1\frac{44}{175}$

5.2.8 Kettenbrüche

Siehe das entsprechende Kapitel über die Kettenbruchzerlegung (10.4.1: Kettenbruchzerlegungen von Termen) auf Seite 10-27.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

6 Arithmetik

Das heutzutage von uns benutzte Zahlensystem ist im Laufe der Jahrhunderte durch mehrere Erweiterungen aufgrund immer neuer Anforderungen entstanden.[6.1]

6.1 Die natürlichen Zahlen

Am Anfang standen die **natürlichen Zahlen:**

Definition 6.1: Die natürlichen Zahlen:

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\} \tag{6.1}$$

Wie „natürlich“ diese Zahlen wirklich sind, ist schwer zu sagen. Bestimmte (auch handeltreibende) Naturvölker benutzen heute noch Zahlwörter ausschließlich für die Zahlen von Eins bis etwa Drei.

Regel 6.1: Eigenschaften natürlicher Zahlen

1. Jede natürliche Zahl hat **genau einen Nachfolger;**
2. Jede natürliche Zahl – mit Ausnahme der Zahl 1 – hat **genau einen Vorgänger.**

Regel 6.2: Abgeschlossenheit

Die natürlichen Zahlen sind hinsichtlich der Operationen Multiplikation und Addition ***abgeschlossen***.

Das bedeutet:

- Die Summe zweier natürlicher Zahlen ist auch eine natürliche Zahl:
  $n_1, n_2 \in \mathbb{N} \Rightarrow n_1 + n_2 \in \mathbb{N}$
- Das Produkt zweier natürlicher Zahlen ist auch eine natürliche Zahl.
  $n_1, n_2 \in \mathbb{N} \Rightarrow n_1 \cdot n_2 \in \mathbb{N}$

Natürliche Zahlen kann man wie in Abbildung 6.1 gezeigt auf einem **Zahlenstrahl** darstellen.
Je weiter man auf dem Zahlenstrahl nach rechts wandert, umso größer werden die Zahlen.

Abbildung 6.1: Zahlenstrahl ($\mathbb{N}_0$)



Quelle: Eigene Darstellung

[6.1] Arithmetik von griechisch ἀριθμητική [τέχνη] (arithmetiké [téchne]), wörtlich „die zahlenmäßige [Kunst]“

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

6.1.1 Die Null

Die **Null** hat eine Sonderrolle inne, zu deren Behandlung es unterschiedliche Konventionen gibt. Selten wird sie zu den natürlichen Zahlen gerechnet. Wir wollen aber ein neues Symbol für die Menge der natürlichen Zahlen mit Null einführen, d. h. wir folgen der Konvention, die Null nicht zu den natürlichen Zahlen zu rechnen.

Der Grund hierfür ist, dass die Null in Europa erst seit dem 13. Jahrhundert durchgehend gebräuchlich ist.

Die Römer zum Beispiel hatten bekanntermaßen Symbole I, V, X, C, D, M usw., mit denen sie alle natürlichen Zahlen darstellen konnten. Aber sie hatten kein Symbol für die Null.

Deswegen kann man mit römischen Zahlensymbolen nur schwerlich schriftlich addieren oder multiplizieren.

Definition 6.2: Die natürlichen Zahlen incl. der Null

$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} \tag{6.2}$$

Dieser Zahlenbereich ist ebenfalls unter der Multiplikation und der Addition **abgeschlossen**. Die einzige Besonderheit ist: **Division durch Null** ist grundsätzlich verboten.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

6.2 Die ganzen Zahlen

In $\mathbb{N}_0$ kann man der Subtraktion $5-9$ kein Ergebnis zuordnen. Dies ist der Anlass, den Zahlenbereich auf die **ganzen Zahlen** zu erweitern:

Definition 6.3: Die ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \tag{6.3}$$

Dieser Zahlbereich ist unter der Addition und der Subtraktion abgeschlossen. Insbesondere verliert der Unterschied zwischen Addition und Subtraktion seine Bedeutung, da $a-b$ ab jetzt dasselbe ist wie $a+(-b)$.[6.2]

Regel 6.3: Eigenschaften ganzer Zahlen

1. Jede ganze Zahl hat **genau einen Nachfolger**;
2. Jede ganze Zahl hat **genau einen Vorgänger**;
3. Addition, Subtraktion und Multiplikation sind in $\mathbb{Z}$ uneingeschränkt durchführbar.

Regel 6.4: Abgeschlossenheit der ganzen Zahlen

Die ganzen Zahlen sind hinsichtlich der Operationen Addition, Subtraktion und Multiplikation **abgeschlossen**.

Das bedeutet:

- Die Summe zweier ganzer Zahlen ist auch eine ganze Zahl:
  $z_1, z_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow z_1 + z_2 \in \mathbb{Z}$
- Die Differenz zweier ganzer Zahlen ist auch eine ganze Zahl:
  $z_1, z_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow z_1 - z_2 \in \mathbb{Z}$
- Das Produkt zweier ganzer Zahlen ist auch eine ganze Zahl.
  $z_1, z_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{Z}$

Ganze Zahlen kann man wie in Abbildung 6.2 gezeigt auf einer **Zahlengerade** darstellen.

Auch hier gilt: Je weiter man auf der Zahlengerade nach rechts wandert, umso größer werden die Zahlen.

Abbildung 6.2: Zahlengerade ($\mathbb{Z}$)



Quelle: Eigene Darstellung

[6.2] Streng genommen gibt es einen Unterschied zwischen dem Minuszeichen im Beispiel „$a-b$“ (zweistelliger Operator), und dem Minuszeichen im Beispiel „$-b$“ (einstelliger Operator)

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

6.3 Die rationalen Zahlen (Brüche)

In $\mathbb{Z}$ kann man z. B. der Division $\frac{4}{3}$ kein Ergebnis zuordnen. Daher definiert man die **rationalen Zahlen**:[6.3]

Definition 6.4: Die rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z},\ a,\ b \text{ teilerfremd} \right\} \tag{6.4}$$

Wichtig sind zwei Dinge:

1. a und b **teilerfremd** bedeutet, dass die Brüche vollständig gekürzt sein sollen.[6.4]
2. Die rationalen Zahlen sind bezüglich Multiplikation, Division, Addition und Subtraktion **abgeschlossen**. Es macht sogar ab jetzt keinen Sinn mehr, zwischen Multiplikation und Division zu unterscheiden, denn $\frac{a}{b}$ ist ab jetzt dasselbe wie $a \cdot \frac{1}{b}$. Die Division durch Null ist und bleibt verboten.

Regel 6.5: Abgeschlossenheit der rationalen Zahlen

Die rationalen Zahlen sind hinsichtlich der Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division (außer durch Null) **abgeschlossen**.

Das bedeutet:

- Die Summe zweier rationalen Zahlen ist auch eine rationale Zahl:
  $z_1, z_2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow z_1 + z_2 \in \mathbb{Q}$
- Die Differenz zweier rationalen Zahlen ist auch eine rationale Zahl:
  $z_1, z_2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow z_1 - z_2 \in \mathbb{Q}$
- Das Produkt zweier rationalen Zahlen ist auch eine rationale Zahl.
  $z_1, z_2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{Q}$
- Der Quotient zweier rationalen Zahlen ist auch eine rationale Zahl.
  $z_1, z_2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{Q} \qquad (z_2 \neq 0)$

[6.3] lat. rationalis: vernünftig, sinnvoll

[6.4] Bemerkung: Die Bedingung a und b **teilerfremd** wird deswegen eingebaut, weil dieselbe Zahl sonst unter Umständen durch verschiedene Brüche dargestellt werden könnte - es wird niemand Einspruch erheben, wenn wir sagen, dass wir z. B. $\frac{6}{3}$, $\frac{128}{64}$, oder $\frac{2}{1}$ als dieselbe Zahl ansehen wollen.
Die Bedingung a und b teilerfremd bewirkt somit, dass es in der Menge $\mathbb{Q}$ zu jeder Zahl, die als Bruch ganzer Zahlen darstellbar ist, genau ein Element gibt; Mehrfachnennungen werden somit vermieden.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Regel 6.6: Dezimalbrüche

Jede rationale Zahl lässt sich als ***endliche*** oder ***unendliche periodische Dezimalzahl*** darstellen:

Beispiele:[6.5]

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots = 0{,}\overline{3} \qquad \frac{7}{4} = 1{,}75 \qquad \frac{8}{55} = 0{,}1454545\ldots = 0{,}1\overline{45} \tag{6.5}$$

[6.5] Das Überstreichen (z. B. $\overline{45}$) bedeutet: Das Überstrichene wird endlos wiederholt. Man liest es „Periode“, im Beispiel also „Periode vier fünf“

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

6.4 Die reellen Zahlen

Obwohl die rationalen Zahlen gegen die grundlegenden Rechenoperationen abgeschlossen sind, sind auch sie unvollständig.[6.6]

Zum Beispiel ist die Seitenlänge der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit Katheten der Länge Eins nach dem Satz von Pythagoras gleich der Wurzel aus Zwei, und diese Zahl lässt sich nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen darstellen.

Dies kann man als einen ausreichenden Grund ansehen, die rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zu erweitern. Die genaue Idee benutzt allerdings die Idee der Folgenkonvergenz:

Definition 6.5: Reelle Zahlen

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind diejenigen Zahlen, die man als Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen erhalten kann.

Alternativ kann man sagen, dass jede reelle Zahl **beliebig genau** durch rationale Zahlen **approximiert** (angenähert) werden kann. Das können Sie zum Beispiel daran sehen, dass Sie eine gegebene reelle Zahl in ihrer Dezimaldarstellung betrachten, z. B.

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937510582097 4\ldots \tag{6.6}$$

Wie Sie vielleicht wissen, besitzt π unendlich viele Nachkommastellen ohne periodische Wiederholungen. Damit ist π genau wie $\sqrt{2}$ eine **reelle Zahl**, die nicht durch einen Bruch darstellbar ist. Aber zum Beispiel

$$\pi \approx \frac{3141592653589}{1000000000000} = 3{,}141592653589 \in \mathbb{Q} \tag{6.7}$$

ist ein gekürzter[6.7] Bruch, der automatisch auf den ersten 12 Nachkommastellen mit π übereinstimmt. Die Zahl der Nachkommastellen, die Sie dabei betrachten, ist natürlich willkürlich. Sie können also beliebig viele – sagen wir n – Nachkommastellen von π angeben und erhalten so zu einer beliebigen natürlichen Zahl n rationale Zahlen, die auf den ersten n Nachkommastellen mit π übereinstimmen.

Einige wichtige Teilmengen der **reellen Zahlen** haben besondere Namen:

- $\mathbb{Q}$ ist die Menge der rationalen Zahlen.
- Die Differenzmenge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nennt man die Menge der **irrationalen Zahlen**.
- Die Menge aller reellen Zahlen, die sich nicht als eine n-te Wurzel einer rationalen Zahl darstellen lassen, nennt man die Menge der **transzendenten Zahlen**.
- Die Komplementmenge zu der Menge der transzendenten Zahlen nennt man die Menge der **algebraischen Zahlen**.

[6.6] Reell von lat. realis: anständig, ehrlich
[6.7] Wie sieht man eigentlich, dass der Bruch nicht weiter gekürzt werden kann?

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Definition 6.6: Signum-Funktion

Die ***Signum-Funktion*** $(\operatorname{sgn}(x))$[6.8] liefert das **Vorzeichen** einer Zahl x:

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} +1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases} \tag{6.8}$$

Definition 6.7: Betrag

Unter dem **Betrag** $|\,x\,|$ einer reellen Zahl x versteht man den reinen Zahlenwert ohne Vorzeichen. Der Betrag ist immer positiv:

$$|\,x\,| := x \cdot \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases} \tag{6.9}$$

Beispiel 6.1: Beispiele

$\operatorname{sgn}(-42) = -1 \qquad \operatorname{sgn}(-12{,}34) = -1 \qquad \operatorname{sgn}(+12{,}34) = 1$

$|\,+42\,| = 42 \qquad |\,-42\,| = 42 \qquad |\,0\,| = 0$

$|\,-12{,}34\,| = 12{,}34 \qquad |\,+43{,}21\,| = 43{,}21$

Regel 6.7: Wurzeln

Satz: $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl, d. h.:

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \tag{6.10}$$

Es gibt keine rationale Zahl, deren Quadrat gleich 2 ist.

[6.8] lat. signum: Zeichen

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beweis 6.1: Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$

Dieser Beweis (Beweis durch Widerspruch) geht auf Euklid zurück:

Wir nehmen an, $\sqrt{2}$ sei rational. Dann existieren zwei natürliche Zahlen a und b, die **teilerfremd** sind (d. h. $\mathrm{kgV}(a,b)=1$), sodass gilt:

$$\sqrt{2}=\frac{a}{b} \tag{6.11a}$$

Wir quadrieren beide Seiten:

$$2=\frac{a^2}{b^2} \quad \Rightarrow \quad a^2=2b^2 \tag{6.11b}$$

Daraus folgt: a^2 ist eine gerade Zahl $\Rightarrow$ a ist ebenfalls gerade, denn das Quadrat einer ungeraden Zahl ist ungerade. Also existiert eine natürliche Zahl k mit $a=2\cdot k$). Wir setzen dies ein:

$$(2\cdot k)^2=2\cdot b^2 \quad \Rightarrow \quad 4\cdot k^2=2\cdot b^2 \quad \Rightarrow \quad b^2=2\cdot k^2 \tag{6.11c}$$

Damit ist auch b^2 gerade, also ist auch b gerade.

Widerspruch: Sowohl a als auch b sind gerade, haben also einen gemeinsamen Teiler 2. Das widerspricht der Annahme, dass a/b vollständig gekürzt ist (d. h. dass a und b teilerfremd sind).

Folgerung: Unsere Annahme war falsch. Daher ist $\sqrt{2}$ **irrational**. ■

Definition 6.8: Reelle Zahlen

Alle auf der Zahlengeraden darstellbaren Zahlen heißen ***reelle Zahlen***.
Eine reelle Zahl, welche nichtrational ist, heißt ***irrational***.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

6.4.1 Die Eulersche Zahl e

Leonhard Euler[6.9] war ein bedeutender Schweizer Mathematiker. Nach ihm ist die Basis der natürlichen Logarithmen, die sogenannte Euler'sche Zahl e = 2,718 281 828 459 045 235... benannt.[6.10]

Nicht nur in der Mathematik spielt die Euler'sche Zahl e eine überaus wichtige Rolle. Auch in der Natur finden Sie viele Vorgänge (insbesondere zeitabhängige oder Wachstumsprozesse), deren mathematische Beschreibung die Zahl e enthält.

Beispiel 6.2: Temperaturausgleich

Ein klassisches Beispiel für den Einsatz von e-Funktionen ist der Temperaturaustausch zwischen heißen Stahlkugeln und kaltem Wasser, wenn Sie die heißen Kugeln in kaltes Wasser werfen.

Die Temperatur der Kugeln sinkt dabei nicht linear, sondern folgt einem exponentiellen Abkühlungsgesetz – genauer gesagt dem Newton'schen Abkühlungsgesetz:

$$T(t) = T_{\text{Umgebung}} + (T_0 - T_{\text{Umgebung}}) \cdot e^{-k \cdot t} \tag{6.12}$$

Dabei ist:

$T(t)$	die Temperatur zum Zeitpunkt t,
T_0	die Anfangstemperatur der Kugeln im Zeitpunkt $t = 0$,
T_{Umgebung}	die Wassertemperatur im Zeitpunkt $t = 0$ und
k	eine materialspezifische Konstante.

Beispiel 6.3: Radioaktiver Zerfall

Die Abnahme der Strahlungsintensität eines radioaktiven Materials über der Zeit entspricht einer Potenzfunktion mit e als Basis der Potenz.

Weitere Informationen zu dieser Zahl, Ihrer Bedeutung und ihrer Berechnung finden Sie z. B. hier: http://de.wikipedia.org/wiki/Eulersche_Zahl.

Im Folgenden soll diese so überaus wichtige Zahl anschaulich anhand eines Gedankenexperiments hergeleitet werden.

[6.9] Leonhard Euler (* 15. April 1707 in Basel; † 7. September (jul.)/ 18. September 1783 (greg.) in Sankt Petersburg) war ein Schweizer Mathematiker und Physiker. Wegen seiner Beiträge zur Analysis, zur Zahlentheorie und zu vielen weiteren Teilgebieten der Mathematik gilt er als einer der bedeutendsten Mathematiker.

[6.10] Beachten Sie: e ist eine feststehende, benannte Konstante; sie wird deswegen – nach den Regeln zur Formelschreibweise – in Steilschrift und **nicht** *kursiv* geschrieben. Leider halten sich viele Autoren nicht an die Regeln – leider auch in mathematischen Lehrbüchern ...

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beispiel 6.4: Gedankenexperiment - Verzinsung

Nehmen Sie einmal an, Sie besäßen ein Kapital von genau einem Euro und brächten dieses Kapital zu einer Bank, die Ihnen einen Zins von 100 % pro Jahr verspricht.
Nehmen Sie weiterhin an, diese Bank würde Ihnen die Zinsen einmal im Jahr gut schreiben. Dann besitzen Sie nach einem Jahr doch ganz offensichtlich Ihr Kapital (von 1 Euro) plus die Zinsen (100 % von 1 Euro = 1 Euro), also insgesamt 2 Euro.
Jetzt nehmen Sie an, die Bank würde Ihnen die Zinsen nicht mehr einmal im Jahr gut schreiben, sondern vielmehr zwei Mal.
Dann besitzen Sie nach einem halben Jahr Ihr Kapital (1 Euro) plus die Zinsen für ein halbes Jahr (die Hälfte von 100 % von 1 Euro = 0,50 Euro), also 1,50 Euro. Am Ende des zweiten Halbjahres schreibt Ihnen die Bank wiederum die Halbjahreszinsen gut, also die Hälfte von (100 % von 1,50 Euro) = 0,75 Euro. Damit besitzen Sie bei halbjährlicher Zinsgutschrift am Jahresende bereits 2,25 Euro.

Nun treiben wir dieses Gedankenexperiment weiter. Angenommen, die Bank schüttet Zinszahlungen dreimal im Jahr aus, also alle vier Monate. Dann haben Sie (Rundungsdifferenzen beachten!):

Nach 4 Monaten: 1 + (1/3 von 100 % von 1) = 1 + 0,33 = 1,33 Euro
nach 8 Monaten: 1,33 + (1/3 von 100 % von 1,33) = 1,33 + 0,44 = 1,78 Euro
nach 12 Monaten: 1,78 + (1/3 von 100 % von 1,78) = 1,78 + 0,59) = 2,37 Euro

Nun treiben wir dieses Gedankenexperiment weiter. Angenommen, die Bank schüttet Zinszahlungen viermal im Jahr aus ...
... ...

Hier haben wir eine kleine Tabelle erstellt, welche unser Vermögen nach einem Jahr bei ein-, zwei-, drei-, ... bis 6-maliger unterjähriger Zinszahlung aufzeigt:

Tabelle 6.1: unterjähriger Zinszahlung

Anz.	Kap.	+Zins	=K	+Z	=K	+Z	=K	+Z	=K	+Z	=K	+Z	=K
1	1,00	1,00	2,00										
2	1,00	0,50	1,50	0,75	2,25								
3	1,00	0,33	1,33	0,44	1,78	0,59	2,37						
4	1,00	0,25	1,25	0,31	1,56	0,39	1,95	0,49	2,44				
5	1,00	0,20	1,20	0,24	1,44	0,29	1,73	0,35	2,07	0,41	2,49		
6	1,00	0,17	1,17	0,19	1,36	0,23	1,59	0,26	1,85	0,31	2,16	0,36	2,52

Ganz offensichtlich wird unser Vermögen am Jahresende umso größer, je öfter die Bank unterjährig Zinszahlungen ausschüttet.

Ebenso offensichtlich wird der Zuwachs aber kontinuierlich kleiner:

- Beim Übergang von 1-mal zu 2-mal Zinszahlung sind es noch 2,25 – 2,00 = 0,25 Euro
- Beim Übergang von 2-mal zu 3-mal: 2,37 – 2,25 = 0,12 Euro
- Beim Übergang von 3-mal zu 4-mal: 2,44 – 2,37 = 0,07 Euro

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Strebt unser Vermögen am Jahresende gegen einen Grenzwert, wenn die Zinszahlungsintervalle immer kürzer werden, oder wächst unser Vermögen gegen unendlich?

Zur Beantwortung dieser Frage schlagen wir in einer Formelsammlung die mathematische Formel für den Zinseszins nach und finden:

Das Kapital $K_0 = 1$ und
$p = 100\,\% = 1$, wenn der Zinszuschlag jährlich erfolgt, oder
$p = 1/n$, wenn der Zinszuschlag n mal im Jahr erfolgt.

Setzen wir dies noch in die Zinseszinsformel ein:

$$K_n = 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{6.13}$$

Wir veranschaulichen uns die Aufgabe in Microsoft® Excel®:

Wir machen uns eine kleine EXCEL®- Tabelle. In die erste Zeile schreiben wir die Überschrift:

- In die Zelle A1 schreiben wir das ‚n'
- In die Zelle B1 schreiben wir ‚K_n'

In die Zelle A2 schreiben wir eine ‚1', in die Zelle A3 eine ‚2' A2 und A3 markieren und nach unten ziehen In B2 geben wir ein:
‚= POTENZ (1 + 1 / A2 ; A2)'
B2 markieren und nach unten ziehen

Tabelle 6.2: Excel - Tabelle

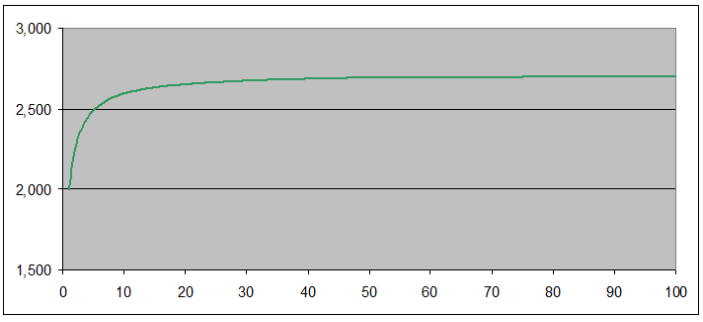
	A	B
1	n	K_n
2	1	2,000
3	2	2,250
4	3	2,370
...	...	...
100	99	2,705
101	100	2,705
102	1.000	2,717
103	10.000	2,718

Wir markieren unsere n und K_n – Daten und erzeugen ein X – Y – Diagramm.

Es hat den Anschein, als würde unser K_n einem Grenzwert von ungefähr 2,718 zustreben.

Dieser Grenzwert ist die Zahl e.

Tabelle 6.3: X – Y – Diagramm



Quelle: Eigene Darstellung

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Der Mathematiker schreibt dieses so:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} \tag{6.14}$$

Die Zahl e ist auch häufig in der Wahrscheinlichkeitsrechnung anzutreffen.

Angenommen, ein Bäcker will n Brötchen backen, gibt für jedes Brötchen eine Rosine in den Teig (also n Stück), knetet gut durch, und formt aus dem Teig seine n Brötchen.

Nachher enthält statistisch gesehen jedes e-te Brötchen keine Rosine.

Die Wahrscheinlichkeit p, dass bei n Brötchen alle n Rosinen in anderen Brötchen sind, ergibt im Grenzwert für $n \to \infty$:

$$p = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{\mathrm{e}} \tag{6.15}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

6.5 Die komplexen Zahlen

Auch für die reellen Zahlen gibt es Rechenoperationen, die aus diesem Zahlbereich herausführen. Zum Beispiel besitzt die Gleichung $x^2 = -1$ in den reellen Zahlen keine Lösung, denn das Quadrat einer reellen Zahl ist immer größer oder gleich Null.[6.11]

Die Idee ist nun, eine **neue Zahl** j [6.12] [6.13] einzuführen, die genau diese Eigenschaft hat, d. h. $\mathrm{j}^2 = -1$.

Definition 6.9: Komplexe Zahlen

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind dann gegeben durch die Menge

$$\mathbb{C} := \{\, z = x + \mathrm{j} \cdot y \,|\, x, y \in \mathbb{R};\, \mathrm{j} = \sqrt{-1} \,\} \tag{6.16}$$

Komplexe Zahlen kann man addieren und multiplizieren, genauer gilt wegen $\mathrm{j}^2 = -1$:

$$(x + \mathrm{j} \cdot y) + (u + \mathrm{j} \cdot v) = (x + u) + (y + v) \cdot \mathrm{j} \tag{6.17}$$

$$(x + \mathrm{j} \cdot y) \cdot (u + \mathrm{j} \cdot v) = x \cdot u + \mathrm{j} \cdot y \cdot u + \mathrm{j} \cdot x \cdot v + \mathrm{j}^2 \cdot y \cdot v = (x \cdot u - y \cdot v) + \mathrm{j} \cdot (y \cdot u + x \cdot v) \tag{6.18}$$

Wenn die Lösbarkeit der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ der einzige Grund wäre, ein neues Zahlensystem einzuführen, so wäre das nicht sehr spektakulär. Überraschenderweise ist aber sogar folgendes richtig:

Satz 6.1: Fundamentalsatz der Algebra

Ist

$$p(x) := \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot x^k = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0 \tag{6.19}$$

ein Polynom vom Grad n mit **komplexen Koeffizienten** (d. h. $a_i \in \mathbb{C}$ für alle $i = 0, \ldots, n-1$), dann hat die Gleichung $p(x) = 0$ mit Vielfachheiten genau n komplexe Lösungen.[6.14]

Diese Eigenschaft nennt man **algebraische Abgeschlossenheit** von $\mathbb{C}$.

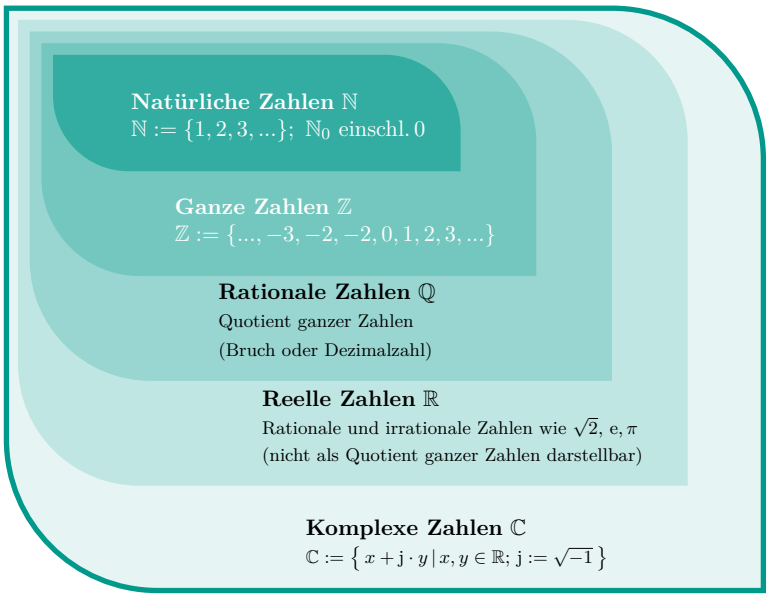
$\mathbb{R}$ ist **nicht** algebraisch abgeschlossen, denn z. B. für das Polynom zweiter Ordnung mit reellen Koeffizienten $q(x) = x^2 + 1$ hat die Gleichung $q(x) = 0$ gar keine reelle Lösung.

[6.11] Komplex von lat. complecti: umschlingen, umfassen, zusammenfassen.
[6.12] Mathematiker und Physiker schreiben $\sqrt{-1} = \mathrm{i}$, Ingenieure hingegen $\sqrt{-1} = \mathrm{j}$ (um eine Verwechselung mit der momentanen Stromstärke i zu verhindern).
[6.13] Beachten Sie: i bzw. j werden als feststehende Konstanten in **Steilschrift** geschrieben (genau wie z. B. e oder π).
[6.14] Man beachte: Gemaß Definition 6.9 bildet die Menge der reellen Zahlen eine echte Teilmenge der Menge der komplexen Zahlen. D. h., einige – oder sogar auch alle – Koeffizienten oder Nullstellen eines Polynoms können auch rein reell sein.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

6.6 Hierarchie der Zahlenmengen

Abbildung 6.3: Zahlenhierarchie



Quelle: Eigene Darstellung

Die eingeführten Mengen der

- natürlichen Zahlen,
- natürlichen Zahlen mit Null,
- ganzen Zahlen,
- rationalen Zahlen,
- reellen Zahlen und
- komplexen Zahlen

bilden eine Hierarchie in dem Sinne, dass sie jeweils echte Teilmengen der rechts von ihnen aufgeführten Mengen sind:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \tag{6.20}$$

Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist die „höchste“ aller Zahlenmengen; in ihr sind alle anderen Zahlenmengen enthalten.

Da die Beschäftigung mit den komplexen Zahlen nicht zur Schulmathematik gehört, haben viele erwachsene Menschen hier gewisse Berührungsängste. Diese sind jedoch völlig unbegründet. Hat man sich die Welt der komplexen Zahlen erst einmal erschlossen, dann werden viele Berechnungen, Sätze, Rechenverfahren usw. deutlich einfacher. Der Grund hierfür liegt darin, dass das, was im Bereich der komplexen Zahlen gilt, automatisch auch im Bereich der reellen Zahlen, der rationalen Zahlen, der ganzen Zahlen und der natürlichen Zahlen gilt - man muss schließlich lediglich den Imaginärteil einer komplexen Zahl zu 0 setzen und hat eine „normale“ nicht-komplexe Zahl.

Sehr häufig erkauft man sich beim Verzicht auf komplexe Zahlen (was gleichbedeutend ist mit der Betrachtung lediglich des Realteils einer an sich komplexen Zahl) die Formulierung von mathematischen Sätzen mit verkomplizierenden Einschränkungen oder Nebenbedingungen.

Deswegen empfehlen Ihnen die Autoren **dringend**, sich mit den komplexen Zahlen anzufreunden.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

6.7 Zahlengerade und Intervallschachtelung

Definition 6.10: Zahlengerade

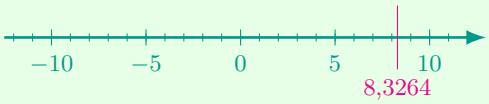
Unter einer ***Zahlengerade*** versteht man die Veranschaulichung der reellen Zahlen als Punkte auf einer Geraden.

Beispiel 6.5: Zahlengerade

In der Abbildung 6.4 sind die Orte der Punkte der **ganzen Zahlen** durch einen senkrechten grünen Strich hervor gehoben.

Im Beispiel ist die Zahl 8,3264 auf der Zahlengeraden markiert.

Abbildung 6.4: Zahlengerade ($\mathbb{R}$)



Quelle: Eigene Darstellung

Die Zahlengerade ist eine Veranschaulichung des eindimensionalen euklidischen Vektorraums $\mathbb{R}^1$. Die Darstellung verdeutlicht, dass die Menge der reellen Zahlen mittels der üblichen Vergleiche eine lineare Ordnung bildet. [6.15]

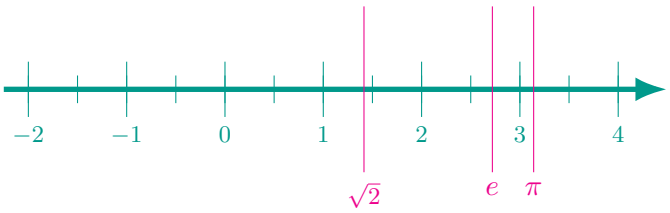
Die Zahlengerade setzt sich in beide Richtungen bis ins Unendliche fort. Der Pfeil an der rechten Seite der Darstellung gibt an, dass die Zahlen in dieser Richtung größer werden.

Zur Veranschaulichung der natürlichen Zahlen wird ein **Zahlenstrahl** verwendet (vgl. Abbildung 6.1 auf Seite 6-1).

Die Abbildung 6.5 zeigt die Lage einiger besonderer reeller Zahlen:

- Die Quadratwurzel von 2,
- die Euler'sche Zahl e und
- die Kreiszahl π.

Abbildung 6.5: Zahlengerade ($\mathbb{R}$)



Zahlen, denen nur eine begrenzte Anzahl von Stellen zur Verfügung steht (wie z. B. im Rechenwerk eines Mikroprozessors), stellt man statt auf einer Geraden auf einem **Zahlenkreis** dar.

Die Menge der komplexen Zahlen lässt sich durch die Punkte einer Ebene darstellen, die sogenannte **Gauß'sche Zahlenebene**.

Das **Intervallschachtelungsprinzip** wird besonders in der Analysis in Beweisen benutzt und bildet in der Numerischen Mathematik die Grundlage für einige Lösungsverfahren.

Das Prinzip ist Folgendes: Man fängt mit einem beschränkten Intervall an und wählt aus diesem Intervall ein abgeschlossenes Intervall, das komplett in dem vorherigen Intervall liegt, wählt dort wieder ein abgeschlossenes Intervall heraus und so weiter. Werden die Längen der Intervalle beliebig klein, konvergiert also ihre Länge gegen Null, so gibt es genau eine reelle Zahl, die in allen Intervallen

[6.15] Damit sind die **Ordnungsrelationen** wie z. B. $<, \leq, >, \geq, \ll, \gg, \ldots$ gemeint

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

enthalten ist. Wegen dieser Eigenschaft können Intervallschachtelungen herangezogen werden, um mit ihnen die reellen Zahlen als Zahlbereichserweiterung der rationalen Zahlen zu konstruieren.

Definition 6.11: Intervallschachtelung

Definition: Seien (a_n), (b_n) rationale oder reelle Zahlenfolgen, (a_n) monoton wachsend und (b_n) monoton fallend, $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und bilden die Differenzen $d_n = b_n - a_n$ eine Nullfolge, also:

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0 \tag{6.21}$$

dann wird die Folge $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (oder auch $(a_n \,|\, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$) der Intervalle $J_n := [a_n; b_n]$ als **Intervallschachtelung** bezeichnet.

Beispiel 6.6: Intervallschachtelungen

Beispiele:
Intervallschachtelung für die Zahl $\pi \approx 3{,}14159$:

$n = 1 : [3\,;\,4]$
$n = 2 : [3{,}1\,;\,3{,}2]$
$n = 3 : [3{,}14\,;\,3{,}15]$
$n = 4 : [3{,}141\,;\,3{,}142]$
$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$

$[8\,;\,9]$ liegt zwischen 8 und 9
$[8{,}3\,;\,8{,}4]$ liegt zwischen 8,3 und 8,4
$[8{,}32\,;\,8{,}33]$ $\ldots$
$\ldots \quad \ldots$

Definition 6.12: Intervall

Definition des **Intervall**:

- **Abgeschlossenes Intervall:** $[\ 0\ ;\ 1\ ]$ von 0 bis 1 (jeweils einschließlich)
- **Halboffenes Intervall:** $]\ 0\ ;\ 1\ ]$ von >0 bis 1 (die 0 gehört nicht dazu)
  $[\ 0\ ;\ 1\ [$ von 0 bis <1 (die 1 gehört nicht dazu)
- **Offenes Intervall:** $]\ 0\ ;\ 1\ [$ von >0 bis <1 (weder die 0 noch die 1 gehören dazu)

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Hinweis 6.1: Uneigentliche Intervallgrenzen



Logische Spitzfindigkeit: Bei Intervallen mit einer Grenze „unendlich“ hat man dort stets eine offene Grenze. Beispiele:

$$\{\, x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 5 \,\} = [\, 5; \infty \,[$$
$$\{\, x \in \mathbb{R} \,|\, x < 5 \,\} =]\, -\infty; 5 \,[$$

Hinweis 6.2: Alternative Intervallschreibweisen



Manche Autoren verwenden für offene Intervallgrenzen runde Klammern:

Bereich	Altern. 1	Altern. 2
$a \leq x \leq b$	$x \in [a;b]$	$x \in [a;b]$
$a < x \leq b$	$x \in]a;b]$	$x \in (a;b]$
$a \leq x < b$	$x \in [a;b[$	$x \in [a;b)$
$a < x < b$	$x \in]a;b[$	$x \in (a;b)$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

6.8 Die Primzahlen als Untermenge der natürlichen Zahlen

Definition 6.13: Primzahlen

Primzahlen sind alle natürlichen Zahlen, die nur durch 1 und sich selbst teilbar sind.

Die 1 ist ausgeschlossen, da wir zwei von 1 verschiedene Teiler benötigen.

Die 2 ist Primzahl, und zwar die einzige gerade Primzahl!

Die kleinsten Primzahlen sind: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, …

Jede natürliche Zahl lässt sich in Faktoren zerlegen, die Primzahlen sind.

Beispiel 6.7: Zusammengesetzte Zahlen: Primfaktorzerlegung

Beispiel: $45 = 9 \cdot 5 = 3 \cdot 3 \cdot 5$

Das nennt man **Primfaktorzerlegung**.

Für die Durchführung einer Primfaktorzerlegung muss man etwas „raten“. Allerdings gibt es einige **Teilbarkeitsregeln**, die einem diese Raterei etwas erleichtern:

Regel 6.8: Teilbarkeitsregeln

- Eine gerade Zahl hat mindestens eine 2 als Primfaktor. Gerade Zahlen sind solche Zahlen, bei denen die letzte („rechteste“) Ziffer durch 2 teilbar ist.
- Wenn die **Quersumme** einer Zahl durch 3 teilbar ist, dann ist auch die Zahl selber durch 3 teilbar. Beispiel: 8121 ist durch 3 teilbar, weil $8 + 1 + 2 + 1 = 12$ durch 3 teilbar ist.
- Wenn die beiden letzten Ziffern einer Zahl durch 4 teilbar sind, dann ist die Zahl durch 4 teilbar. Beispiel: 3524 ist durch 4 teilbar, weil 24 durch 4 teilbar ist.
- Ist die letzte Stelle einer Zahl eine 5 oder eine 0, dann ist die Zahl durch 5 teilbar.
- Wenn die Quersumme einer Zahl durch 9 teilbar ist, dann ist auch die Zahl selber durch 9 teilbar.

Es gibt noch eine ganze Reihe weiterer Teilbarkeitsregeln. Die meisten davon sind jedoch nicht für eine manuell durchgeführte Primfaktorzerlegung geeignet, weil die Berechnungen „zu Fuß“ zu aufwändig sind.

Hat eine natürliche Zahl neben sich selbst und der 1 weitere Teiler (z. B. hat die 4 zusätzlich den Teiler 2), so ist sie keine Primzahl. Man nennt diese Zahlen **zusammengesetzte Zahlen**.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Primzahlen finden übrigens oft bei Verschlüsselungsverfahren (Codes der Kryptographie) Anwendung. Bei alltäglichen Berechnungen trifft man sie jedoch am häufigsten bei den Themen ggT[6.16] und kgV an.

[6.16] Größter gemeinsamer Teiler – Wichtig z. B. beim Kürzen von Brüchen.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

6.8.1 Größter gemeinsamer Teiler (ggT)

Definition 6.14: Der größte gemeinsame Teiler

Der ggT gibt die größtmögliche Zahl an, durch die zwei Zahlen teilbar sind.

Berechnung: Zahlen in Primfaktoren zerlegen und gemeinsame Primfaktoren (jeweils in kleinster Anzahl) zusammenstellen.

$$\begin{array}{lcll} 8 & = & 2 \cdot 2 & \cdot 2 \\ 20 & = & 2 \cdot 2 & \cdot 5 \\ \text{ggT} & = & 2 \cdot 2 & = 4 \quad \rightarrow \text{Ergebnis: } \text{ggT}(8,20) = 4 \end{array} \tag{6.22}$$

Sollten die Zahlen keinen gemeinsamen Teiler besitzen (also nur Division : 1 funktioniert), verwenden wir das Wort „**teilerfremd**“.

Der ggT kommt insbesondere beim **Kürzen von Brüchen** zum Einsatz:

Regel 6.9: Maximal gekürzte Brüche

Ein Bruch wird dann **maximal gekürzt**, wenn sowohl der Zähler als auch der Nenner durch deren ggT dividiert werden.

$$\frac{Z}{N} = \frac{Z : \text{ggT}\,(Z,N)}{N : \text{ggT}\,(Z,N)} \tag{6.23}$$

Beispiel 6.8: Maximales Kürzen von Brüchen

Beispiele:

$$Z = 8;\ N = 20;\ \text{ggT}(8,20) = 4 \quad \rightarrow \quad \frac{8}{20} = \frac{8:4}{20:4} = \frac{2}{5}$$

$$Z = 1260;\ N = 2772;\ \text{ggT}(1260,2772) = 252 \quad \rightarrow \quad \frac{1260}{2772} = \frac{1260:252}{2772:252} = \frac{5}{11}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

6.8.2 Kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV)

Definition 6.15: Das kleinste gemeinsame Vielfache

Das kgV gibt an, wann sich die Vielfachen von zwei Zahlen zum ersten Mal begegnen.

Berechnung: Zahlen in Primfaktoren zerlegen und alle Primfaktoren (jeweils in größter Anzahl) zusammenstellen.

$$\begin{aligned} 6 &= 2 \cdot 3 \\ 8 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ \text{kgV} &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24 \quad \rightarrow \text{Ergebnis: } \text{kgV}(6,8) = 24 \end{aligned} \tag{6.24}$$

Zur Kontrolle führen wir uns die Vielfachen nochmals vor Augen:
→ Vielfache von 6: 6, 12, 18, 24, 30, 36, ...
→ Vielfache von 8: 8, 16, 24, 32, ...

Das kgV von 6 und 8 ist also 24, die erste Zahl, bei der sich die Vielfachen von 6 und 8 erstmals treffen!

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

7 Höhere Rechenarten

Neben der Strichrechnung (Addition, Subtraktion) und der Punktrechnung (Multiplikation, Division) existiert noch eine dritte Ebene der Rechenarten, die man allgemein als „höhere Rechenarten“ bezeichnet.

Basierend auf der einfachen Gleichung

$$a = x^n \tag{7.1}$$

sind dies:

- Das **Potenzieren**:
  Berechnen des a aus obiger Gleichung, wenn x und n gegeben sind: $a = x^n$;
- Das **Wurzelziehen** oder **Radizieren**:
  Berechnen des x aus obiger Gleichung, wenn a und n gegeben sind: $x = \sqrt[n]{a}$;
- Das **Logarithmieren**:
  Berechnen des n aus obiger Gleichung, wenn a und x gegeben sind: $n = \log_x(a)$.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

7.1 Einfache Potenzrechnung mit natürlichen Exponenten

Für natürliche Zahlen lässt sich das Multiplizieren als wiederholtes Addieren auffassen.

Entsprechend kann das **Potenzieren**[7.1] mit natürlichem Exponenten als wiederholtes Multiplizieren gleicher Faktoren verstanden werden.

Beim Multiplizieren werden gleiche Summanden wiederholt addiert:

$$\underbrace{2+2+2+2+2}_{5 \text{ Summanden}} = 5 \cdot 2 = 10.$$

Beim Potenzieren werden gleiche Faktoren wiederholt miteinander multipliziert:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5 \text{ Faktoren}} = 2^5 = 32.$$

Definition 7.1: Potenzen

Ein Produkt aus n gleichen Faktoren x kann für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ abgekürzt geschrieben werden als

$$x^n := \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ Faktoren}} = \prod_{k=1}^{n} x \tag{7.2}$$

Dabei heißt x **Basis** (oder Grundzahl), n **Exponent** (oder Hochzahl) und x^n **Potenz**. Der Wert der Potenz heißt **Potenzwert**.

Am Beispiel $2^5 = 32$ beziehungsweise allgemein $a = x^n$ werden die Bezeichnungen deutlich:



[7.1] von lat. potentia, „Vermögen, Macht“, als Lehnübersetzung aus dem Griechischen, das in der antiken Geometrie spätestens seit Platon[7.2] auch die Bedeutung „Quadrat“ hatte.

[7.2] Platon (* 428/427 v. Chr. in Athen oder Aigina; † 348/347 v. Chr. in Athen) war ein antiker griechischer Philosoph.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

7.1.1 Addition und Subtraktion von Potenztermen

Nur **gleichartige Potenzterme** können durch Addition oder Subtraktion zusammengefasst werden. Dabei **müssen Basis und Exponent übereinstimmen**; die Koeffizienten werden addiert bzw. subtrahiert:

Regel 7.1: Addition und Subtraktion von Potenztermen

Für $a, b \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt:

$$a \cdot x^n \pm b \cdot x^n = (a \pm b) \cdot x^n \tag{7.3}$$

Beispiel 7.1:

- $4 \cdot x^2 + 5 \cdot x^2 = (4+5) \cdot x^2 = 9 \cdot x^2$
- $9 \cdot x^2 - 3 \cdot x^2 = (9-3) \cdot x^2 = 6 \cdot x^2$
- $4 \cdot x^2 + 5 \cdot x^3$ kann nicht zusammengefasst werden; der gemeinsame Faktor x^2 kann jedoch ausgeklammert werden:

  $4 \cdot x^2 + 5 \cdot x^3 = x^2 \cdot (4 + 5 \cdot x)$
- $9 \cdot x^2 - 5 \cdot b^2$ kann nicht zusammengefasst werden.

Praxis-Beispiel 7.1: Addition und Subtraktion von Potenztermen

Technische Fachrichtung – Fahrzeugtechnik / Mechanik

Bewegen sich zwei Massen m_1 und m_2 mit derselben Geschwindigkeit v, so addieren sich ihre kinetischen Energien:

$$E_{\text{ges}} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot v^2$$

Für beispielsweise $m_1 = 800\,\text{kg}$, $m_2 = 200\,\text{kg}$ und $v = 10\,\text{m/s}$ ergibt sich:

$$E_{\text{ges}} = 400 \cdot 10^2 + 100 \cdot 10^2 = (400 + 100) \cdot 10^2 = 50\,000\,\text{J}$$

Die beiden Terme können zusammengefasst werden, weil beide den Faktor v^2 enthalten.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Praxis-Beispiel 7.2: Addition und Subtraktion von Potenztermen

Nichttechnische Fachrichtung – Flächenplanung

Eine Anlage besteht aus mehreren quadratischen Flächen mit derselben Seitenlänge x. Fünf Flächen werden genutzt, drei weitere kommen hinzu, zwei Flächen werden wieder abgezogen.

Damit ergibt sich für die Gesamtfläche:

$$A = 5x^2 + 3x^2 - 2x^2 = (5 + 3 - 2)x^2 = 6x^2$$

Für $x = 4\,\mathrm{m}$ folgt:

$$A = 6 \cdot 4^2 = 96\,\mathrm{m}^2$$

Auch hier können die Potenzterme zusammengefasst werden, weil Basis und Exponent übereinstimmen.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

7.1.2 Multiplikation von Potenztermen

Beim Multiplizieren von Potenzen mit **gleicher Basis** werden die Exponenten addiert:

Regel 7.2: Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis

Für $x \in \mathbb{C},\ m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt:

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n} \tag{7.4}$$

Beispiel 7.2:

- $x^m \cdot x^n = \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{m \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{n \text{ Faktoren}} = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{m+n \text{ Faktoren}}$
- $4^4 \cdot 4^5 = \underbrace{(4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4)}_{4 \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{(4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4)}_{5 \text{ Faktoren}} = \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}_{9 \text{ Faktoren}}$

Praxis-Beispiel 7.3: Multiplikation von Potenztermen mit gleicher Basis

Technische Fachrichtung – Signaltechnik

Ein Signal durchläuft zunächst m und anschließend weitere n identische Verstärkerstufen. Jede Stufe verstärkt das Signal um denselben Faktor g.

Für die erste Gruppe ergibt sich der Verstärkungsfaktor g^m, für die zweite Gruppe g^n. Insgesamt gilt daher:

$$g^m \cdot g^n = g^{m+n}$$

Bei einem Verstärkungsfaktor $g = 2$, zunächst drei und anschließend zwei Stufen, ergibt sich:

$$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32$$

Das Signal wird insgesamt um den Faktor 32 verstärkt.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Praxis-Beispiel 7.4: Multiplikation von Potenztermen mit gleicher Basis

Nichttechnische Fachrichtung – Wirtschaft / Zinsrechnung

Ein Kapital wächst jedes Jahr mit demselben Wachstumsfaktor q. Nach m Jahren beträgt der Wachstumsfaktor q^m. Bleibt das Kapital anschließend weitere n Jahre angelegt, kommt der Faktor q^n hinzu.

Für den gesamten Zeitraum gilt somit:

$$q^m \cdot q^n = q^{m+n}$$

Bei einer jährlichen Verzinsung von 3 % ist

$$q = 1{,}03$$

Für zunächst vier und anschließend sechs Jahre ergibt sich:

$$1{,}03^4 \cdot 1{,}03^6 = 1{,}03^{4+6} = 1{,}03^{10}$$

Die beiden aufeinanderfolgenden Anlagezeiträume können somit zu einem Zeitraum von zehn Jahren zusammengefasst werden.

Beim Multiplizieren von Potenzen mit **gleichem Exponenten** werden die Basen multipliziert; der Exponent bleibt erhalten:

Regel 7.3: Multiplikation von Potenzen mit gleichem Exponenten

Für $x, y \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt:

$$x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n \tag{7.5}$$

Beispiel 7.3:

- $x^n \cdot y^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{y \cdot y \cdot \ldots \cdot y}_{n \text{ Faktoren}} = \underbrace{(x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \cdot \ldots \cdot (x \cdot y)}_{n \text{ Faktoren}} = (x \cdot y)^n$
- $2^3 \cdot 5^3 = 8 \cdot 125 = 1.000; \quad 2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3 = 1.000$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Praxis-Beispiel 7.5: Multiplikation von Potenzen mit gleichem Exponenten

Technische Fachrichtung – Elektrotechnik / Signaltechnik

Ein Signal durchläuft ein System mit n gleichen Baugruppen. In jeder Baugruppe wird es zunächst mit dem Verstärkungsfaktor a verstärkt und anschließend durch eine Signalverarbeitungsschaltung wieder mit dem Faktor b abgeschwächt.

Für eine dieser Baugruppen ergibt sich eine Gesamtverstärkung von $a \cdot b$.

Für das Gesamtsystem mit n derartigen Baugruppen ergibt sich als Systemverstärkung:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n.$$

Für $n = 4$, $a = 1{,}25$ und $b = 0{,}8$ gilt beispielsweise:

$$1{,}25^4 \cdot 0{,}8^4 = (1{,}25 \cdot 0{,}8)^4 = 1^4 = 1$$

Verstärkung und Abschwächung gleichen sich in diesem Beispiel insgesamt aus.

Praxis-Beispiel 7.6: Multiplikation von Potenzen mit gleichem Exponenten

Nichttechnische Fachrichtung – Wirtschaft

Wirken über n Jahre zwei unabhängige jährliche Wachstumsfaktoren p und q, so können ihre Wirkungen zusammengefasst werden:

$$p^n \cdot q^n = (p \cdot q)^n$$

Wirkt beispielsweise jedes Jahr ein Faktor 1,02 und zusätzlich ein weiterer Faktor 1,03, so gilt nach fünf Jahren:

$$1{,}02^5 \cdot 1{,}03^5 = (1{,}02 \cdot 1{,}03)^5 = 1{,}0506^5 \approx 1{,}28$$

Statt mit zwei getrennten Wachstumsfaktoren kann somit mit einem gemeinsamen jährlichen Faktor gerechnet werden.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

7.1.3 Division von Potenztermen

Beim Dividieren von Potenzen mit **gleicher Basis** werden die Exponenten subtrahiert:

Regel 7.4: Division von Potenzen mit gleicher Basis

Für $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ m, n \in \mathbb{N}_{>0},\ m > n$ gilt:

$$x^m : x^n = x^{m-n} \tag{7.6}$$

Beispiel 7.4:

- $$x^m : x^n = \frac{x^m}{x^n} = \frac{\overbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}^{m \text{ Faktoren}} \cdot x \cdot \ldots \cdot x \cdot x}{\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ Faktoren}}} = \frac{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \ldots \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot \ldots \cdot x \cdot x}{\underbrace{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \ldots \cdot \cancel{x}}_{\text{kürzen}}} = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x \cdot x}_{m-n \text{ Faktoren}} = x^{m-n}$$
- $$7^5 : 7^2 = \frac{7^5}{7^2} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{7 \cdot 7} = \underbrace{\frac{\cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{\cancel{7} \cdot \cancel{7}}}_{\text{kürzen}} = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$$

Praxis-Beispiel 7.7: Division von Potenztermen mit gleicher Basis

Technische Fachrichtung – Signaltechnik

Ein Signal durchläuft eine Folge identischer Verstärkerstufen mit dem Verstärkungsfaktor g. Nach m Stufen beträgt der gesamte Verstärkungsfaktor g^m, nach n Stufen entsprechend g^n.

Das Verhältnis der beiden Verstärkungen ist daher:

$$\frac{g^m}{g^n} = g^{m-n}$$

Wird das Signal beispielsweise nach sieben beziehungsweise nach drei Verstärkerstufen betrachtet und gilt $g = 2$, so ergibt sich:

$$\frac{2^7}{2^3} = 2^{7-3} = 2^4 = 16$$

Die Verstärkung nach sieben Stufen ist somit 16-mal so groß wie nach drei Stufen.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Praxis-Beispiel 7.8: Division von Potenztermen mit gleicher Basis

Nichttechnische Fachrichtung – Wirtschaft / Zinsrechnung

Ein Kapital wächst jedes Jahr mit demselben Wachstumsfaktor q. Nach m Jahren besitzt es den Wachstumsfaktor q^m, nach n Jahren den Wachstumsfaktor q^n.

Das Verhältnis der beiden Kapitalstände ist daher:

$$\frac{q^m}{q^n} = q^{m-n}$$

Bei einer jährlichen Verzinsung von 5 % gilt $q = 1{,}05$.

Vergleicht man den Kapitalstand nach zehn Jahren mit dem nach vier Jahren, so erhält man:

$$\frac{1{,}05^{10}}{1{,}05^4} = 1{,}05^{10-4} = 1{,}05^6 \approx 1{,}3401$$

Der Kapitalstand nach zehn Jahren ist somit etwa 1,34-mal so groß wie nach vier Jahren.

Beim Dividieren von Potenzen mit **gleichem Exponenten** werden die Basen dividiert; der Exponent bleibt erhalten:

Regel 7.5: Division von Potenzen mit gleichem Exponenten

Für $x \in \mathbb{C}$, $y \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt:

$$x^n : y^n = \left(\frac{x}{y}\right)^n \tag{7.7}$$

Beispiel 7.5:

- $$\frac{x^n}{y^n} = \frac{\overbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}^{n \text{ Faktoren}}}{\underbrace{y \cdot y \cdot \ldots \cdot y}_{n \text{ Faktoren}}} = \underbrace{\frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{y}}_{n \text{ Faktoren}} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$$

- $12^3 : 4^3 = 1.728 : 64 = 27; \qquad 12^3 : 4^3 = \left(\frac{12}{4}\right)^3 = 3^3 = 27$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Praxis-Beispiel 7.9: Division von Potenzen mit gleichem Exponenten

Technische Fachrichtung – Maschinenbau

Bei kreisförmigen Querschnitten ist die Fläche proportional zum Quadrat des Durchmessers:

$$A = \frac{d^2}{4} \cdot \pi$$

Für zwei Wellen mit den Durchmessern d_1 und d_2 ergibt sich deshalb:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2$$

Beispielsweise gilt für $d_1 = 6\,\text{mm}$ und $d_2 = 3\,\text{mm}$:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{6^2}{3^2} = \left(\frac{6}{3}\right)^2 = 2^2 = 4$$

Der Querschnitt der dickeren Welle ist also viermal so groß.

Praxis-Beispiel 7.10: Division von Potenzen mit gleichem Exponenten

Nichttechnische Fachrichtung – Biologie

Bei näherungsweise kugelförmigen Zellen ist das Volumen proportional zur dritten Potenz des Radius:

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$$

Für zwei Zellen gilt daher:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$$

Hat eine Zelle den doppelten Radius einer anderen, also $r_1 = 2 \cdot r_2$, so folgt:

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{2 \cdot r_2}{r_2}\right)^3 = 2^3 = 8$$

Die Zelle mit dem doppelten Radius besitzt also das achtfache Volumen.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

7.1.4 Besondere Potenzen

Definition 7.2: Quadrieren

Unter dem **Quadrieren**[7.3] versteht man eine Multiplikation einer Zahl, einer Variablen oder eines Terms mit sich selbst. Die Hochzahl (der Exponent) beträgt also 2.

Hierbei handelt es sich um einen Spezialfall des Potenzierens, nämlich mit dem Exponenten 2.

Quadrate von natürlichen Zahlen nennt man **Quadratzahlen**.

Beispiel 7.6: Quadrieren

$$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$$

Ein Quadrat mit der Seitenlänge 7,5 m hat eine Fläche von:

$$(7{,}5\,\mathrm{m})^2 = 56{,}25\,\mathrm{m}^2$$

Regel 7.6: Quadrate negativer Zahlen

Quadrate von negativen Zahlen sind **immer positiv**, da die Multiplikation einer negativen Zahl mit einer weiteren negativen Zahl immer eine positive Zahl ergibt.

Beispiel 7.7: Quadrate negativer Zahlen

$$(-8)^2 = (-8) \cdot (-8) = +64$$

Das Quadrieren bedeutet das Erheben zur zweiten Potenz, das Kubieren das Erheben zur dritten Potenz.

7.1.5 Quadrieren von Dezimalzahlen

Rechnen Sie nur mit der Zahl hinter den Nullstellen. Multiplizieren Sie diese mit sich selbst. Nun verdoppeln Sie die Anzahl der Dezimalstellen und fügen Sie das Komma sowie notwendige Nullen wieder ein.

$$0{,}7^2 = 0{,}7 \cdot 0{,}7 = \left\{ \begin{array}{c} 7 \cdot 7 = 49 \\ 1 \text{ Dezimalstelle } \cdot 2 = 2 \end{array} \right\} = 0{,}49 \tag{7.8}$$

[7.3] von lat. „quadratus“ = „viereckig“, „zum Viereck gemacht“.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

7.1.6 Quadrieren von reinen Zehner-, Hunderter-, Tausenderzahlen

Rechnen Sie nur mit der Zahl vor den Nullstellen. Multiplizieren Sie diese mit sich selbst. Verdoppeln Sie die Anzahl der Nullen und hängen diese an.

$$500^2 = 5|00^2 \quad \left\{ \begin{array}{c} 5 \cdot 5 = 25 \\ 2 \text{ Nullstellen } \cdot 2 = 4 \end{array} \right\} = 250.000 \tag{7.9}$$

Das Quadrieren bedeutet das Erheben zur zweiten Potenz, das Kubieren das Erheben zur dritten Potenz.

7.1.7 Weitere Rechenregeln für Potenzterme

Wir betrachten die Potenzdivision:

$$\frac{x^n}{x^n} = 1 = x^{n-n} = x^0 = 1 \tag{7.10}$$

Hieraus folgen die nachstehenden Regeln:

Regel 7.7: Rechenregeln für Potenzterme

$$x^0 = 1 \qquad \forall x \neq 0 \tag{7.11a}$$

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b} \tag{7.11b}$$

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} \tag{7.11c}$$

$$(x^a)^b = x^{a \cdot b} \tag{7.11d}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

7.2 Einfache Wurzelrechnung

In der Mathematik versteht man unter Wurzelziehen oder Radizieren die Bestimmung der Unbekannten x in der Potenz[7.4]

$$a = x^n \tag{7.12}$$

Hierbei ist n eine natürliche Zahl größer als 1 und a eine nichtnegative reelle Zahl. Das Ergebnis des Wurzelziehens bezeichnet man als Wurzel oder Radix [7.5]. Das Radizieren ist eine Umkehrung des Potenzierens. Im Fall $n = 2$ spricht man von **Quadratwurzeln**, bei $n = 3$ von **Kubikwurzeln**. Wurzeln werden mit Hilfe des Wurzelzeichens $\sqrt[\square]{\square}$ notiert.

Es sei $n > 1$ eine natürliche Zahl. Ist a eine nichtnegative reelle Zahl, so besitzt die Gleichung

$$x^n = a \tag{7.13}$$

genau eine nichtnegative Lösung. Diese wird als n-te Wurzel aus a bezeichnet. Man schreibt dafür

$$x = \sqrt[n]{a} \tag{7.14}$$

Hierbei bezeichnet man

- $\sqrt[n]{a}$ als Wurzel oder Radix,
- $\sqrt[\square]{\square}$ als Wurzelzeichen,
- n als Wurzelexponent,
- a als Radikand.

Gelegentlich betrachtet man auch den Fall $n = 1$, wobei dann einfach $\sqrt[1]{a} = a$ gilt.

[7.4] https://de.wikipedia.org/wiki/Wurzel_(Mathematik); abgerufen am 2017-07-31.
[7.5] von lat. radix „Wurzel“.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

7.2.1 Quadrat- und Kubikwurzel

Üblicherweise wird die **zweite** Wurzel als **Quadratwurzel** oder einfach nur als „die Wurzel“ bezeichnet und der Wurzelexponent weggelassen:

$$\sqrt{a} := \sqrt[2]{a} \tag{7.15}$$

Die Wurzel mit dem Wurzelexponenten 3 (**dritte** Wurzel) bezeichnet man auch als **Kubikwurzel**.

$$\sqrt[3]{8} = 2 \tag{7.16}$$

Tabelle 7.1: Quadratzahlen und deren Quadratwurzeln

Radikand	Radix Quadratwurzel	Radikand	Radix Quadratwurzel
1	1	121	11
4	2	144	12
9	3	169	13
16	4	196	14
25	5	225	15
36	6	256	16
49	7	289	17
64	8	324	18
81	9	361	19
100	10	400	20

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

7.2.2 Schriftliches Wurzelziehen

Das schriftliche Wurzelziehen ist ein Verfahren zur Berechnung der Quadratwurzel einer rationalen Zahl, das ohne Taschenrechner durchgeführt werden kann. Es ähnelt der schriftlichen Division und liefert bei jedem Rechenschritt eine Stelle des Ergebnisses. Grundlage des schriftlichen Wurzelziehens sind die binomischen Formeln.

Beispiel: $\sqrt{119\,025} = ?$

Tabelle 7.2: Es soll die Wurzel aus 119 025 bestimmt werden

Schritt	Anweisung	Rechnung
1	Zerlege die Zahl von rechts beginnend in Zweiergruppen	$\sqrt{11\|90\|25}$
2	Suche die Zahl, welche quadriert die ganz links stehende Zifferngruppe ergibt oder ihr von unten nahe kommt.	$\sqrt{11\|90\|25} = 3$
3	Schreibe das Quadrat der gefundenen Zahl unter die linke Zifferngruppe und ziehe es von ihr ab	$\sqrt{11\|90\|25} = 3$ $\underline{-9}$ 2
4	Setze die Differenz wie bei der schriftlichen Division unter den Strich und hänge die linke Ziffer der nächsten Gruppe an.	$\sqrt{11\|90\|25} = 3$ $\underline{-9}\ \downarrow$ $2\ 9$
5	In einer Nebenrechnung wird die so entstandene Zahl ohne Berücksichtigung des Restes durch das **Doppelte** des bisher ermittelten Wurzelwertes dividiert.	$\sqrt{11\|90\|25} = \underbrace{3}_{2\cdot 3=6}$ $\underline{-9}$ $2\,9 : 6 = 4 + \text{Rest}$
6	Das Ergebnis der Division ist die nächste Ziffer der gesuchten Wurzel und außerdem ein Faktor in der zweiten Nebenrechnung. Der andere Faktor wird zusammengesetzt aus der Ziffer des Divisor und der Ziffer des Quotienten. **Ist das Ergebnis der Division größer als 9, so muss die Ziffer 9 verwendet werden!**	$\sqrt{11\|90\|25} = 34$ $\underline{-9}$ $2\,9 : 6 = 4 + \text{Rest}$ $4 \cdot 6\ 4 = 256$

Weiter auf der nächsten Seite

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Tabelle 7.2: Es soll die Wurzel aus 119 025 bestimmt werden

Schritt	Anweisung	Rechnung
7	**Das Produkt wird wie bei der schriftlichen Division von der darüber liegenden Zahl, welche um eine weitere Stelle ergänzt wurde, abgezogen.** Sollte die Differenz negativ sein, ist die gefundene Ziffer der Wurzel um eins zu vermindern und dies auch in den Nebenrechnungen zu berücksichtigen!	$\sqrt{11\|90\|25} = 34$ -9 ↓ 2 9 0 - 2 5 6 $\quad 4 \cdot 64 = 256$ - 3 4
8	Es wiederholt sich Schritt 5, d.h. in der Nebenrechnung wird die entstandene Zahl ohne Berücksichtigung des Restes durch das Doppelte des bisher ermittelten Wurzelwertes dividiert.	$\sqrt{11\|90\|25} = \underbrace{34}_{\cdot 2 = 68}$ -9 2 9 0 - 2 5 6 ↓ $\quad 4 \cdot 64 = 256$ - 3 4 2 : 68 = 5 + Rest
9	Wie in Schritt 6 ist das Ergebnis der Division ist die nächste Ziffer der gesuchten Wurzel und außerdem ein Faktor in der weiteren Nebenrechnung. Der andere Faktor wird zusammengesetzt aus der Ziffer des Divisor und der Ziffer des Quotienten.	$\sqrt{11\|90\|25} = 345$ -9 2 9 0 - 2 5 6 $\quad 4 \cdot 64 = 256$ 3 4 2 : 68 = 5 + Rest $5 \cdot 685 = 3425$
10	Analog zu Schritt 7 wird das Produkt von der darüber liegenden Zahl, welche um eine weitere Stelle ergänzt wurde, abgezogen. Da die Differenz Null ist, haben wir die Wurzel gezogen. Das Ergebnis lautet 345.	$\sqrt{11\|90\|25} = 345$ -9 2 9 0 - 2 5 6 ↓ $\quad 4 \cdot 64 = 256$ 3 4 2 5 3 4 2 5 $\quad 5 \cdot 685 = 3425$ 0

Ende

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

7.3 Allgemeine Potenzen und Wurzeln

Bisher hatten wir nur Potenzen und Wurzeln mit natürlichen Zahlen als Exponenten betrachtet. Wir wollen dies jetzt verallgemeinern.

Natürliche Exponenten:

$$a = x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ Faktoren}} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \sqrt[n]{a} \tag{7.17}$$

Exponent = 0: Wir betrachten z. B. $\frac{x^n}{x^n} = 1 = x^{n-n} = x^0 = 1$. Also:

Regel 7.8: Exponent Null

$$a = x^0 = 1 \qquad \forall x \neq 0 \tag{7.18}$$

Negative Exponenten:
Wir betrachten z. B. $\frac{7^2}{7^5} = \frac{\cancel{7 \cdot 7}}{\cancel{7 \cdot 7} \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{1}{7^3} = 7^{2-5} = 7^{-3}$. Also:

Regel 7.9: Negative Exponenten

$$a = x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \frac{1}{\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ Faktoren}}} \tag{7.19}$$

Rationale Exponenten:
Wir betrachten z. B. folgende Umformung:

$$a = x^n \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a} \Rightarrow (x)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a \tag{7.20}$$

Damit erhalten wir

Regel 7.10: Wurzeln in Exponentialschreibweise

$$x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \tag{7.21}$$

... und für allgemeine rationale Exponenten:

Regel 7.11: Rationale Exponenten

$$a^{\frac{m}{n}} \quad = \quad \sqrt[n]{a^m} \quad = \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \tag{7.22}$$

Reelle Exponenten:
Potenzieren mit reellen, nicht-rationalen Exponenten wird über die Intervallschachtelung des Exponenten definiert. Man nimmt z. B. die untere Intervallgrenze und definiert die gesuchte Potenz als den Grenzwert, der sich ergibt, wenn man die Intervall-Länge gegen Null gehen lässt (also die Intervallschachtelung immer weiter vorantreibt).

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Zusammen gefasst ergeben sich diese **allgemeinen Rechenregeln für Potenzen und Wurzeln** [7.6] $(m, n \in \mathbb{N}; a, p, q, u, v \in \mathbb{R})$:

1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
2. $u^p \cdot v^p = (u \cdot v)^p$
3. $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ $\qquad (a \neq 0)$
4. $\dfrac{u^p}{v^p} = \left(\dfrac{u}{v}\right)^p$ $\qquad (v \neq 0)$
5. $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$
6. $\sqrt[n]{u} \cdot \sqrt[n]{v} = \sqrt[n]{u \cdot v}$ $\qquad (u, v \geq 0)$
7. $\dfrac{\sqrt[n]{u}}{\sqrt[n]{v}} = \sqrt[n]{\dfrac{u}{v}}$ $\qquad (u \geq 0, v > 0)$
8. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} = a^{\frac{1}{n \cdot m}}$
9. $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$ $\qquad (a \geq 0,$ falls n gerade $)$
10. $0^n = 0$
11. $a^0 = 1$
12. $1^n = 1$
13. $\sqrt[n]{1} = 1$
14. $\sqrt[n]{0} = 0$

Beispiel 7.8:

Beispiele [7.7]

a) $2^{-5} = \dfrac{1}{2^5} = \dfrac{1}{32}$

b) $\dfrac{1}{5^{-3}} = 5^{-(-3)} = 5^3 = 125$

c) $\dfrac{36 \cdot x^5 \cdot y^4 \cdot z^6}{3 \cdot x^2 \cdot y^4 \cdot z^7} = \dfrac{\cancel{36} \cdot \cancel{x^5} \cdot \cancel{y^4} \cdot \cancel{z^6}}{\cancel{3} \cdot \cancel{x^2} \cdot \cancel{y^4} \cdot \cancel{z^7}} = 12 \cdot x^3 \cdot z^{-1} = \dfrac{12 \cdot x^3}{z}$ $\qquad$ (für $x, y, z \neq 0$)

d) $(2 \cdot a^2 - 3 \cdot b^2)^2 = 4 \cdot a^4 - 12 \cdot a^2 \cdot b^2 + 9 \cdot b^4$

e) $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9} = \pm 3$

f) $125^{\frac{5}{15}} = 125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5$

g) $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^3}} = x^2 \cdot x^{-\frac{2}{3}} \cdot x^{-\frac{3}{4}} = x^{2-\frac{2}{3}-\frac{3}{4}} = x^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{x^7}$

[7.6] [SC15] S. 54.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

7.4 Logarithmen

Als Logarithmus[7.8] einer Zahl bezeichnet man den Exponenten, mit dem eine vorher festgelegte Zahl, die Basis, potenziert werden muss, um die gegebene Zahl zu erhalten. Logarithmen sind in $\mathbb{R}$ nur für positive reelle Zahlen definiert, auch die Basis muss in $\mathbb{R}$ positiv sein.

Konkret versteht man unter Logarithmieren die Bestimmung der Unbekannten n in der Gleichung

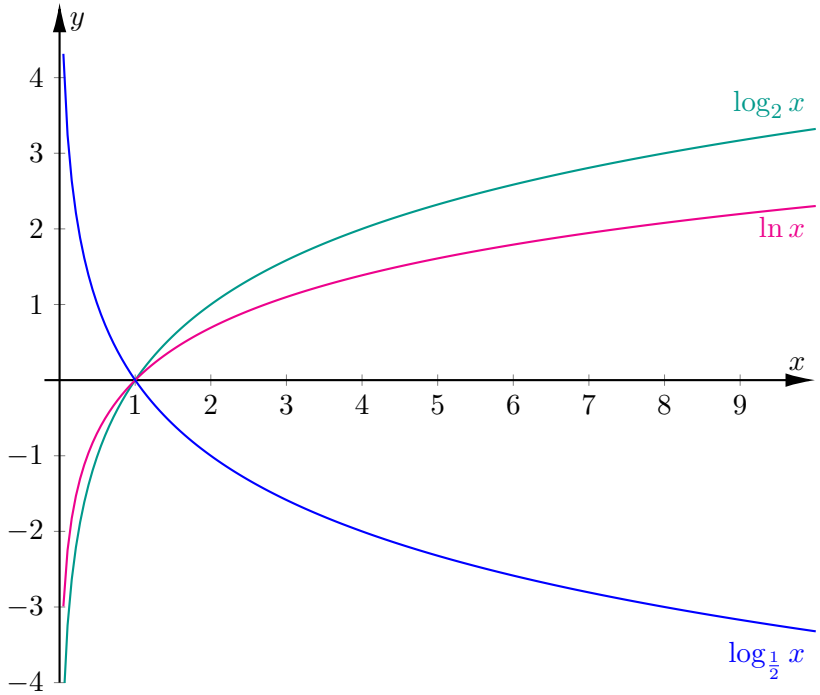
$$a = x^n \tag{7.23}$$

Mit Logarithmen lassen sich sehr stark wachsende Zahlenreihen übersichtlich darstellen, da der Logarithmus für große Zahlen viel langsamer steigt als die Zahlen selbst.

Wie die Gleichung $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$ zeigt, kann man durch Logarithmieren eine Multiplikation durch die viel weniger rechenintensive Addition ersetzen.[7.9]

Auch beschreiben Logarithmen auf mathematisch elegante Weise viele technische Prozesse sowie Phänomene der Natur, wie etwa das Verhalten einer Halbleiter-Diode, die Spirale eines Schneckenhauses oder die Wahrnehmung unterschiedlicher Lautstärken durch das menschliche Ohr.

Abbildung 7.1:



[7.7] [SC15], S. 56.
[7.8] Plural: Logarithmen; von altgriechisch: lógos, „Verständnis, Lehre, Verhältnis“ und arithmós, „Zahl“.
[7.9] Hierauf basieren die Logarithmentafeln und der Rechenschieber – beide waren bis zur Erfindung des Taschenrechners weit verbreitet und in Gebrauch.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

7.4.1 Allgemeines

In den vorherigen Kapiteln ging es auch um das Potenzieren und Wurzelziehen. Im Wesentlichen drehte es sich bei den Berechnungen dabei um den Potenzwert und die Basis. Aber was ist, wenn wir den Exponenten berechnen wollen? Genau dieser Frage stellt sich die Mathematik des Logarithmierens.

Die zweite Umkehrung des Potenzierens ist das Logarithmieren. In unserer Beispielsgleichung erhält man den Exponenten n bei gegebenem x und a durch die formale Rechenvorschrift

$$n = \log_x(a) \tag{7.24}$$

Ein Beispiel soll das verdeutlichen:

Bisher stellten wir uns lediglich die Frage, was ist 10^2? Nämlich 100.
Ebenfalls fragten wir uns, was ist $\sqrt{100}$? In diesem Fall die 10.

In diesem Kapitel wollen wir uns aber mit folgender Frage beschäftigen:

Welcher Exponent gehört zur Basis, in unserem Fall der 10, damit 100 herauskommt?

Dieses mathematische Problem ist also mit dem Logarithmus zu lösen. Mathematisch geschrieben, sähe die Fragestellung so aus:

$$\log_{10}(100) = ? \tag{7.25}$$

Wenn man statt des Fragezeichens wie üblich ein x schreibt, dann lautet die Frage: Was ist x in der folgenden Gleichung:

$$10^x = 100 \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_{10}(100) \tag{7.26}$$

Allgemein:

$$x = \log_a(b) \tag{7.27}$$

mit x: Logarithmus, a: Basis, b: Numerus

Man liest: „x ist gleich der Logarithmus der Zahl b zur Basis a“.



Hinweis 7.1: Klammersetzung beim Logarithmus

Die Klammern um ein eingliedriges Argument, z. B. $y = \log_b(x)$ sind **optional**, man kann im Beispiel auch schreiben $y = \log_b x$.

Wenn das Argument jedoch ein zusammengesetzter Ausdruck ist (wie bsp. eine Summe), sind Klammern **verpflichtend** zu setzen:

$$\log_b x + y = \log_b(x) + y \quad \neq \log_b(x + y) \quad \text{!!!} \tag{7.28}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

7.4.2 Logarithmieren, Potenzieren und Radizieren als Umkehrfunktionen

Wenn wir (wie oben gezeigt) Wurzeln als Potenzen betrachten, bei denen der Exponent gleich dem Kehrwert des Wurzelexponenten ist:

$$\sqrt[n]{x} = x^{1/n} \tag{7.29}$$

Dann verschwimmt der Unterschied zwischen Wurzeln und Potenzen und es bleiben als Rechenarten der dritten Stufe lediglich noch das Potenzieren und das Logarithmieren über; diese beiden sind jeweils zueinander **inverse mathematische Operationen:**

- Das Logarithmieren ist die Umkehrung des Potenzierens:
  $y = b^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_b(y) \qquad \text{für } b > 0, b \neq 1.$
- Das Potenzieren ist die Umkehrung des Logarithmierens:
  $y = \log_b(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = b^y \qquad \text{für } b > 0, b \neq 1, x > 0.$

Daraus folgt die

Regel 7.12: Inversen-Eigenschaft des Potenzierens und Logarithmierens

Für alle $n \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ (also positive n ungleich 1), $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$\log_b(b^x) = x \tag{7.30}$$
$$b^{\log_b(y)} = y \tag{7.31}$$

Beispiel 7.9: Anwendung der Inversen-Eigenschaft

Die Inversen-Eigenschaft können wir benutzen, um Gleichungen mit Potenzen (Wurzeln) und Logarithmen durch **Äquivalenzumformungen** zu lösen.

1. $5^x = 125$ || $\log_5(...)$
   $\log_5(5^x) = \log_5(125)$ | Inversen-Regel | ausrechnen
   $x = 3$
2. $\sqrt[x]{343} = 7$ | Schreibweise | id.
   $343^{1/x} = 7$ || $(...)^x$
   $(343^{1/x})^x = 7^x$ | Vereinfachen | id.
   $343 = 7^x$ || $\rightleftarrows$
   $7^x = 343$ || $\log_7(...)$
   $\log_7(7^x) = \log_7(343)$ | Inversen-Regel | ausrechnen
   $x = 3$
3. $\log_4(x) = 2$ || $4^{...}$
   $4^{\log_4(x)} = 4^2$ | Inversen-Regel | ausrechnen
   $x = 16$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

7.4.3 Logarithmen zu speziellen Basen

Logarithmen zur Basis 10: Dekadische Logarithmen, Zehnerlogarithmen

Hat man als Basis die 10, führt dies zum dekadischen Logarithmus (oder auch Zehnerlogarithmus genannt). Die Form: $x = \log_{10}(b)$. Hierfür existiert im deutschen Sprachraum eine weit verbreitete abgekürzte Schreibweise:

$$\lg(x) := \log_{10}(x) \tag{7.32}$$

Bis in die 1970er Jahre hinein (Erfindung und Verbreitung der Taschenrechner) verwendete man umfangreiche Logarithmentabellen (Basis 10) und darauf basierende Rechenschieber, um den Zeitaufwand bei umfangreichen Berechnungen abzukürzen.

Beispiel 7.10: Zehnerlogarithmen

- $\log_{10}(100) = 2,$ denn $10^2 = 100$
- $\lg(1\,000\,000) = 6,$ denn $10^6 = 1\,000\,000$

Logarithmen zur Basis 2: Binäre / dyadische Logarithmen, Zweierlogarithmen

Zweierlogarithmen sind insbesondere in der Informatik im Gebrauch. Schauen wir uns das Beispiel $y = 2^x$ an. Diese Gleichung soll nun nach x aufgelöst werden. Wir logarithmieren aus diesem Grund die Gleichung. Dies schaut wie folgt aus:

$$y = 2^x \qquad || \text{ logarithmieren} \tag{7.33a}$$
$$\log_2(y) = x \tag{7.33b}$$

Wie bei jeder Gleichung gilt: Was man links tut, muss man auch rechts machen.
Somit wird der Logarithmus auf beiden Seiten angewendet. $\log_2(y) = x$ bedeutet: Der Logarithmus von y zu Basis 2 ist gleich x.

Man muss sich also folgendes überlegen:

Welche Hochzahl x benötige ich, mit der die Zahl 2 potenziert werden muss, damit sich y ergibt?

Das Beispiel von eben hat den Zweierlogarithmus gezeigt, denn die Basis war eine 2.

Auch für Zweierlogarithmen existiert im deutschen Sprachraum eine weit verbreitete abgekürzte Schreibweise:[7.10]

$$\mathrm{ld}(x) := \log_2(x) \tag{7.34}$$

[7.10] ld von dyadischer Logarithmus (dyadisch = dem Zweiersystem zugehörend).

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beispiel 7.11: Zweierlogarithmen

- $\log_2(16) = 4,$ denn $2^4 = 16$
- $\mathrm{ld}(1024) = 10,$ denn $2^{10} = 1024$

Logarithmen zur Basis e: Natürliche Logarithmen

Der Logarithmus zur Basis e (der Eulerschen[7.11] Zahl)[7.12] wird auch als natürlicher Logarithmus bezeichnet und in Deutschland üblicherweise mit „ln“[7.13], international oft auch mit „log“ (ohne Tiefstellung der Basis) abgekürzt:

$$\ln(x) := \log_{\mathrm{e}}(x) \tag{7.35}$$

Der Begriff natürlicher Logarithmus wurde gewählt, weil sowohl die Exponentialfunktion als auch der Logarithmus zur Basis e[7.14] in vielen Zusammenhängen (Integralrechnung, Differentialrechnung, komplexe Zahlen, Trigonometrie) auf natürliche Weise ohne Vorfaktoren auftreten.

Insbesondere lässt sich der natürliche Logarithmus sehr einfach integrieren und differenzieren.

Alle wissenschaftlichen Taschenrechner haben eine eigene Taste für natürliche Logarithmen.

Beispiel 7.12: Natürliche Logarithmen

- $\ln(\mathrm{e}) = 1,$ denn $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$
- $\ln(1000) \approx 6{,}9078,$ denn $\mathrm{e}^{6{,}9078} \approx 1000$

7

[7.11] Leonhard Euler (* 15. April 1707 in Basel; † 7. September (jul.)/ 18. September 1783 (greg.) in Sankt Petersburg) war ein Schweizer Mathematiker und Physiker. Wegen seiner Beiträge zur Analysis, zur Zahlentheorie und zu vielen weiteren Teilgebieten der Mathematik gilt er als einer der bedeutendsten Mathematiker.

[7.12] $\mathrm{e} \approx 2{,}71828$; die Eulersche Zahl spielt eine sehr wichtige Rolle in der Mathematik. Sie wird uns noch sehr oft begegnen.

[7.13] ln = logarithmus naturabilis.

[7.14] Beachte: e wird als Zahl mit feststehender Bedeutung in Steilschrift geschrieben.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

7.4.4 Rechenregeln für Logarithmen

Für $a, b, u, v > 0$ und $a, b \neq 1$:

1. $\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$
2. $\log_a(\frac{u}{v}) = \log_a(u) - \log_a(v)$
3. $\log_a(u^n) = n \cdot \log_a(u)$
4. $\log_b(u) = \frac{\log_a(u)}{\log_a(b)}$

Mit Hilfe dieser Beziehung 4. (die sog. „Taschenrechner-Formel“) können Logarithmen zu beliebigen Basen berechnet werden.

5. $\log_a(a) = 1 \quad \Leftrightarrow a^1 = a$
6. $\log_a(1) = 0 \quad \Leftrightarrow a^0 = 1$
7. $\log_a(a^n) = n$

Beweis 7.1: Rechenregeln für Logarithmen

Der Beweis für die Rechenregeln ist einfach zu führen; wir überlassen es Ihnen ...

Tipp: Machen Sie Äquivalenzumformungen und verwenden Sie den Inversensatz 7.12 (Seite 7-21).

Aufgrund der großen praktischen Bedeutung hier die Herleitung der „Taschenrechner-Formel“ (Basiswechsel bei Logarithmen):

$$\boxed{\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)} = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(b)}}, \qquad x > 0,\ b > 0,\ b \neq 1. \tag{7.36}$$

Herleitung:

$$\text{Sei } y = \log_b(x) \quad \Leftrightarrow \quad b^y = x, \tag{7.37a}$$
$$\log_c(b^y) = \log_c(x) \qquad (c > 0,\ c \neq 1), \tag{7.37b}$$
$$y \cdot \log_c(b) = \log_c(x), \tag{7.37c}$$
$$y = \frac{\log_c(x)}{\log_c(b)} = \log_b x. \qquad \blacksquare \tag{7.37d}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beispiel 7.13: Rechnen mit Logarithmen

a) $x = \log_{10}(100.000) = 5 \Leftrightarrow 10^x = 100.000 \Rightarrow x = 5$

b) $x = \log_2(1.024) = \mathrm{ld}(1.024) \Leftrightarrow 2^x = 1.024 \Rightarrow x = 10$

c) $x = \log_5\left(\frac{1}{125}\right) \Leftrightarrow 5^x = \frac{1}{125} = 5^{-3} \Rightarrow x = -3$

d) $\lg\left(10^{20}\right) = 20 \cdot \lg(10) = 20$

e) $\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \ln(\mathrm{e}) = \frac{1}{2}$

f) $\lg\left(0{,}00001\right) = \lg\left(10^{-5}\right) = -5$

g) $\ln\left(2 \cdot x\right) + \frac{1}{2} \cdot \ln(y) - 2 \cdot \ln(z) = \ln(2 \cdot x) + \ln\left(\sqrt{y}\right) - \ln\left(z^2\right) = \ln\left(\frac{2 \cdot x \cdot \sqrt{y}}{z^2}\right)$

Beispiel 7.14: Taschenrechner-Formel

Die Tasten am Taschenrechner sind üblicherweise mit *log* (Basis 10) und *ln* (Basis e) beschriftet.

Um den Ausdruck $log_b(x)$ zu berechnen, tippen Sie ein:

- <die Zahl x> log ÷ < die Zahl b > log = oder
- <die Zahl x> ln ÷ < die Zahl b > ln =

Beispiel: $\log_2(7)$ =?; Eintippen (schwarz, der Taschenrechner zeigt danach rot):

- 7 log (0,845...) ÷ (0,845...) 2 log (0,301...) = (2,807...) oder
- 7 ln (1,945...) ÷ (1,945...) 2 ln (0,693...) = (2,807...)

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

8 Prozent-, Zins- und Rentenrechnung

8.1 Verhältnis- und Prozentrechnung

8.1.1 Der Dreisatz

Der Dreisatz ist ein mathematisches Verfahren, um aus drei gegebenen Werten eines Verhältnisses den unbekannten vierten Wert zu berechnen.[8.1]

Eine (einfachere) Variante ist der Zweisatz.

Der Dreisatz ist kein mathematischer Satz, sondern ein Lösungsverfahren für Proportionalaufgaben. Er wird insbesondere in der Schulmathematik gelehrt. Man kann mit dem Dreisatz Probleme aufgrund einfacher Einsichten oder auch ganz schematisch lösen, ohne die zugrunde liegenden mathematischen Gesetzmäßigkeiten vollständig zu durchschauen. Wer mit Proportionalitäten vertraut ist, benötigt den Dreisatz nicht mehr, weil er dann die Ergebnisse durch einfache mathematische Operationen erhalten kann.

Die Dreisatzaufgabe lässt sich sehr einfach in drei Denkschritten lösen:

1. a Einheiten von A entsprechen b Einheiten von B.
2. Einer Einheit von A entsprechen also b/a Einheiten von B.
3. c Einheiten von A entsprechen also $x = c \cdot b/a$ Einheiten von B.

Je nach Aufgabenstellung muss man ggf. Multiplizieren und Dividieren vertauschen, siehe Beispiel 2:

Beispiel 8.1: Dreisatz

Beispiel 1:
Vier Tonnen Material kosten 1.200 Euro. Wie viel kosten 6 Tonnen?

Vier Tonnen kosten 1.200, also kostet eine Tonne $1.200/4 = 300$ Euro.
Damit kosten sechs Tonnen $6 \cdot 300 = 1.800$ Euro.

Beispiel 2:
Drei Pumpen befüllen einen Behälter in 12 Stunden. Wie lange brauchen vier Pumpen?

Drei Pumpen benötigen 12 Stunden, also benötigt eine Pumpe $3 \cdot 12 = 36$ Stunden.
Damit benötigen vier Pumpen $36/4 = 9$ Stunden.

[8.1] https://de.wikipedia.org/wiki/Dreisatz; Abruf am 2019-08-04

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

8.1.2 Grundlagen der Prozentrechnung

Die Prozente geben das Verhältnis zweier Größen in Hundertsteln an[8.2]. Grundlegend für die Prozentrechnung sind in allen Formeln die Begriffe Prozentsatz, Prozentwert und Grundwert. Bei jeder für die Prozentrechnung wichtigen Formel spielen sie eine Rolle. Nach einigen Formeln, die die Verwendung des Prozentzeichens „%“ veranschaulichen, werden die Formeln für die Grundbegriffe des Prozentrechnens dargestellt.

Das Prozentzeichen kann auch als Division durch Hundert verstanden werden. Die Angabe „x Prozent“ kann daher auch als „x Hundertstel“ verstanden werden.

Die folgenden Beispiele veranschaulichen die Verwendung des Prozentzeichens:

$$1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01 \tag{8.1}$$

$$100\% = \frac{100}{100} = 1 \tag{8.2}$$

$$40\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5} = 0{,}4 \tag{8.3}$$

$$x\% = \frac{x}{100} \tag{8.4}$$

8.1.3 Grundwert, Prozentsatz und Prozentwert

Die Begriffe Grundwert, Prozentsatz und Prozentwert liegen allen Formeln der Prozentrechnung zu Grunde. Prozentwert und Grundwert haben dabei stets dieselbe Einheit, während der Prozentsatz eine einfache (dimensionslose) Zahl ist. Die folgenden Formeln veranschaulichen den Zusammenhang dieser drei Begriffe:

$$\text{Grundwert} = \frac{\text{Prozentwert}}{\text{Prozentsatz}} \tag{8.5}$$

$$\text{Prozentsatz} = \frac{\text{Prozentwert}}{\text{Grundwert}} \cdot 100\,\% \tag{8.6}$$

$$\text{Prozentwert} = \text{Grundwert} \cdot \text{Prozentsatz} \tag{8.7}$$

[8.2] Prozent = „von Hundert“ (lateinisch – italienisch)

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beispiel 8.2: Prozentrechnung 1

Wenn der Prozentwert 4 Kilogramm beträgt und der Grundwert 20 Kilogramm, berechnet sich der Prozentsatz folgendermaßen:
(Wie viel Prozent sind vier Kilogramm von 20 Kilogramm?)

$$\text{Prozentsatz} = \frac{4\ \text{kg}}{20\ \text{kg}} \cdot 100\,\% = \frac{1}{5} \cdot 100\,\% = \frac{100\,\%}{5} = 20\,\% \tag{8.8}$$

Beispiel 8.3: Prozentrechnung 2

Wenn der Prozentsatz mit 4 Prozent bekannt ist und der Prozentwert 5 Euro beträgt, berechnet sich der Grundwert gemäß oben genannter Formeln folgendermaßen:
(Von welchem Betrag sind fünf Euro vier Prozent?)

$$\text{Grundswert} = \frac{5\ \text{Euro}}{4\,\%} = \frac{5\ \text{Euro}}{\frac{4}{100}} = \frac{5\ \text{Euro} \cdot 100}{4} = \frac{500\ \text{Euro}}{4} = 125\ \text{Euro} \tag{8.9}$$

Beispiel 8.4: Prozentrechnung 3

Wenn der Grundwert 130 Meter ist und der Prozentsatz 30 Prozent, berechnet sich der Prozentwert folgendermaßen:
(Wie viele Meter sind 30 Prozent von 130 Meter?)

$$\text{Prozentwert} = 130\,\text{m} \cdot 30\,\% = \frac{130\,\text{m} \cdot 30}{100} = \frac{3900\,\text{m}}{100} = 39\,\text{m} \tag{8.10}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

8.2 Promille, ppm, ppb

Analog rechnet man mit den kleineren Verhältnissen:

- Promille[8.3] = ‰ = von Tausend
- ppm[8.4] = von Million
- ppb[8.5] = von Milliarde

Beispiel 8.5: Beispiel 1 (ppm)

Eine Firma produziert 32.000 Teile; davon sind 3 Teile fehlerhaft.
Die Ausschussquote beträgt $3 \cdot 1\,000\,000/32\,000 \approx 94\,\text{ppm}$.

Beispiel 8.6: Beispiel 2 (ppb)

In 420 Kubikmetern Luft befinden sich 3 Milliliter eines gefährlichen Gases.

Die Schadstoffkonzentration beträgt $\dfrac{0{,}003 \cdot 10^{-2}\,\text{m}^3 \cdot 1\,000\,000\,000}{420\,\text{m}^3} \approx 7\,\text{ppb}$.

[8.3] lat. pro mille = von Tausend
[8.4] parts per million
[8.5] parts per billion (engl. billion = deutsch Milliarde)

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

8.3 Die SI-Präfixe

Die SI-Präfixe sind standardisierte Vorsilben, die verwendet werden, um die Größe einer physikalischen Größe in Vielfachen oder Bruchteilen darzustellen. Sie basieren auf dem Internationalen Einheitensystem (SI) und erleichtern die Darstellung von sehr großen oder sehr kleinen Werten.

8.3.1 SI-Präfixe für dezimale Vielfache

10^{-1}	Dezi	d	10^{-2}	Zenti	c	10^{-3}	Milli	m	10^{-6}	Mikro	μ
10^{-9}	Nano	n	10^{-12}	Pico	p	10^{-15}	Femto	f	10^{-18}	Atto	a
10^{-21}	Zepto	z	10^{-24}	Yokto	y	10^{-27}	Ronto	r	10^{-30}	Quekto	q
10^{1}	Deka	da	10^{2}	Hekto	h	10^{3}	Kilo	k	10^{6}	Mega	M
10^{9}	Giga	G	10^{12}	Tera	T	10^{15}	Peta	P	10^{18}	Exa	E
10^{21}	Zetta	Z	10^{24}	Yotta	Y	10^{27}	Ronna	R	10^{30}	Quetta	Q

8.3.2 SI-Präfixe für binäre Vielfache

$2^{10} = 1024$	Kibi	Ki	$2^{20} = 1\,048\,576$	Mebi	Mi
$2^{30} = 1\,073\,741\,824$	Gibi	Gi	$2^{40} = 1\,099\,511\,627\,776$	Tebi	Ti
$2^{50} = 1\,125\,899\,906\,842\,624$	Pebi	Pi	$2^{60} = 1\,152\,921\,504\,606\,846\,976$	Exbi	Ei
$2^{70} \approx 1{,}180\,591\,620\,717 \cdot 10^{21}$	Zebi	Zi	$2^{80} \approx 1{,}208\,925\,819\,615 \cdot 10^{24}$	Yobi	Yi
$2^{90} \approx 1{,}237\,940\,039\,285 \cdot 10^{27}$	Robi	Ri	$2^{100} \approx 1{,}267\,650\,600\,228 \cdot 10^{30}$	Quebi	Qi

Hinweis 8.1: SI-Präfixe



Die SI-Binärpräfixe mit „-bi-“ sind prinzipiell schon seit Jahren genormt[8.6]; diese setzen sich jedoch leider nur sehr langsam durch.

So wird umgangssprachlich häufig fälschlich unter einem **Kilobyte** $2^{10} = 1\,024$ Byte, unter einem **Megabyte** $2^{20} = 1\,048\,576$ Byte, usw. verstanden.

Leider verwendet auch die Firma Microsoft® diese falsche Bezeichnungsweise, was sich u. a. in falsch berechneten Speichergrößen im Betriebssystem „Windows“ zeigt (vgl. [8.7] und [8.8]).

Z. b.: Ein Kilobyte sind tatsächlich $10^3 = 1\,000$ Byte und nicht 1 024 Byte.

[8.6] BIPM/CIPM (1998), IEC 60027-2 (2000-11), IEEE 1541 (2002), EC 60027-2 (2005-08), PTB (2007), DIN EN 80000-13:2009-01.
[8.7] https://de.wikipedia.org/wiki/Byte; abgerufen am 2017-02-26.
[8.8] https://de.wikipedia.org/wiki/Bin%C3%A4rpr%C3%A4fix; abgerufen am 2017-02-26.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

8.4 Zins- und Zinseszinsrechnung

Die Zinsrechnung beschreibt ein mathematisches Verfahren zur Berechnung von Zinsen, die als Entgelt auf geliehene Geldbeträge erhoben werden.

Die in diesem Artikel aufgeführten Formeln für die Zinsrechnung verwenden folgende Symbole:

- K_0: Anfangskapital (Kapital nach 0 Jahren)
- K_n: Endkapital (Kapital nach n Jahren)
- n: Laufzeit (ganze Jahre): Eingabe in Jahren
- t: Laufzeit (Tage): Eingabe in Tagen
- p: Zinssatz (pro Zinsperiode)
- i: Zinssatz als Dezimalangabe: $i = \frac{p}{100}$ (pro Zinsperiode)
- q: Zinssatz als Zinsfaktor: $q = 1 + i = 1 + \frac{p}{100}$ (pro Zinsperiode)

8.4.1 Einfache Zinsen ohne Zinseszinsen (lineare Verzinsung)

Bei jährlicher Verzinsung gilt für das Endkapital

$$K_n = K_0 + K_0 \cdot n \cdot i = K_0 \cdot (n \cdot i + 1) \tag{8.11}$$

Durch Umformung erhält man Formeln zur Berechnung des für ein bestimmtes Endkapital nötigen Startkapitals, Zinssatzes oder der Laufzeit:

$$i = \frac{1}{n} \cdot \frac{K_n}{K_0} - 1 \tag{8.12}$$

$$n = \frac{1}{i} \cdot \frac{K_n}{K_0} - 1 \tag{8.13}$$

Beispiel 8.7:

Ein Startkapital von 1 000 € wird zu einem Zinssatz von 5 Prozent über 2 Jahre angelegt. Bei einfacher Verzinsung ergäbe sich ein Endkapital von

$$K_2 = 1\,000\,€ \cdot \left(2 \cdot \frac{5}{100} + 1\right) = 1\,100\,€ \tag{8.14}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

8.4.2 Zinseszinsrechnung (exponentielle Verzinsung)

Die Formel für das Kapital nach n Jahren bei jährlicher Verzinsung und Zinseszinsen lautet:

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n = K_0 \cdot q^n \tag{8.15}$$

Die Formel lässt sich umstellen, um bei gegebenem Endkapital das Startkapital, den Zinssatz oder die Laufzeit zu bestimmen:

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n} = \frac{K_n}{q^n} \tag{8.16}$$

$$i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 \quad \text{oder} \quad q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} \tag{8.17}$$

$$p = \left(\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 \right) \cdot 100 \tag{8.18}$$

$$n = \frac{\ln \frac{K_n}{K_0}}{\ln(1+i)} = \frac{\ln K_n - \ln K_0}{\ln q} \tag{8.19}$$

Beispiel 8.8:

Ein Startkapital von 1 000 € wird zu einem Zinssatz von 5 Prozent über 2 Jahre angelegt. Bei jährlicher Verzinsung ergäbe sich ein Endkapital von

$$K_2 = K_0 \cdot (q)^n = 1\,000\,€ \cdot (1+0{,}05)^2 = 1\,102{,}50\,€ \tag{8.20}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

8.5 Rentenrechnung

Definition 8.1: Rente

Renten sind Zahlungsströme mit Zahlungen in gleichen zeitlichen Abständen und (meistens) in konstanter Höhe.

Man unterscheidet:

- ***Vorschüssige Renten***: Zahlung zum Anfang einer Periode und
- ***Nachschüssige Renten***: Zahlung zum Ende einer Periode.

Themen:

- Barwerte
- Endwerte
- Unterjährige Renten
- Monatsrenten

8.5.1 Jährliche nachschüssige Renten

Der Rentenbetrag r wird jeweils zum Ende eines Jahres gezahlt.

Rentenendwert R_n: Kumulierter Wert aller Rentenzahlungen am Ende der Laufzeit, d. h. aufgezinst.

$$R_n = r \cdot q^{n-1} + r \cdot q^{n-2} + \cdots + r \cdot q^0 \tag{8.21}$$

mit $q = i + 1$:

$$R_n = r \cdot (q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q^0) = r \cdot \frac{q^{n-1}}{q-1} \tag{8.22}$$

Endwert R_n der jährlich nachschüssigen Rente r mit Zins i (sowie $q = 1 + i$) und Laufzeit n:

$$R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} \tag{8.23}$$

Barwert R_0 der jährlich nachschüssigen Rente r mit Zins i (sowie $q = 1 + i$) und Laufzeit n (Barwert = abgezinster Endwert):

$$R_0 = r \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q-1)} \tag{8.24}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beispiel 8.9: Renten-Endwert

Genau 10 Jahre lang wurde jeweils zum Jahresende ein Betrag von 12 000 Euro zum Zinssatz von 4% angelegt. Wie viel kann am Jahresende des 10. Jahres abgehoben werden?

$$R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 12\,000 \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{1{,}04 - 1} = 144\,073{,}28\,\text{Euro} \tag{8.25}$$

Beispiel 8.10: Renten-Barwert

Aus welchem zum Zeitpunkt 0 eingezahlten Betrag kann 10 Jahre lang bei 4% Zins eine konstante nachschüssige Rente von 12 000 Euro bezahlt werden?

$$R_0 = r \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q - 1)} = 12\,000 \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{1{,}04^{10} \cdot (1{,}04 - 1)} = 97\,330{,}75\ \text{Euro} \tag{8.26}$$

8.5.2 Jährliche vorschüssige Renten

Der Rentenbetrag r' wird jeweils zum Beginn eines Jahres gezahlt. Dann gilt das **Äquivalenzprinzip**:

$$r' \cdot q = r \tag{8.27}$$

Rentenendwert R_n der jährlich vorschüssigen Rente r':

$$R_n = r' \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \tag{8.28}$$

Barwert R_0 der jährlich vorschüssigen Rente r':

$$R_0 = r' \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q - 1)} \tag{8.29}$$

8.5.3 Unterjährige Renten

Bisher: Jährliche Rentenzahlungen.

Jetzt: Aufteilung des Jahres in m weitere Rentenzahlungs-Perioden

Bestimmung des Jahresendwertes r_e (konforme jährlich nachschüssige Ersatzrentenrate) der m unterjährigen Rentenzahlungen r mit der deutschen kaufmännische Zinsmethode (linear aufgezinst):

Rente r ist nachschüssig:

$$r_e = r \cdot \left(m + \frac{m - 1}{2} \cdot i \right) \tag{8.30}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Rente r ist vorschüssig:

$$r_e = r \cdot \left(m + \frac{m+1}{2} \cdot i \right) \tag{8.31}$$

Beispiel 8.11: Unterjährige Renten

Ein heute 57-jähriger Arbeitnehmer hat in 10 Jahren einen Anspruch auf eine monatliche Betriebsrente von 500 Euro, die vorschüssig bezahlt wird. Durch welche Gegenleistung kann sie heute bei einem Zinssatz von 6% abgelöst werden, wenn eine Lebenserwartung von 79 Jahren angenommen wird?

Gegeben sind:

$m = 12$	Anzahl unterjähriger Rentenzahlungen
$r = 500$	Unterjähriger Rentenzahlungsbetrag
$i = 0{,}06$	Zinssatz $\Rightarrow\ q = 1{,}06$
$n = 12$	Jahre Rentenbezug (Lebenserwartung 79 Jahre – Renteneintritt 67 Jahre)

Die Lösung erfolgt in drei Schritten:

1. Berechnung der konformen jährlich nachschüssigen Ersatzrentenrate der vorschüssigen unterjährigen Rente:

$$r_e = r \cdot \left(m + i \cdot \frac{m+1}{2} \right) = 500 \cdot \left(12 + 0{,}06 \cdot \frac{13}{2} \right) = 6\,195 \text{ Euro.} \tag{8.32}$$

2. Barwert R_{67} der Ersatzrentenraten zum Zeitpunkt des Rentenbeginns:

$$R_{67} = r_e \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q-1)} = 6\,195 \cdot \frac{1{,}06^{12} - 1}{1{,}06^{12} \cdot (1{,}06 - 1)} = 51\,937{,}91 \text{ Euro.} \tag{8.33}$$

3. Barwert heute:

$$R_{57} = \frac{R_{67}}{(1+i)^{10}} = \frac{51\,937{,}91}{1{,}06^{10}} = 29\,001{,}86 \text{ Euro.} \tag{8.34}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

8.6 Kleine Formelsammlung zur Finanzmathematik

Im Folgenden bedeutet:

i	Zinssatz
i_{nom}	Nominalzinssatz pro Jahr
q	Zinsfaktor $= 1 + i$
n	Anzahl ganzer Zinsperioden (i. d. R. Jahre)
m	Anzahl Zinsperioden je Jahr
s	Anzahl unterjähriger Zinsperioden ($s \leq m$)
T	Zeitpunkt (Tag)
t	Zeitraum (Einheit = Zinsperiode, i.a. Jahr)
g	Gebühren in % (Agio)
K	Kapital
R	Rentenwert bzw. Restschuld
r	Rentenrate
A	Annuität
S	Darlehenssumme
Z	Zinsen
T	Tilgung

8.6.1 Zinsrechnung

8.6.1.1 Zinseszinsformel für *n* ganze Perioden

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n = K_0 \cdot q^n$$

$$n = \frac{\log_a\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\log_a(1+i)}$$

$$i = \left(\frac{K_n}{K_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

8.6.1.2 Unterjährige Verzinsung

Berechnung der Tage im Jahr

Mit 30 Zinstagen pro Monat gilt:

$$T_i = (aktueller\ Monat - 1) \cdot 30$$
$$+Tag\ im\ Monat$$

Falls der Tag der 31. ist, wird er auf den 30. gesetzt.

Zinsformel für unterjährige einfache Verzinsung

$$K_t = K_0 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{T_2 - T_1}{360}\right) \Leftrightarrow$$

$$K_0 = \frac{K_t}{\left(1 + i \cdot \frac{T_2 - T_1}{360}\right)}$$

$$\Leftrightarrow\ T_2 - T_1 = \frac{\frac{K_t}{K_0} - 1}{i} \cdot 360$$

mit T_1 bzw. T_2 = Tag der Ein- bzw. Auszahlung.

Gemischte Verzinsung mit *n* ganzen Perioden

$$K_t = K_0 \cdot (1 + t_1 \cdot i) \cdot (1+i)^n \cdot (1 + t_2 \cdot i)$$

mit t_1 = Zinszeitraum im ersten Jahr
und t_2 = Zinszeitraum im letzten Jahr.

Gemischte Verzinsung mit *n* ganzen Perioden nach deutscher Zinsmethode[8.9]

$$K_t = K_0 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{360 - T_1 + 1}{360}\right) \cdot (1+i)^n \cdot \left(1 + i \cdot \frac{T_2 - 1}{360}\right)$$

Näherungsformel für nicht ganzzahligen Zeitraum (Einheit = Zinsperiode)

$$K_t = K_0 \cdot (1+i)^t$$

[8.9] In Deutschland wird meistens der erste Tag bereits als Zinstag und der letzte Tag, an dem abgehoben wird, nicht mehr als Zinstag gerechnet. Dann muss t_1 um 1 erhöht und t_2 um 1 erniedrigt werden.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

8.6.1.3 Unterjährige Verzinsung mit Zinseszinsen (*m* Zinsperioden in einem Jahr)

Periodenzinsrate $i_* = \dfrac{i_{\text{nom}}}{m}$

Zinseszinsformel für *s* Zinsperioden:

$$K_s = K_0 \cdot (1 + i_*)^s = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i_{\text{nom}}}{m}\right)^s$$

Zu i_{nom} konforme Periodenzinsrate i':

$$(1 + i')^m = 1 + i_{\text{nom}}$$

bzw.

$$i' = (1 + i_{\text{nom}})^{\frac{1}{m}} - 1$$

Effektive Zinsrate:
(=jährliche Zinsrate, die zum gleichen Ergebnis führt wie die nominelle Zinsrate (zinseszinslich verzinst über m Perioden im Jahr)

$$i_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{i_{\text{nom}}}{m}\right)^m - 1 = (1 + i^*)^m - 1$$
$$\Leftrightarrow \; i_{\text{nom}} = \left((1 + i_{\text{eff}})^{1/m} - 1\right) \cdot m$$

Stetige Verzinsung:

$$K_t = K_0 \cdot \mathrm{e}^{i \cdot t}$$

8.6.1.4 Gebühren (Agio)

Eingezahlt wird $K_0' = K_0 \cdot (1 + g)$, verzinst wird nur K_0 bei der weiteren Berechnung von K_t usw.

Periodenzinsrate i^* für unterjährige Zeiträume (m Zinsperioden in einem Jahr):

$$i^* = \left(1 + \frac{i_{\text{nom}}}{m}\right) \cdot \frac{1}{1 + g} - 1$$

Konformer Periodenzins:

$$i' = \frac{K_t}{K_0 \cdot (1 + g)} - 1$$

Effektive Zinsrate:

$$i_{\text{eff}} = (1 + i^*)^m - 1$$

8.6.2 Barwerte (Zeitwerte)

Der Wert einer Zahlung K_{T1}, die zum Zeitpunkt T_1 eintritt, wird im Zeitpunkt T_2 als **Zeitwert K_{T2}** bezeichnet. Für gegebene Verzinsung i berechnet sich der Zeitwert durch geeignete Auf- bzw. Abzinsung gemäß:

Unterjähriger Zeitraum, $T_2 \geq T_1$:

$$K_{T2} = K_{T1} \cdot \left(1 + i \cdot \frac{T_2 - T_1}{360}\right)$$

Unterjähriger Zeitraum, $T_2 \leq T_1$:

$$K_{T2} = \frac{K_{T1}}{1 + i \cdot \dfrac{T_1 - T_2}{360}}$$

Für n ganze Perioden (oder approximiert):

$$K_{T2} = K_{T1} \cdot (1 + i)^{T_2 - T_1}$$

8.6.3 Rentenrechnung

Im Folgenden bedeuten:

r (r')	Rente nachschüssig (vorschüssig)
n	Laufzeit
i	Zinsrate
q	Zinsfaktor $= 1 + i$
R_0	Rentenbarwert (zu Beginn der Abrufphase)
R_n	Rentenendwert (am Ende der Ansparphase)
m	Anzahl unterjähriger Perioden

8.6.3.1 Nachschüssige jährliche Renten

Endwert:

$$R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Barwert:

$$R_0 = r \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q - 1)}$$

Laufzeit aus Endwert:

$$n = \frac{\ln\left(1 + \dfrac{R_n \cdot i}{r}\right)}{\ln(q)}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Laufzeit aus Barwert:

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{R_0 \cdot i}{r}\right)}{\ln(q)}$$

Barwert ewiger Rente:

$$R_0 = \frac{r}{i}$$

8.6.3.2 Vorschüssige jährliche Renten

Äquivalenzprinzip:

$$r' \cdot q = r$$

Endwert:

$$R_n = r' \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Barwert:

$$R_0 = r' \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q - 1)}$$

Laufzeit aus Endwert:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{R_n \cdot i}{r' \cdot q} + 1\right)}{\ln(q)}$$

Laufzeit aus Barwert:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{1}{1 - \frac{R_0 \cdot i}{r' \cdot q}}\right)}{\ln(q)}$$

Barwert ewiger Rente:

$$R_0 = r' + \frac{r'}{i}$$

8.6.3.3 Unterjährige Renten

Konforme jährliche nachschüssige Ersatzrentenrate r_e einer unterjährig ...

...nachschüssigen Rente r:

$$r_e = r \cdot \left(m + i \cdot \frac{m - 1}{2}\right)$$

...vorschüssigen Rente r:

$$r_e = r \cdot \left(m + i \cdot \frac{m + 1}{2}\right)$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

8.6.4 Tilgungsrechnung

Im Folgenden ist:

i	der Zinssatz pro Zinsperiode;
q	der Zinsfaktor ($q = 1 + i$);
S	die Darlehenssumme;
n	die Tilgungsdauer (in Perioden [Jahre]);
R_k	die Restschuld am Anfang des k-ten Jahres;
Z_k	die Zinsquote am Ende des k-ten Jahres;
T_k	die Tilgungsquote am Ende des k-ten Jahres;
A	die Annuität ($A_k = Z_k + T_k$).

8.6.4.1 Konstante Annuität (vollständige Rückzahlung nach *n* Zinsperioden)

Konstante Annuität

$$A_k = A = S \cdot \frac{q^n \cdot (q-1)}{q^n - 1}$$

Zinsen am Ende der *k*-ten Zinsperiode

$$Z_k = A \cdot (1 - q^{k-1-n})$$

Tilgung am Ende der *k*-ten Zinsperiode

$$T_k = A \cdot q^{k-1-n}$$

Restschuld zu Beginn der *k*-ten Zinsperiode

$$R_k = S \cdot \frac{q^n - q^{k-1}}{q^n - 1}$$

8.6.4.2 Konstante Annuität (teilweise Rückzahlung nach *n* Zinsperioden, *A* gegeben)

Tilgung am Ende der *k*-ten Zinsperiode

$$T_k = (A - S \cdot i) \cdot q^{k-1}$$

Zinsen am Ende der *k*-ten Zinsperiode

$$Z_k = A - T_k$$

Restschuld zu Beginn der *k*-ten Zinsperiode

$$R_k = \frac{Z_k}{i}$$

Laufzeit bis zur vollständigen Tilgung

$$n = \frac{-\ln\left(1 - S \cdot \frac{i}{A}\right)}{\ln(q)}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

8.6.4.3 Konstante Tilgung T (Laufzeit n Zinsperioden)

Tilgung bei vollständiger Rückzahlung

$$T_k = T = \frac{S}{n}$$

Restschuld zu Beginn der k-ten Zinsperiode

$$R_k = S - (k-1) \cdot T$$

Zinsen am Ende der k-ten Zinsperiode

$$Z_k = R_k \cdot i$$

Rate am Ende der k-ten Zinsperiode

$$A_k = Z_k + T$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

9 Zahlensysteme

Man unterscheidet zwei Arten der Zahlendarstellung:[**PRAU15**]

- Additionssysteme: Der Wert einer Zahl wird durch die Summe der einzelnen Ziffernwerte gebildet.
- Stellenwertysteme (positionelle Systeme): Der Wert einer Ziffer hängt von der Position innerhalb der Zahl ab.

Schon die Maya verwendeten ein Stellenwertsystem, allerdings mit 20 verschiedenen Ziffern.

9.1 Additionssysteme

Ägyptische Zahlen:

Abbildung 9.1: Ägyptische Zahlsymbole

1	10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000
						
Einfacher Strich	Rinds-gespann	Seilschlinge	Wasserlilie	Finger	Kaulquappe oder Frosch	Heh (altägyptischer Gott der Unendlichkeit)

Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/%C3%84gyptische_Zahlschrift; abgerufen am 04-MAR-2016.

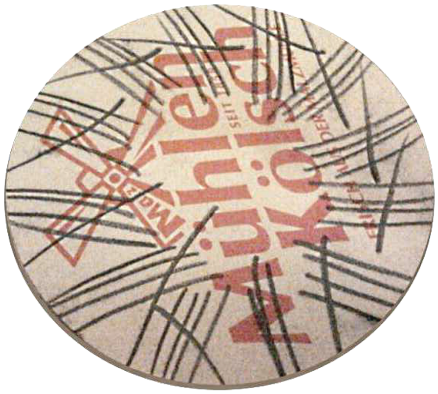
Hebräische Zahlen:

Verschiedene Ziffern für $1, 2, \ldots 9, \quad 10, 20, \ldots 90, \quad 100, 200, \ldots 900$.

Strichlisten:

- Auch „Bierdeckelsystem“
- $| = 1 \quad || = 2 \quad ||| = 3 \quad |||| = 4 \quad \not|\not|\not| = 5$
- Es gibt nur eine Ziffer: |
- Man nennt diese Darstellung daher auch „unäres System“
- Wert entsteht durch Abzählen der Ziffern (Striche)
- Einfaches Addieren: Zusammenfügen der Striche in einer Darstellung

Abbildung 9.2: „Bierdeckelsystem“



Quelle: [PR15] 02 S. 4

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Römische Zahlendarstellung

- Weiterentwicklung des Strichsystems
  - Neben | gibt es weitere Ziffern, die für eine Menge von Strichen stehen:
    I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000
  - Ziffern werden ihrer Größe nach angeordnet (große links, kleine rechts)
- Wert der Zahl ergibt sich durch *Zusammenzählen* der Werte aller verwendeten Ziffern
  - Beispiel: CCCLXII = 362
- Die *Subtraktionsregel* verkürzt die Darstellung: I, X und C können einem der zwei nächstgrößeren Zeichen voran gestellt werden:
  - IV = 4 (statt IIII)
  - IX = 9 (statt VIIII)
  - XL = 40 (statt XXXX)
  - XC = 90 (statt LXXXX)
  - CD = 400 (statt CCCC)
  - CM = 900 (statt DCCCC)
  - ID = 499 ist nach dieser Regel nicht korrekt; richtig wäre: CDXCIX
- Die Addition ist einfach durchzuführen (zusammenfügen und ggf. neu zusammenfassen)
- Andere Rechenarten (z.B. die Multiplikation) sind kompliziert durchzuführen
- Die Darstellung großer Zahlen ist nur mit speziellen Kennzeichnungen möglich (hier nicht dargestellt)
- Keine Ziffer „Null“ – diese wird in einer solchen Darstellung nicht benötigt
- Darstellung von Bruchzahlen in Einheiten von Zwölfteln (lat. uncia, vgl. dt. „Unze“)

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

9.2 Stellenwertsysteme (positionelle Systeme)

[9.1] Alle heute gebräuchlichen Zahlensysteme sind positionelle (oder Stellenwert-) Systeme. Dabei bestimmt die Position einer Ziffer deren Stellenwert. Dieser ergibt sich aus der Multiplikation der jeweiligen Ziffer mit der n-ten Potenz der Zahlensystem-Basis b (n beginnend ganz rechts mit 0), wobei b die Basis des Zahlensystems ist.

Definition 9.1: Alphabet

Ein ***Alphabet*** Σ_b ist eine wohldefinierte Menge von b unterscheidbaren Symbolen.

Regel 9.1: Satz über die b-adische Darstellung natürlicher Zahlen: [9.2]

Sei $b \in \mathbb{N}$ mit $b > 1$. Dann ist jede natürliche Zahl z mit $0 \leq z \leq b^n - 1$ (und $n \in \mathbb{N}$) **eindeutig** als Wort der Länge n über dem **Alphabet** Σ_b darstellbar durch

$$z = \sum_{i=0}^{n-1} z_i \cdot b^i \tag{9.1}$$

mit $z_i \in \Sigma_b$ für $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Definition 9.2: b-adische Entwicklung

Diese Darstellung heißt ***b*-adische Entwicklung** von z mit **Koeffizienten** z_i zur **Basis** b.

Die Zahl n heißt Stellenzahl der Entwicklung. [9.3]

Man schreibt: $z = (z_{n-1}z_{n-2}\ldots z_0)_b$, wobei das $z_{n-1}z_{n-2}\ldots$ für das Hintereinander-Reihen der Ziffern z_i steht. Bei der 10-adischen Darstellung (unser geläufiges Dezimalsystem) lässt man die Klammern und die Angabe der Basis üblicherweise weg.

Das Alphabet Σ_b bildet sich z.B. für:

- $b = 2$ aus $\Sigma_2 = \{0, 1\}$ „Dualsystem“
- $b = 5$ aus $\Sigma_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ „Fünfersystem“
- $b = 8$ aus $\Sigma_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ „Oktalsystem“
- $b = 10$ aus $\Sigma_{10} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ „Dezimalsystem“
- $b = 12$ aus $\Sigma_{12} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B\}$ „Zwölfersystem“
- $b = 16$ aus $\Sigma_{16} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$ „Hexadezimalsystem“

[9.1] [DR14] Drescher, Rolf B. (2014): Mathematische Grundlagen Teil Arithmetik. Begleitende Unterlagen zur Vorlesung an der FOM Standort Nürnberg. Zu finden im Online-Campus der FOM. Teil Arithmetik, S. 20 f.
[9.2] [SP03] Spaniol, Otto (2003): Rechnerstrukturen V4. Begleitende Foliensätze zur Vorlesung an der RWTH Aachen. Zu finden unter http://www.nets.rwth-aachen.de/content/teaching/lectures/sub/rs/rsSS03/slides/ 02 S. 3 f.; abgerufen am 04-MAR-2016.
[9.3] [PR15] 02 S 15 ff.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

mit $\Sigma_b = \{ z_i \in \mathbb{N}_0 \,|\, 0 \le z_i \le b-1 \}$. Falls $z_1 \ge 10$, dann benutzen wir statt Ziffern Großbuchstaben, beginnend mit dem „A“ (siehe z.B. Zwölfer- und Hexadezimalsystem).

Unser gebräuchliches Zahlensystem ist das Dezimalsystem, welches zur Basis 10 die zehn Ziffern $\Sigma_{10} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$ kennt. [9.4]

Vermutlich ist die Wahl der Basis 10 des Dezimalsystems auf die zehn Finger der menschlichen Hand zurück zu führen. Das folgende Beispiel verdeutlicht den prinzipiellen Aufbau positioneller Zahlensysteme anhand der geläufigen 10-adischen Darstellung:

Beispiel 9.1: Dezimalsystem

Beispiel: Dezimalsystem; $z = (2\,160\,342)_{10}$

$\downarrow i$	**2**	**1**	**6**	**0**	**3**	**4**	**2**	$\downarrow 10^i$	$\downarrow 10^i$		
0							**2**	$\cdot 10^0$	(1)	=	**2**
1						**4**		$\cdot 10^1$	(10)	=	**40**
2					**3**			$\cdot 10^2$	(100)	=	**300**
3				**0**				$\cdot 10^3$	(1.000)	=	**0.000**
4			**6**					$\cdot 10^4$	(10.000)	=	**60.000**
5		**1**						$\cdot 10^5$	(100.000)	=	**100.000**
6	**2**							$\cdot 10^6$	(1.000.000)	=	**2.000.000**
									S u m m e		**2.160.342**

(9.2)

Weitere gebräuchliche positionelle Zahlensysteme sind

- das Dual- oder Binärsystem: Basis $b = 2$; $\Sigma_2 = \{ 0, 1 \}$
  In vielen Programmiersprachen stellt man einer dualen Zahl zur Unterscheidung vom Dezimalsystem ein „%“ voraus, also z.B. %100110111000101.
- das Oktalsystem: Basis $b = 8$; $\Sigma_8 = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$
  In vielen Programmiersprachen stellt man einer oktalen Zahl zur Unterscheidung vom Dezimalsystem eine „0“ voraus, also z.B. 0735401637.
- das Hexadezimalsystem: Basis $b = 16$; $\Sigma_{16} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F \}$
  In vielen Programmiersprachen stellt man einer hexadezimalen Zahl zur Unterscheidung vom Dezimalsystem ein „$“ voraus (also z.B. $37E1F0D), oder – wie in „C“ – ein „0x“ (also z.B. 0x37E1F0D).

Der Aufbau dieser Systeme geschieht prinzipiell genauso wie beim Dezimalsystem, wie das folgende Beispiel aus dem Dualsystem verdeutlicht:

[9.4] [DR14] Teil Arithmetik, S. 20 f

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beispiel 9.2:

Beispiel: Dualsystem $z = (1001010)_2 = \%1001010$

$\downarrow i$	%1	%0	%0	%1	%0	%1	%0	$\downarrow 2^i$	$\downarrow 2^i$			
0							%0	$\cdot 2^0$	(%1)	=	%0	
1						%1		$\cdot 2^1$	(%10)	=	%10	
2					%0			$\cdot 2^2$	(%100)	=	%000	
3				%1				$\cdot 2^3$	(%1000)	=	%1000	(9.3)
4			%0					$\cdot 2^4$	(%10000)	=	%00000	
5		%0						$\cdot 2^5$	(%100000)	=	%000000	
6	%1							$\cdot 2^6$	(%1000000)	=	%1000000	
									S u m m e		%1001010	

9.3 Grundrechenarten in den verschiedenen Zahlensystemen

Schriftliche Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division gehen in anderen Zahlensystemen prinzipiell genauso, wie im vertrauten Zehnersystem. [9.5] Man muss nur beachten, dass man nicht 10 Ziffern hat; d.h ein „Überlauf“ (Übertrag in nächsthöhere Stelle beim Addieren und Multiplizieren, „Borgen“ beim Subtrahieren) geschieht nicht beim Übergang von $9 \to 10$ (10er-System), sondern bei den Übergängen $\%1 \to \%10$ (2er-System), $07 \to 010$ (8er-System), \$F $\to$ \$10 (16er-System).

Falls es Ihnen leichter fällt, können Sie natürlich auch die Zahlen in das Dezimalsystem wandeln, im vertrauten Dezimalsystem rechnen und die Zahlen anschließend wieder zurück wandeln.

Beispiel 9.3: Beispiele für die Addition im 2er-, 8er-, und 16er-System:

$$\begin{array}{rccccccc} & \% & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ + & \% & & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & & & & 1 & & \\ = & \% & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rccccc} & 0 & 2 & 6 & 4 & 4 \\ + & 0 & 3 & 1 & 5 & 6 \\ \hline & & 1 & 1 & 1 & \\ = & 0 & 6 & 0 & 2 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rccccc} & \$ & & C & 2 & 7 & E \\ + & \$ & & B & 3 & 3 & 4 \\ \hline & & & & & 1 & \\ = & \$ & 1 & 7 & 5 & B & 2 \end{array} \tag{9.4}$$

[9.5] Ebd., S. 21 f.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beispiel 9.4: Beispiel für die Multiplikation

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
\% & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \% & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 & & & \% & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & \% & & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
 & & & \% & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & & \\
 & & & \% & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
 & & & \% & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & & & & \\
 & & & \% & & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & \\
\hline
 & & & \% & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{array}
\tag{9.5}
$$

9.4 Umrechnungen zwischen Zahlensystemen

Für die Umrechnung in ein anderes Zahlensystem kann man prinzipiell die oben angeführten Schemata verwenden. Ersetzen Sie dabei die Zahlen in der rechten Spalte „Basis^n“ durch die entsprechenden Werte der Ziel-Basis. Hier ein Beispiel für die Umrechnung Hexadezimal - Dezimal: [9.6]

Beispiel 9.5:

$(z)_{10} \stackrel{?}{=} (\text{A371F0E})_{16} = \%\text{A371F0E}$

$\downarrow i$	**\$A**	**\$3**	**\$7**	**\$1**	**\$F**	**\$0**	**\$E**	$\downarrow 16^i$	$\downarrow$ Hex	$\downarrow$ Dezimal		
0							**\$E**	$\cdot 16^0$	(\$E =)	$14 \cdot 1$	=	14
1						**\$0**		$\cdot 16^1$	(\$0 =)	$0 \cdot 16$	=	0
2					**\$F**			$\cdot 16^2$	(\$F =)	$15 \cdot 256$	=	3.840
3				**\$1**				$\cdot 16^3$	(\$1 =)	$1 \cdot 4.096$	=	4.096
4			**\$7**					$\cdot 16^4$	(\$7 =)	$7 \cdot 65.536$	=	458.752
5		**\$3**						$\cdot 16^5$	(\$3 =)	$3 \cdot 1.048.576$	=	3.145.728
6	**\$A**							$\cdot 16^6$	(\$A =)	$10 \cdot 16.777.216$	=	167.772.160
										S u m m e		171.384.590

(9.6)

Besonders einfach gehen Umrechnungen zwischen dem Dual- und den Oktal- bzw. Hexadezimalsystem. Sie brauchen dafür nur die Dualzahl von rechts in 3er- bzw. 4er- Blöcke zu unterteilen und können die Symbole des Alphabets des Zielsystems dann sofort darunter schreiben.

[9.6] Ebd., S. 22

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beispiel 9.6:

Wandle %10010110100101 in das oktale und in das hexadezimale System um!

Oktal (3er-Blöcke)	Hexadezimal (4er-Blöcke)
%10.010.110.100.101	%10.0101.1010.0101
=02 2 6 4 5	=$2 5 A 5

(9.7)

Ähnlich geschieht die umgekehrte Umwandlung aus dem Oktal- bzw. Hexadezimalsystem in das Dualsystem. Man schreibt unter jedes Symbol des Ausgangssystems das drei- bzw. vierstellige Ziffernmuster des Dualsystems.

Beispiel 9.7:

Wandle $A237F in das Dualsystem um!

$	A	2	3	7	F
=%	1010.	0010.	0011.	0111.	1111

(9.8)

Beispiel 9.8: Tipp:

Microsoft® Excel® stellt hierfür Funktionen bereit:

BININOKT(), BININDEZ(), BININHEX(),
OKTINBIN(), OKTINDEZ(), OKTINHEX(),
HEXINBIN(), HEXINOKT(), HEXINDEZ().

9.5 Darstellung reeller Zahlen im Dualsystem

9.5.1 *b*-adische Entwicklung reeller Zahlen

Wir verallgemeinern die bekannte Darstellung b-adischer natürlicher Zahlen $z = \sum_{i=0}^{n-1} z_i \cdot b^i$ auf reelle Zahlen:[9.7]

Satz 9.1: Satz über die *b*-adische Entwicklung reeller Zahlen:

Sei $b \in \mathbb{N}$ mit $b > 1$. Dann ist jede reelle Zahl z Grenzwert einer Reihe:

$$z = \pm \sum_{i=-m}^{\infty} z_i \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^i \quad ; \quad z_i \in \{\,0,\ 1,\ \ldots,\ b-1\,\} \tag{9.9}$$

[9.7] ebd.: 02 S. 4 ff.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Wir schreiben dafür auch: $z = (z_{-m}\ z_{-m+1}\ \ldots\ z_{-1}\ z_0\ .\ z_1\ z_2\ \ldots)_2$; Beispiel: $z = (3.14159)_{10}$.

m ist so zu wählen, dass alle Vorkommastellen dargestellt werden können.

Für $z_i = 0$ (d. h. alle $i > 0$) ist dies die bekannte b-adische Entwicklung einer *ganzen Zahl*.

Die b-adische Entwicklung einer reellen Zahl kann

- endlich viele Summanden haben; z. B. $\frac{1}{3} = \sum_{i=1}^{1} \left(\frac{1}{3}\right)^i = (0.1)_3$
- unendlich viele periodische Summanden haben; z. B. $\frac{1}{3} = \sum_{i=1}^{\infty} 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^i = (0.3333\ldots)_{10}$
- unendlich viele nicht-periodische Summanden haben (alle irrationalen Zahlen, z. B. π)

Umrechnungen zwischen den Basen

Man hat – genau wie bei den ganzen Zahlen – zwei Möglichkeiten:

- Rechnen im Quellsystem
- Rechnen im Zielsystem

Im Folgenden wird die Basis des Quellsystems mit b, die des Zielsystems mit B bezeichnet.

Beispiel 1 (Rechnen im Zielsystem): Gegeben sei $(0.10011)_2$; gesucht ist die Darstellung zur Zielbasis $B = 10$.

Rechnung im Zielsystem: Ausrechnen der Werte der Summanden im Zielsystem, dort auch addieren. Bei der Berechnung kann das Horner-Schema nützlich sein.

$$\begin{aligned}
(0.10011)_2 &= 1 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^1 + 0 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 0 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + 1 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 + 1 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^5 \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot \left(1 + \tfrac{1}{2} \cdot \left(0 + \tfrac{1}{2} \cdot \left(0 + \tfrac{1}{2} \cdot (1 + \tfrac{1}{2} \cdot 1)\right)\right)\right) \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot \left(1 + \tfrac{3}{16}\right) \\
&= \tfrac{19}{32} = (0,59375)_{10}
\end{aligned}$$

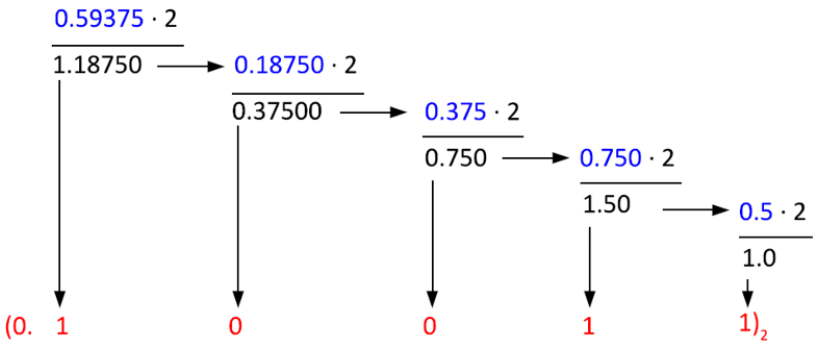
Beispiel 2 (Rechnen im Quellsystem): Gegeben sei $(0.59375)_{10}$; gesucht ist die Darstellung zur Zielbasis $B = 2$.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Abbildung 9.3: Rechnen im Quellsystem

Verfahren: Fortwährend mit der Zielbasis multiplizieren; auftretende Vorkommastellen sind die gesuchten Ziffern; mit Nachkommastellen weiter rechnen.

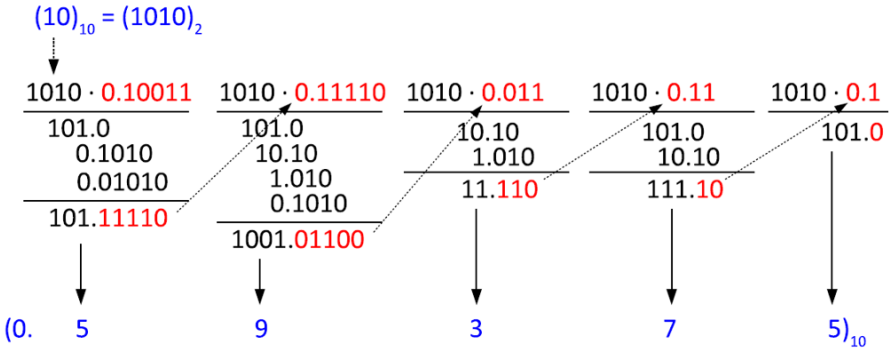


Quelle: [PRAU15]

Man kann auch im Quellsystem rechnen, wenn dieses nicht das Dezimalsystem ist. Beispiel: Umrechnung von Binär ($b = 2$) nach Dezimal ($B = 10$) im Quellsystem:

- Multipliziere den Wert wiederholt mit der Basis des Zielsystems ($B = 10$)
- Vorkommastellen sind wieder die Ziffern; mit den Nachkommastellen wird so lange weiter gerechnet, bis sie 0 werden
- Hier zu beachten: Das Multiplizieren mit 10 erfolgt im Binärsystem!

Abbildung 9.4: Rechnen im Quellsystem



Quelle: [PRAU15]

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Allgemein: Umrechnen von *b*-adisch nach *B*-adisch:

Um $z = (0.z_1z_2z_3z_4)_b$ in die gewünschte Darstellung $z = \sum_{i=1}^{\infty} Z_i \cdot \left(\frac{1}{B}\right)^i = (0.Z_1Z_2Z_3\ldots)_B$ umzurechnen, multiplizieren wir erst mit B, finden links vom Komma die erste der gesuchten Ziffern, lassen diese weg, multiplizieren erneut mit B, finden die zweite Ziffer, und so weiter. Für diese Rechnung muss B natürlich im b-adischen System dargestellt werden.

Notation:

- $[\ a\ ]$ ist der ganzzahlige Anteil von a, also der Wert vor dem Komma;
- $\{\ a\ \}$ ist der gebrochene Anteil von a.

Es gilt somit: $a = [\ a\ ] + \{\ a\ \}$.

Formal lässt sich dann das Vorgehen so darstellen:

$$Z_i = \left[\underbrace{\Big\{ \ldots \{ z \cdot B \} \cdot B \Big\} \ldots \Big\}}_{i-1} \cdot B \right] \tag{9.10}$$

Die Ziffer Z_i erhält man durch i-maliges Multiplizieren mit der Zielbasis, wobei man (bis auf das letzte Mal) stets die Vorkommastellen streicht und beim letzten Mal die Vorkommastellen als Ziffer behält.

Beispiel 9.9:

Abbildung 9.5: Beispiel

b=10, B=2; $z = 1/5 = (0.200)_{10}$. Finde $z = (0.\ Z_1\ Z_2\ Z_3\ \ldots)_2$

$Z_1 = [\ z \cdot 2] = [\ 0{,}4\ ] = 0$

$Z_2 = [\ \{\ 0{,}4\ \} \cdot 2] = [\ 0{,}8\ ] = 0$

$Z_3 = [\ \{\ 0{,}8\ \} \cdot 2] = [\ 1{,}6\ ] = 1$

$Z_4 = [\ \{\ 1{,}6\ \} \cdot 2] = [\ 0{,}6 \cdot 2\ ] = [\ 1{,}2\ ] = 1$

$Z_5 = [\ \{\ 1{,}2\ \} \cdot 2] = [\ 0{,}4\ ] = 0$ gab es schon einmal!

Quelle: [PRAU15]

Ergebnis: Im Binärsystem wird der abbrechende Dezimalbruch 0,2 zu einem periodischen Binärbruch: $(0.\overline{0011})_2$!

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beispiel 9.10: Umrechnung im Quellsystem

Abbildung 9.6: Weiteres Beispiel

$z = (0.85)_{10} = (0.Z_1Z_2Z_3...)_3$

$Z_1 = [0.85 \cdot 3] = [2.55] = 2$

$Z_2 = [0.55 \cdot 3] = [1.65] = 1$

$Z_3 = [0.65 \cdot 3] = [1.95] = 1$

$Z_4 = [0.95 \cdot 3] = [2.85] = 2$

$Z_5 = [0.85 \cdot 3] = [2.55] = 2$ $\qquad z = (0.\overline{2112})_3$

Quelle: [PRAU15]

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

9.5.2 Genauigkeit der Darstellung

Wird (wie im Computer) nur mit einer festen Anzahl von Stellen gerechnet, so kann bei der Umrechnung von Darstellungen Genauigkeit verloren gehen.

Beispiel 9.11: $z = \frac{1}{5}$

- $z = (0.2)_{10}$ abbrechender Dezimalbruch
- $z = (0.\overline{0011})_2$ periodisch, nicht abbrechend

Näherungen durch Abschneiden der Periode:

- $z^{(4)} = (0.0011)_2 = \frac{3}{16} = 0,1875$
- $z^{(8)} = (0.00110011)_2 = \frac{51}{256} = 0,19921875$



Hinweis 9.1: Folgerung:

Alle Brüche $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ etc. im 10er-System sind im Binärsystem nicht durch eine abbrechende Entwicklung darstellbar. Z. B. $(0.1)_{10} = (0.0\overline{0011})_2$.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Muss man aber sehr exakt mit Zehntel und Hundertstel etc. rechnen (wie z. B. im Bankwesen), gibt es folgende Alternativen:

- Alternative 1: Man spendiert so viele Stellen hinter dem Komma, dass bei allen denkbaren Rechenoperationen (mit allen denkbaren Zahlen) nach dem Runden der exakte erwartete Betrag resultiert.
- Alternative 2: Man stellt Werte im 10er-System dar und stellt Algorithmen zur Verfügung, um ziffernweise im 10er-System zu rechnen. Beispiel **BCD-Darstellung** (Binär-codierte Dezimalzahl):
  Man stellt jede Dezimalziffer einzeln binär dar:
  0: 0000
  1: 0001
  ...
  9: 1001
  z. B.: 1845 wird in BCD dargestellt als 0001 1000 0100 0101
  Man stellt die 4-Bit-Kombination zu den Ziffern hintereinander dar, d. h. man erhält pro Byte 2 Ziffern. Zum Rechnen benötigen wir dann ziffernweise arbeitende Verfahren.
- Alternative 3: Man bestimmt die kleinste darzustellende Einheit und verschiebt das Komma solange nach rechts, bis man wieder nur noch mit ganzen Zahlen rechnet. Beispielsweise könnte man statt in Euro auch in Cent rechnen und erhält dadurch ganze Zahlen. Die Darstellung ist damit exakt.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

9.5.3 Festkomma-Darstellung (2-adisch)

- Eine feste Anzahl von Bits steht für Vor- und Nachkommastellen zur Verfügung, unabhängig vom Wert.
- Das Vorzeichen wird in den Vorkommastellen dargestellt (Einer- oder Zweierkomplement).
- Die Nachkommastellen sind eine vorzeichenlose ganze Zahl.
- Arithmetik: Getrennte Behandlung von Vor- und Nachkommastellen.

Beispiel 9.12:

Von 16 zur Verfügung stehenden Bits werden 12 für die Vorkomma- und 4 für die Nachkommastellen verwendet.

Dann würde z. B. $(1110.001011)_2$ gespeichert als 0000 0000 1110 0010.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

9.5.4 Gleitkomma-Darstellung

Definition 9.3: Gleitkomma-Darstellung

Eine Darstellung der Form $z = m \cdot B^e$ mit Mantisse m, Exponent e und Exponentbasis B (fest gewählt) nennt man **Gleitkommadarstellung** von z.

Mantisse: Gebrochener Anteil.

- Die Anzahl der Stellen der Mantisse bestimmt die **Genauigkeit** der Zahlendarstellung.
- Das Vorzeichen der Mantisse m ist das Vorzeichen der Zahl z.

Exponent: Positive oder negative Ganzzahl

- Frei wählbar
- Die Anzahl der Stellen des Exponenten bestimmt den **Bereich** der darstellbaren Zahlen.

Beispiel: Dezimalsystem (Ziffern 0, 1, ..., 9), Basis 10

- Vorzeichen der Mantisse: + oder –
- Mantisse m mit 3 Nachkommastellen: Wertebereich $m = 0$ oder $0,001 \leq |m| < 1$
- Exponent e mit zwei Stellen und Vorzeichen: Wertebereich $-99 \leq e \leq +99$
  z. B.

$$\begin{array}{rcll} -25,2 & = & -0,252 \cdot 100 & = & -0,252 & \cdot 10^{+2} \\ 1,5 & = & 0.15 \cdot 10 & = & +0,150 & \cdot 10^{+1} \\ 0,00625 & = & 0.625 \cdot 0,01 & = & +0,625 & \cdot 10^{-2} \\ 0 & = & 0 \cdot 1 & = & +0,000 & \cdot 10^{0} \end{array}$$

- Dem Betrag nach größte Zahlen:
  $-0.999 \cdot 10^{+99}$ $+0.999 \cdot 10^{+99}$
- Dem Betrag nach kleinste Zahlen verschieden von Null:
  $-0.001 \cdot 10^{-99}$ $+0.001 \cdot 10^{-99}$

Weiteres Beispiel: $b = 2$, $B = 2$, Mantisse 4 Nachkommastellen + Vorzeichen, Exponent 3 Stellen + Vorzeichen; Mantisse und Exponent in Vorzeichen-Betrag-Darstellung

- $m = 0.1000,\ e = 101 \rightarrow z = 0,5 \cdot 2^5 = 16$
- $m = -0.1111,\ e = -100 \rightarrow z = -0.9375 \cdot 2^{-4} = -0,05859375$
- Die größte Zahl: $m = 0.1111,\ e = 111 \rightarrow z = 0,9375 \cdot 2^7 = 120$
- Die kleinste Zahl größer 0: $m = 0.0001,\ e = -111 \rightarrow z = 0,125 \cdot 2^{-7} = 0,00048828125$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Bemerkung zur Verschiebung des Kommas:

Ist $B = b^k$ und wird der Exponent um 1 kleiner, verschiebt sich das Komma um k nach rechts.

Beispiele:

- $b = 2,\ B = 8$, d. h. $B = b^3$: $0.000001011 \cdot 8^3 = 0.001011 \cdot 8^2 = 1.011 \cdot 8^1$
- $b = 10,\ B = 100$, d. h. $B = b^2$: $0.002016 \cdot 100^{-4} = 0.2016 \cdot 100^{-5} = 20.16 \cdot 100^{-6}$

→ Es gibt mehrere Darstellungen für denselben Wert.
Die Mantisse soll möglichst groß sein, damit wir möglichst viele Stellen darstellen können. Z. B. verschwendet die 0,002016 gegenüber der 0,2016 zwei Stellen (für die ‚00).

Unterschiede Gleitkomma- / reelle Zahlen

Der **Abstand** zweier aufeinander folgender Gleitkommazahlen ist nicht gleich:

- Niedrige Dichte für Zahlen mit sehr hohem Betrag
- Hohe Dichte für Zahlen mit sehr niedrigem Betrag

Tabelle 9.1: Wertebereich

Wertebereich	Abstände zwischen Zahlen
$0.001 \cdot 10^{-99} \ldots 0.999 \cdot 10^{-99}$	10^{-102}
$0.001 \cdot 10^{-98} \ldots 0.999 \cdot 10^{-98}$	10^{-101}
$0.001 \cdot 10^{0} \ldots 0.999 \cdot 10^{0}$	10^{-3}
$0.001 \cdot 10^{+3} \ldots 0.999 \cdot 10^{+3}$	1
$0.001 \cdot 10^{+99} \ldots 0.999 \cdot 10^{+99}$	10^{+96}

Quelle: Eigene Darstellung

Genauigkeit und Eindeutigkeit

- Die Rechnerarithmetik approximiert Arithmetik reeller Zahlen; das Ergebnis ist dann dem Betrag nach „nächste“ darstellbare Gleitkommazahl.
- Bei Rechnungen mit sehr hohen Beträgen: **Rundungsfehler**.
  Beispiel: $\mathit{Gleitkomma}(-0.999 \cdot 10^{+99} + 1) = \mathit{Gleitkomma}(-0.999 \cdot 10^{+99})$
- Die Gleitkommadarstellung ist ohne weitere Angaben nicht eindeutig. Beispiele:
  $3.140000 \quad = 0.314 \cdot 10^{1} \quad = 3.14 \cdot 10^{0}$
  $0.000001 \quad = 0.1 \cdot 10^{-5} \quad = 1.0 \cdot 10^{-6}$
  $1941.000000 \quad = 0.1941 \cdot 10^{4} \quad = 1.941 \cdot 10^{3}$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

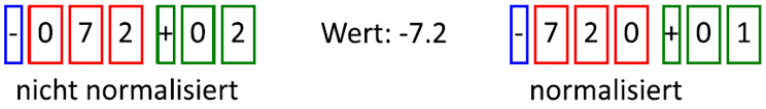
Normalisierte Gleitkommadarstellung

Definition 9.4: Normalisierte Gleitkommadarstellung

Eine Darstellung $z = m \cdot B^e$ heißt **normalisiert**, wenn gilt: $\frac{1}{B} \leq m < 1$.

- Anschaulich bedeutet das: Ist die linkeste Ziffernstelle der Mantisse ungleich null, so ist die Gleitkommadarstellung normalisiert (Voraussetzung: $B = b$).
  - Eindeutige Darstellung
  - Bei Darstellung und Arithmetik keine Genauigkeit verschenkt
- Wertebereich der Mantisse bei Normalisierung: Z. B. bei $B = 10$: $0,1 \leq |m < 1|$

Abbildung 9.7: Normalisierung



Quelle: [PRAU15]

Satz 9.2:

Sei $z = m \cdot B^e$ mit $m < 1$.
Die Exponentenbasis B sei eine Potenz der Basis b des Zahlensystems.

Dann gilt:

Die Darstellung ist genau dann **normalisiert**, wenn das Komma nicht weiter nach rechts verschoben werden kann, ohne die Bedingung für m zu verletzen.

Satz 9.3:

Folgerung: Ist die Exponentenbasis B gleich der Basis b des Zahlensystems, so ist eine Darstellung $z = m \cdot B^e$ mit $m < 1$ $(m \neq 0)$ genau dann normalisiert, wenn die erste Stelle von m nach dem Komma ungleich 0 ist.

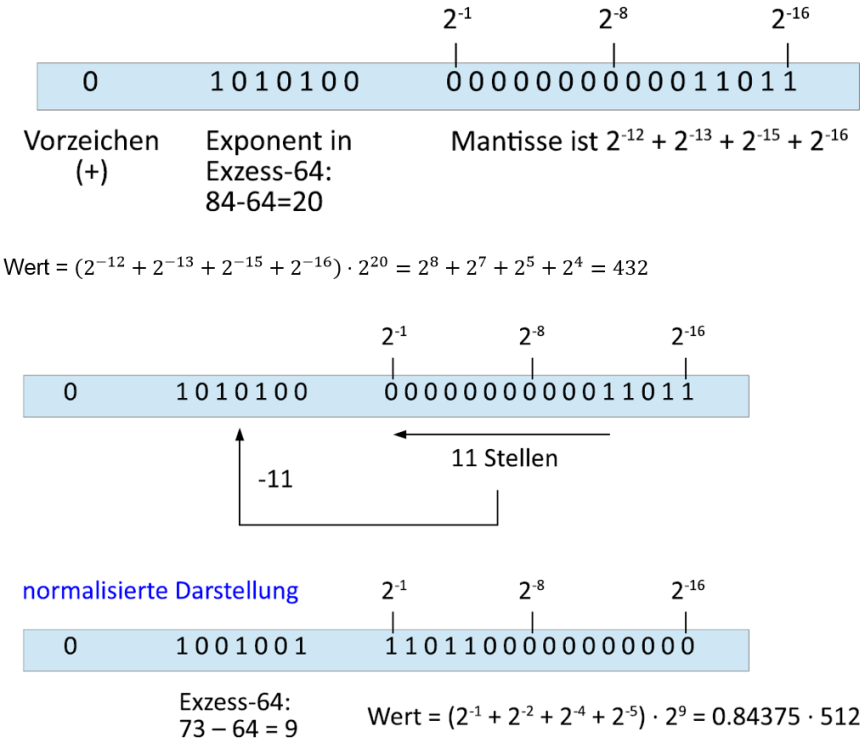
Satz 9.4:

Normalisierte Darstellungen sind **eindeutig**.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Abbildung 9.8: Normalisierung von Gleitkommadarstellungen



Quelle: [PRAU15]

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

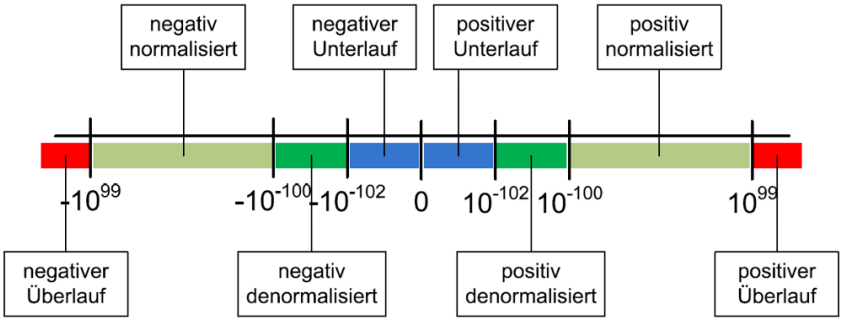
Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Bereiche der Fließkommadarstellung

Z. B.: $b = 10, B = 10$, Mantisse 3 Nachkommazahlen, Exponent 2 Stellen (beides jeweils in Vorzeichen / Betrag-Darstellung):

- Größte positive Zahl: $0,999 \cdot 10^{99}$
- Kleinste positive normalisierte Zahl: $0,1 \cdot 10^{-99} = 10^{-100}$
- Kleinste positive nicht-normalisierte Zahl: $0,001 \cdot 10^{-99} = 10^{-102}$

Abbildung 9.9: Bereiche



Quelle: [PRAU15]

Nicht-darstellbare reelle Zahlen:

- Zahlen aus den Unterlauf- oder Überlaufbereichen, z. B. $10^{-60} \cdot 10^{-60}$, $10^{99} \cdot 100$
- Zahlen aus anderen Bereichen, z. B. $1,00001$, $\frac{1}{3}$, π

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

10 Der Gleichungskalkül: Termumformungen

10.1 Terme

Definition 10.1: Term

In der Mathematik bezeichnet der Begriff ***Term*** einen sinnvollen Ausdruck, der Zahlen, Variablen, Symbole für mathematische Verknüpfungen und Klammern enthalten kann.

Terme sind die syntaktisch korrekt gebildeten Wörter oder Wortgruppen in der formalen Sprache der Mathematik.

In der Praxis wird der Begriff häufig benutzt, um über einzelne Bestandteile einer Formel oder eines größeren Terms zu reden. So kann man bspw. für die lineare Funktion $f(x) = m \cdot x + b$ von einem **linearen Term** $m \cdot x$ und einem **konstanten Term** b reden.

Die genaue mathematische Definition eines Terms, wie sie in der mathematischen Logik gegeben wird, benennt Regeln, nach denen Terme aufgebaut werden. Ein Term ist dann jeder Ausdruck, der durch Anwendung solcher Regeln entsteht:

Regel 10.1: Terme

- Jede Variable ist ein Term.
- Jedes Konstantensymbol ist ein Term.
- Sind $t_1, t_2, \ldots, t_n$ Terme und ist f ein n-stelliges Funktionssymbol, so ist $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ ein Term.

Beispiel 10.1: Term

$\frac{x \cdot y}{4}$ ist ein Term, denn

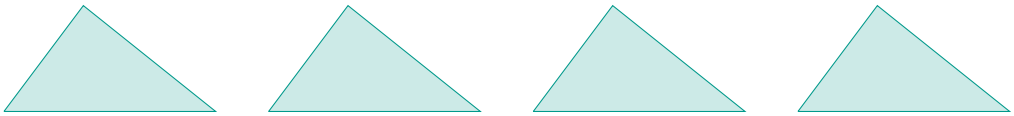
- x und y sind Terme (als Variablen),
- 4 ist ein Term (als Konstante),
- $x \cdot y$ ist ein Term (eigentlich „multipliziere(x,y)“),
- $\frac{x \cdot y}{4}$ ist ein Term (Divisionssymbol ist der Bruchstrich, eigentlich „dividiere (multipliziere (x,y),4)“)

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

10.1.1 Addition von Termen

Abbildung 10.1: Addition



Dreieck + Dreieck + Dreieck + Dreieck = 4 Dreiecke

Quelle: Eigene Darstellung, nach Wikipedia

Ersetzen wir nun das Wort „Dreieck“ durch die Variable „d“: $d + d + d + d = 4 \cdot d$

Abbildung 10.2: Addieren mit verschiedene Summanden



Dreieck + Rechteck + Dreieck + Dreieck + Rechteck = 3 Dreiecke + 2 Rechtecke

Quelle: Eigene Darstellung, nach Wikipedia

Ersetzen wir nun das Wort „Dreieck“ durch die Variable „d“ und das Wort „Rechteck“ durch die Variable „r“: $d + r + d + d + r = 3 \cdot d + 2 \cdot r$



Hinweis 10.1: Addieren von Termen

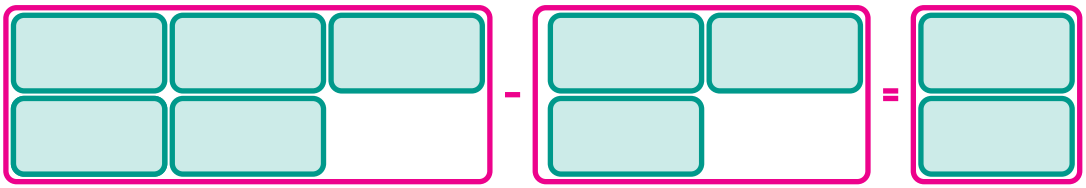
Beim Addieren von Termen dürfen nur Summanden mit gleichen Variablen addiert werden.
z. B. $3 \cdot x + 4 \cdot y + 2 \cdot x + 5 \cdot y + x = 6 \cdot x + 9 \cdot y$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

10.1.2 Subtraktion von Termen

Abbildung 10.3: Subtraktion



5 Rechtecke - 3 Rechtecke = 2 Rechtecke

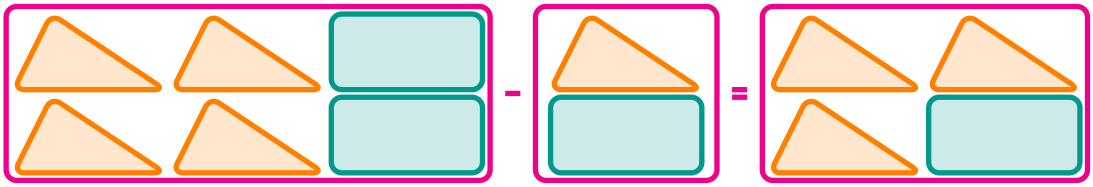
Quelle: Eigene Darstellung, nach Wikipedia

Ersetzen wir nun das Wort „Rechteck“ durch die Variable „r“:

$$5 \cdot r - 3 \cdot r = 2 \cdot r \tag{10.1}$$

Subtrahieren, wenn verschiedene Variable auftreten:

Abbildung 10.4: Subtraktion mit verschiedenen Variablen



4 Dreiecke + 2 Rechtecke - 1 Dreieck - 1 Rechteck = 3 Dreiecke + 1 Rechteck

Quelle: Eigene Darstellung, nach Wikipedia

Nehmen wir von den 4 Dreiecken 1 weg, so bleiben 3 Dreiecke übrig. Zieht man von den 2 Rechtecken 1 Rechteck ab, so bleibt 1 Rechteck übrig.

Ersetzen wir nun das Wort „Rechteck“ durch die Variable „r“ und das Wort „Dreieck“ durch die Variable „d“:

$$4 \cdot d + 2 \cdot r - 1 \cdot d - 1 \cdot r = 3 \cdot d + 1 \cdot r \tag{10.2}$$



Hinweis 10.2: Subtrahieren von Termen

Beim Subtrahieren von Termen dürfen nur Ausdrücke mit gleichen Variablen subtrahiert werden.
z. B. $12 \cdot x + 8 \cdot y - 2 \cdot x - 6 \cdot y = 10 \cdot x + 2 \cdot y$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

10.1.3 Multiplikation von Termen

$$7 \cdot y \cdot 5 \cdot z \cdot 2 \cdot x = ? \tag{10.3}$$

Bei einer Multiplikation gilt das Vertauschungsgesetz (Kommutativgesetz). Die einzelnen Faktoren der Multiplikation dürfen beliebig vertauscht werden. Üblicherweise ordnet man zuerst die Zahlen und dann die Variablen alphabetisch an:

$$7 \cdot y \cdot 5 \cdot z \cdot 2 \cdot x = 7 \cdot 5 \cdot 2 \cdot x \cdot y \cdot z \tag{10.4}$$
$$= 70 \cdot x \cdot y \cdot z \tag{10.5}$$



Hinweis 10.3: Multiplizieren von Termen

Die Zahlen werden miteinander multipliziert, die Variablen meist alphabetisch angeordnet. Z. B.:

$$5 \cdot f \cdot 6 \cdot e = 30 \cdot e \cdot f \tag{10.6}$$

10.1.4 Division von Termen

$$(63 \cdot a \cdot b \cdot c) : (7 \cdot a \cdot c) = \frac{63 \cdot a \cdot b \cdot c}{7 \cdot a \cdot c} = \frac{63}{7} \cdot \frac{a}{a} \cdot \frac{b}{1} \cdot \frac{c}{c} = 9 \cdot b \tag{10.7}$$



Hinweis 10.4: Dividieren von Termen

Die Zahlen werden zuerst dividiert; Variablen, die sowohl im Zähler als auch im Nenner vorkommen, werden weggestrichen. Z. B.:

$$(45 \cdot e \cdot f) : (5 \cdot e) = \frac{45 \cdot e \cdot f}{5 \cdot e} = 9 \cdot f \tag{10.8}$$

Übungsaufgaben finden Sie z. B. unter:
https://www.aufgabenfuchs.de/mathematik/gleichung/terme-vereinfachen.shtml, zuletzt geprüft am 2025-08-10.
http://www.mathe-trainer.de/Klasse8/Termumformungen/Aufgabensammlung.htm, zuletzt geprüft am 2025-08-10.
https://www.mathepower.com/testterme.php, zuletzt geprüft am 2025-08-10.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

10.2 Algebraische Umformungen

Lange, komplizierte Terme können oft vereinfacht werden, indem man auf sie Rechenregeln anwendet, die den Wert des Terms unverändert lassen, beispielsweise das Kommutativgesetz, Assoziativgesetz oder Distributivgesetz:

$$(x+y)\cdot(x-y) \qquad \text{Ausmultiplizieren} \tag{10.9}$$
$$= x^2 - x\cdot y + y\cdot x - y^2 \qquad \text{Kommutativgesetz} \tag{10.10}$$
$$= x^2 - y^2 \tag{10.11}$$

Solche algebraischen Umformungen werden **Termumformungen** genannt, da man nach in der vereinbarten Grundmenge geltenden Regeln von einem Term zu einem anderen übergeht, ohne dessen mögliche Werte zu ändern. Es werden damit folgende Ziele verfolgt:

- Vereinfachung von Termen;
- „Aufpumpen“ von Termen zur Erzeugung gewünschter Strukturen (wie zum Beispiel bei der quadratischen Ergänzung);
- „Herauspräparieren“ gewünschter Teilterme wie zum Beispiel bei der Cardanischen[10.1] Formel: $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3\cdot u\cdot v\cdot(u+v)$.

10.2.1 Ausdrücke

Ein Ausdruck ist wie ein Term eine formale Zeichenkette; ihr Aufbau ist gemäß einer Logik definiert. Mit Gleichheit definiert man:

- Sind t_1 und t_2 Terme, so ist $t_1 = t_2$ ein Ausdruck.
- Sind $t_1, t_2, \ldots, t_n$ Terme und ist R ein n-stelliges Relationssymbol, so ist $R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ ein Ausdruck.
- Sind φ und ψ Ausdrücke, so sind auch $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \to \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi), (\exists x \varphi)$ und $(\forall x \varphi)$ Ausdrücke.

Damit kann man durch mehrfache Anwendung dieser Bildungsgesetzte beliebig komplizierte Ausdrücke aufbauen. Nach dieser Definition kann man Terme grob als das beschreiben, was auf einer Seite einer Gleichung stehen oder in eine Relation eingesetzt werden kann, Terme sind genau diese Bestandteile von Ausdrücken.

Die genaue Definition des Ausdrucks hängt von der betrachteten Logik ab; in der Prädikatenlogik zweiter Stufe nimmt man beispielsweise noch das Einsetzen von Termen in Relationsvariablen und Quantifizierungen über Relationen hinzu.

[10.1] Gerolamo Cardano (auch Geronimo oder Girolamo, lateinisch Hieronymus Cardanus; * 24. September 1501 in Pavia; † 21. September 1576 in Rom) war ein italienischer Arzt, Philosoph und Mathematiker. Er zählt zu den Renaissance-Humanisten.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

10.2.2 Allgemeine Definition

In der Mathematik bezeichnet eine Äquivalenzumformung[10.2] eine Umformung einer Gleichung bzw. Ungleichung, die den Wahrheitswert unverändert lässt (logische Äquivalenz). Die umgeformte logische Aussage ist also für dieselbe Variablenbelegung wahr wie die ursprüngliche Aussage. Äquivalenzumformungen können durch Anwendung der inversen Operation wieder ohne Probleme rückgängig gemacht werden. Äquivalenzumformungen sind die wichtigste Methode zum Lösen von Gleichungen und Ungleichungen.

Die Gleichung bleibt immer noch korrekt, wenn man auf beide Seitenterme gleichzeitig Dasselbe anwendet:

- Mit Demselben addieren
- Mit oder von Demselben subtrahieren
- Mit Demselben multiplizieren (mit Ausnahme der 0)
- Durch Dasselbe dividieren (mit Ausnahme der 0)
- Von Demselben dividieren (mit Ausnahme der 0)
- Höhere Funktionen, z. B. Integrieren oder Differenzieren

Beispiel 10.2:

Eine Äquivalenzumformung ist beispielsweise die Addition, Subtraktion und bedingt Multiplikation oder Division eines Terms auf beiden Seiten.
$x + 5(-5) = 7(-5)$
$x = 2$

Formal schreibt man das:

$$\begin{aligned} & x + 5 = 7 && || - 5 \\ \Leftrightarrow\ & x + 5 - 5 = 7 - 5 \\ \Leftrightarrow\ & x = 2 \end{aligned} \tag{10.12}$$

und liest das || als: „Ich subtrahiere 5 von beiden Seitentermen“.

Die Multiplikation oder Division eines beliebigen Terms auf beiden Seitentermen ist ebenfalls eine Äquivalenzumformung, solange dieser Term ungleich 0 ist.

Zu beachten ist, dass die Multiplikation mit Null oder Division durch Null oft versteckt auftritt; so ist beispielsweise die Multiplikation mit $x - 1$ im Allgemeinen keine Äquivalenzumformung, da dieser Multiplikator im Falle $x = 1$ eben Null sein kann.

Allerdings kann man durch eine Fallunterscheidung sicherstellen, dass eine Multiplikation oder Division mit Null nicht stattfindet: Fälle, in denen ein Multiplikator oder Divisor Null ist, sind

[10.2] (lat. aequus = gleich; valere = wert sein)

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

gesondert zu untersuchen; ansonsten sind die umgeformten Aussagen nur unter einer entsprechenden Zusatzvoraussetzung (also nicht allgemein) zueinander äquivalent.

Beispiel 10.3: Notwendige Fallunterscheidungen

$$x^2 - 4 \cdot x = 0 \tag{10.13a}$$

Wenn man nun – ohne $x \neq 0$ vorauszusetzen – „blauäugig“ durch x dividiert, „verliert“ man eine Lösung:

$$x^2 - 4 \cdot x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4 \cdot x \quad \not\Leftrightarrow \quad x = 4 \tag{10.13b}$$

Korrekt hingegen wäre:

$$x^2 - 4 \cdot x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (x-4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x = 4 \tag{10.13c}$$

Ebenfalls keine Äquivalenzumformung ist im Allgemeinen das Quadrieren; so hat beispielsweise die Gleichung $x = 2$ eine reelle Lösung, die quadrierte Gleichung $x^2 = 4$ hingegen zwei reelle Lösungen (nämlich +2 und -2) (Es sei aber angemerkt: Durch einschränkende Bedingungen an x kann man auch das Quadrieren zu einer Äquivalenzumformung machen. Setzt man bspw. $x \leq 0$ voraus, so sind die Gleichungen $x^2 = 4$ und $x = -2$ gleichwertig!).

10.2.3 Formvariablen - Parameter

Als **Parameter**[10.3] (oder **Formvariable**) wird in der Mathematik eine Variable bezeichnet, die gemeinsam mit anderen Variablen auftritt, aber von anderer Qualität ist. Man spricht auch davon, dass ein Parameter beliebig, aber *fest* ist. Er unterscheidet sich damit von einer Konstanten dadurch, dass der Parameter nur für einen gerade betrachteten Fall konstant ist, für den nächsten Fall aber variiert werden kann.

Beispiel 10.4: Beispiel aus der Physik

Geschwindigkeit = Beschleunigung mal Zeit, also: $v = a \cdot t$
Nun haben Sie z. B. die Aufgabe, eine Tabelle zu erstellen. Und zwar für die Geschwindigkeit in den ersten 3 Sekunden für einen Radfahrer, einen 100-m-Sprinter und einen Formel-Eins-Rennwagen.

Diese Drei haben unterschiedliche Parameter für ihre Beschleunigung a:

Der Radfahrer hat den Parameter $a = 1\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, der Sprinter hat den Parameter $a = 3\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ und der Rennwagen etwa $a = 6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Diesen Parameter hält man nun fest und lässt die Zeit als freie Variable laufen, um die abhängige Variable v (Geschwindigkeit) zu berechnen.

[10.3] (griechisch para, deutsch „neben“ und metron „Maß“)

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

10.2.4 Klammerregeln

Die **Klammerregeln** beschreiben in der Arithmetik und der elementaren Algebra Vorschriften zum Auflösen von Klammern in reinen Summen und Differenzen, also Ausdrücken, in denen nur plus und minus vorkommen. Umgangssprachlich werden als Klammerregeln auch andere Regeln bezeichnet, die den Umgang mit Klammern in mathematischen Ausdrücken beschreiben, wie es das Distributivgesetz zulässt.

Für das Auflösen von Klammern in Summen und Differenzen gilt:

Steht ein Pluszeichen vor der Klammer, so kann man die Klammer einfach weglassen (Assoziativgesetz).

$$a + (b + c) = a + b + c \tag{10.14a}$$
$$a + (b - c) = a + b - c \tag{10.14b}$$

Steht ein Minuszeichen vor der Klammer, so werden die Vor- und Rechenzeichen innerhalb der Klammer umgekehrt.

$$a - (b + c) = a - b - c \tag{10.15a}$$
$$a - (-b + c) = a + b - c \tag{10.15b}$$
$$a - (b - c) = a - b + c \tag{10.15c}$$

Treten Klammern in mathematischen Ausdrücken auf, werden immer die Operationen innerhalb der Klammern vor denjenigen außerhalb der Klammern ausgeführt.

$$(2 + 5) \cdot 3 = 7 \cdot 3 \quad = 21 \qquad \text{erst Klammer} \tag{10.16a}$$
$$2 + 5 \cdot 3 = 2 + 15 = 17 \qquad \text{Punkt vor Strich} \tag{10.16b}$$

oder

$$(2 \cdot 3)^2 = 6^2 \quad = 36 \tag{10.16c}$$
$$2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18 \tag{10.16d}$$

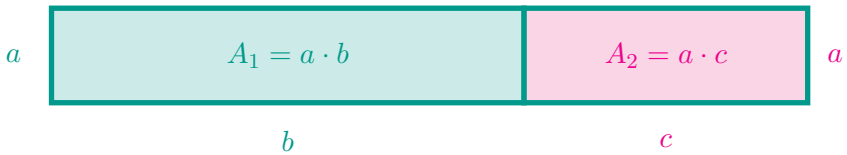
© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

10.2.5 Multiplizieren von Summen

$a \cdot (b + c) = ?$

Abbildung 10.5: Geometrische Herleitung der Formel



Quelle: Eigene Darstellung, nach Wikipedia

Wir berechnen den Flächeninhalt dieser Figur auf 2 verschiedenen Arten:

Möglichkeit 1:

Wir berechnen den Flächeninhalt der gesamten Figur auf einmal:
$A =$ Länge mal Breite
$A = a \cdot (b + c)$

Möglichkeit 2:

Wir berechnen die Flächeninhalte der beiden unterteilten Flächen und addieren diese:
$A =$ Länge mal Breite
$A_1 = a \cdot b$
$A_2 = a \cdot c$
$A = A_1 + A_2$
$A = a \cdot b + a \cdot c$

Beide Berechnungen führen zum selben Ergebnis, deshalb kann man die beiden Ergebnisse gleichsetzen:

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Regel 10.2: Multiplikation von Summen, wenn ein Faktor eingliedrig ist

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \tag{10.17}$$

Beispiel 10.5:

$$3 \cdot (x + 4 \cdot y) = 3 \cdot x + 3 \cdot 4 \cdot y = 3 \cdot x + 12 \cdot y \tag{10.18}$$

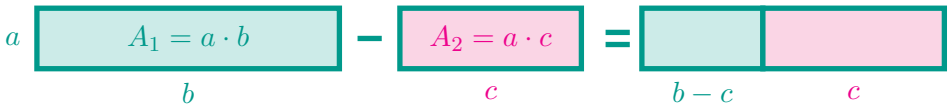
© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

10.2.6 Multiplizieren von Differenzen

Abbildung 10.6: Geometrische Herleitung der Formel

$a \cdot (b - c) = ?$



Quelle: Eigene Darstellung, nach Wikipedia

Wir wollen die Fläche des kleineren Rechtecks von der Fläche des größeren Rechtecks abziehen:

Möglichkeit 1:

Wir berechnen zuerst den Flächeninhalt der des größeren Rechtecks, dann des kleineren Rechtecks und subtrahieren die beiden Ergebnisse:
A = Länge mal Breite
$A_1 = a \cdot b$
$A_2 = a \cdot c$
$A = A_1 - A_2$
$A = a \cdot b - a \cdot c$

Möglichkeit 2:

Wir legen die beiden Flächen übereinander und versuchen nun den Flächeninhalt der übriggebliebenen Fläche zu berechnen:
A = Länge mal Breite
$A = a \cdot (b - c)$

Beide Berechnungen führen zum selben Ergebnis, deshalb kann man die beiden Ergebnisse gleichsetzen.

$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

Regel 10.3: Multiplikation von Differenzen, wenn ein Faktor eingliedrig ist

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c \tag{10.19}$$

Beispiel 10.6:

$$5 \cdot (2 \cdot m - 8) = 5 \cdot 2 \cdot m - 5 \cdot 8 = 10 \cdot m - 40 \tag{10.20}$$

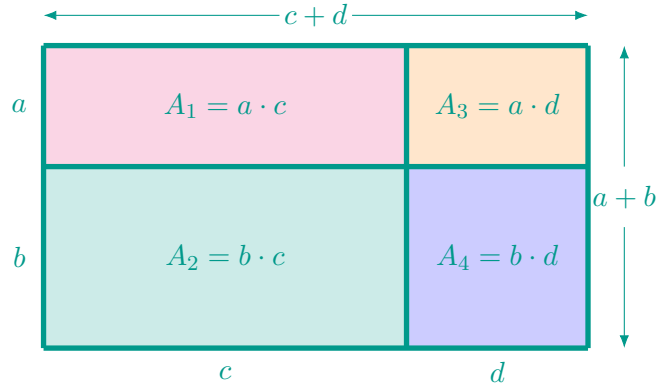
© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

10.2.7 Multiplizieren von Summen und Differenzen (zweigliedrige Ausdrücke)

$(a+b)\cdot(c+d) = ?$

Abbildung 10.7: Geometrische Herleitung der Formel



Quelle: Eigene Darstellung, nach Wikipedia

Wir berechnen den Flächeninhalt dieser Figur auf 2 verschiedenen Arten:

Möglichkeit 1:

Wir berechnen den Flächeninhalt der gesamten Figur auf einmal:
$A =$ Länge mal Breite
$A = (a+b)\cdot(c+d)$

Möglichkeit 2:
Wir berechnen die Flächeninhalte der beiden unterteilten Flächen und addieren diese:
$A =$ Länge mal Breite
$A_1 = a \cdot c$
$A_2 = b \cdot c$
$A_3 = a \cdot d$
$A_4 = b \cdot d$
$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$
$A = a\cdot c + b\cdot c + a\cdot d + b\cdot d$

Beide Berechnungen führen zum selben Ergebnis, deshalb kann man die beiden Ergebnisse gleichsetzen:

$$(a+b)\cdot(c+d) = a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d$$

Regel 10.4: Multiplikation von Summen, wenn ein Faktor ein zweigliedriger Ausdrück ist

$$(a+b)\cdot(c+d) = a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d \tag{10.21}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beispiel 10.7:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (e + 2 \cdot f) \cdot (4 \cdot g + 5) &= 3 \cdot e \cdot 4 \cdot g + 3 \cdot e \cdot 5 + 2 \cdot f \cdot 4 \cdot g + 2 \cdot f \cdot 5 \\ &= 12 \cdot e \cdot g + 15 \cdot e + 8 \cdot f \cdot g + 10 \cdot f \end{aligned} \tag{10.22}$$

Regel 10.5: Multiplikation von Summen und Differenzen, wenn beide Faktoren zweigliedrige Ausdrücke sind

$$(a + b) \cdot (c - d) = a \cdot c - a \cdot d + b \cdot c - b \cdot d \tag{10.23a}$$
$$(a - b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d - b \cdot c - b \cdot d \tag{10.23b}$$
$$(a - b) \cdot (c - d) = a \cdot c - a \cdot d - b \cdot c + b \cdot d \tag{10.23c}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

10.2.8 Multiplizieren von Termen

Term	Beispiele
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	$5 \cdot (8 \cdot y + 7)$ $= 5 \cdot 8 \cdot y + 5 \cdot 7$ $= 40 \cdot y + 35$
$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$	$f \cdot (12 \cdot e - 15)$ $= f \cdot 12 \cdot e - f \cdot 15$ $= 12 \cdot e \cdot f - 15 \cdot f$
$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$	$(3 \cdot x + 4) \cdot (2 \cdot y + 6)$ $= 3 \cdot x \cdot 2 \cdot y + 3 \cdot x \cdot 6 + 4 \cdot 2 \cdot y + 4 \cdot 6$ $= 6 \cdot x \cdot y + 18 \cdot x + 8 \cdot y + 24$
$(a - b) \cdot (c - d) = a \cdot c - a \cdot d - b \cdot c + b \cdot d$	$((x - 8) \cdot (2 \cdot x - y)$ $= x \cdot 2 \cdot x - x \cdot y - 8 \cdot 2 \cdot x + 8 \cdot y$ $= 2 \cdot x^2 - x \cdot y - 16 \cdot x + 8 \cdot y$
$(a + b) \cdot (c - d) = a \cdot c - a \cdot d + b \cdot c - b \cdot d$	$(3 \cdot s + 7) \cdot (t - 4 \cdot s)$ $= 3 \cdot s \cdot t - 3 \cdot s \cdot 4 \cdot s + 7 \cdot t - 7 \cdot 4 \cdot s$ $= 3 \cdot s \cdot t - 12 \cdot s^2 + 7 \cdot t - 28 \cdot s$
$(a - b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d - b \cdot c - b \cdot d$	$(5 \cdot g - h) \cdot (11 + 2 \cdot h)$ $= 5 \cdot g \cdot 11 + 5 \cdot g \cdot 2 \cdot h - h \cdot 11 - h \cdot 2 \cdot h$ $= 55 \cdot g + 10 \cdot g \cdot h - 11 \cdot h - 2 \cdot h^2$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

10.2.9 Faktorisieren – Herausheben gemeinsamer Faktoren

Umwandeln von Summen bzw. Differenzen, die gemeinsame Faktoren enthalten, in Produkte.

Im Kapitel „Multiplizieren von Summen und Differenzen“ haben wir das Distributivgesetz angewendet:

Regel 10.6: Distributivgesetz

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \tag{10.24}$$
$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c \tag{10.25}$$

Drehen wir diese Formel(n) nun um, können wir Summen bzw. Differenzen, die gemeinsame Faktoren enthalten, in Produkte umwandeln:

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c) \tag{10.26}$$
$$a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c) \tag{10.27}$$

Beispiel 10.8: Beispiel 1

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c) \tag{10.28}$$
$$36 \cdot 4 + 36 \cdot 6 = 36 \cdot (4 + 6) = 36 \cdot 10 = 360 \tag{10.29}$$

Beispiel 10.9: Beispiel 2

$$a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c) \tag{10.30}$$
$$17 \cdot 9 - 17 \cdot 5 = 17 \cdot (9 - 5) = 17 \cdot 4 = 68 \tag{10.31}$$

Übungen finden Sie unter:
http://www.mathe-trainer.de/Klasse8/Termumformungen/Aufgabensammlung.htm (zuletzt geprüft am 2025-08-10).

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

10.3 Binomische Formeln

Die binomischen Formeln sind in der elementaren Algebra verbreitete Formeln zum Umformen von Produkten aus Binomen.

Sie werden als Merkformeln verwendet, die zum einen das Ausmultiplizieren von Klammerausdrücken erleichtern, zum anderen erlauben sie die Faktorisierung von Termen, also die Umformung von bestimmten Summen und Differenzen in Produkte, was bei der Vereinfachung von Bruchtermen, beim Radizieren von Wurzeltermen, sowie Logarithmenausdrücken sehr oft die einzige Lösungsstrategie darstellt.

Im Grunde sind sie Spezialfälle des Distributivgesetzes für algebraische Summen (jedes Glied der einen wird mit jedem der anderen Summe multipliziert).

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

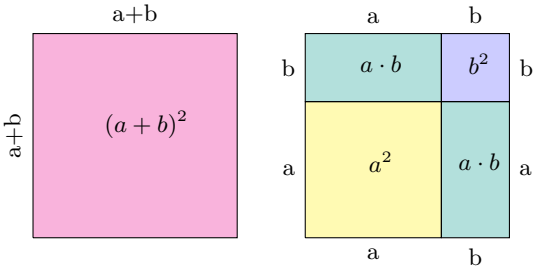
10.3.1 Die 1. Binomische Formel

Herleitung – 1. Möglichkeit

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)\cdot(a+b) && (10.32)\\
&= a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b && (10.33)\\
&= a^2 + a\cdot b + a\cdot b + b^2 && (10.34)\\
&= a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 && (10.35)
\end{aligned}
$$

Herleitung – 2. Möglichkeit

Abbildung 10.8:



Quelle: Eigene Darstellung, nach Wikipedia

Wir berechnen z. B. den Flächeninhalt eines Quadrates, dessen Seitenlänge sich aus den Abschnitten $a = 2{,}5\,\text{cm}$ und $b = 1{,}5\,\text{cm}$ zusammensetzt, auf 2 verschiedene Arten.

$$A_{\text{Quadrat}} = 4^2\,\text{cm}^2 \qquad (10.36)$$
$$A_{\text{Rechteck}} = l\cdot b \qquad (10.37)$$

A: Flächeninhalt des ganzen Quadrates

$$A = (a+b)^2 = (2,5+1,5)^2 = 4^2 = 16\,\text{cm}^2 \qquad (10.38)$$

B: Flächeninhalte der 4 unterteilten Rechtecke addieren

$$
\begin{aligned}
A = a^2 + b^2 + a\cdot b + a\cdot b &= 2,5^2 + 1,5^2 + 2,5\cdot 1,5 + 2,5\cdot 1,5 && (10.39)\\
&= 6,5 + 2,25 + 3,75 + 3,75 = 16\,\text{cm}^2 && (10.40)
\end{aligned}
$$

Regel 10.7: 1. Binomische Formel

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 \qquad (10.41)$$

Beispiel 10.10: 1. Binomische Formel

$$
\begin{aligned}
(4\cdot x + 6\cdot y)^2 &= 16\cdot x^2 + 2\cdot 4\cdot x\cdot 6\cdot y + 36\cdot y^2 && (10.42)\\
&= 16\cdot x^2 + 48\cdot x\cdot y + 36\cdot y^2 && (10.43)
\end{aligned}
$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

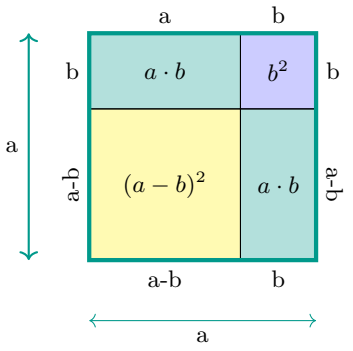
10.3.2 Die 2. Binomische Formel

Herleitung - 1. Möglichkeit

$$
\begin{aligned}
(a-b)^2 &= (a-b)\cdot(a-b) && (10.44)\\
&= a\cdot a - a\cdot b - b\cdot a + b\cdot b && \\
& && (10.45)\\
&= a^2 - a\cdot b - a\cdot b + b^2 && (10.46)\\
&= a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2 && (10.47)
\end{aligned}
$$

Herleitung - 2. Möglichkeit

Abbildung 10.9:



Quelle: Eigene Darstellung, nach Wikipedia

Wir berechnen den Flächeninhalt des gelben Quadrates auf 2 verschiedene Arten. Dazu nehmen wir folgende Seitenlängen an: $a = 4$ cm, $b = 1{,}5$ cm.

Möglichkeit 1:

Wir erhalten die Seitenlänge des gelben Quadrates, wenn wir von der Seitenlänge des großen Quadrates ($= a$) die Seitenlänge des Rechtecks ($= b$) abziehen.

$$A = (a-b)^2 = (4-1{,}5)^2 = 2{,}5^2 = 6{,}25\,\text{cm}^2 \qquad (10.48)$$

Möglichkeit 2: Wir ziehen von der großen Quadratsfläche ($= a^2$) die 2 Rechtecksflächen ($= a\cdot b$) ab, allerdings wird dabei das kleine Quadrat ($= b^2$) doppelt abgezogen, daher müssen wir es wieder dazurechnen.

$$
\begin{aligned}
A &= a^2 - a\cdot b - a\cdot b + b^2 && (10.49)\\
&= 4^2 - 4\cdot 1{,}5 - 4\cdot 1{,}5 + 1{,}5^2 && (10.50)\\
&= 16 - 6 + 2{,}25 = 6{,}25\,\text{cm}^2 && (10.51)
\end{aligned}
$$

Da bei beiden Möglichkeiten dasselbe Ergebnis herauskommt, kann man die beiden Rechenwege gleichsetzen:

$$
\begin{aligned}
(a-b)^2 &= a^2 - a\cdot b - a\cdot b + b^2 && (10.52)\\
(a-b)^2 &= a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2 && (10.53)
\end{aligned}
$$

Regel 10.8: 2. Binomische Formel

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2 \qquad (10.54)$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beispiel 10.11: 2. Binomische Formel

$$(5 \cdot e - 3 \cdot f)^2 = 25 \cdot e^2 - 2 \cdot 5 \cdot e \cdot 3 \cdot f + 9 \cdot f^2 \tag{10.55}$$
$$= 25 \cdot e^2 - 30 \cdot e \cdot f + 9 \cdot f^2 \tag{10.56}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

10.3.3 Die 3. Binomische Formel

Wir berechnen den Flächeninhalt des grünen Rechtecks auf 2 verschiedene Arten. Dazu nehmen wir folgende Seitenlängen an: $a = 6$ cm, $b = 1{,}5$ cm.

Herleitung - 1. Möglichkeit

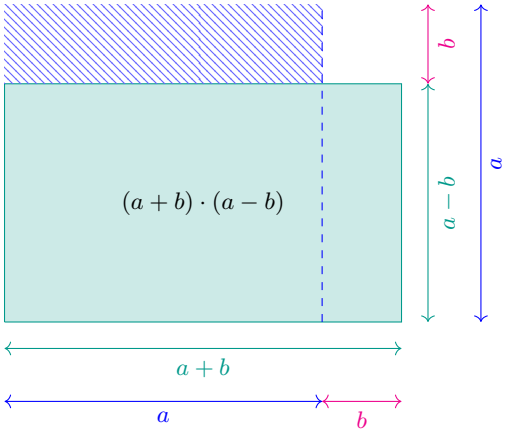
$$\begin{aligned}(a+b)\cdot(a-b) &= a\cdot a - a\cdot b + b\cdot a - b\cdot b && (10.57a)\\ &= a^2 - a\cdot b + a\cdot b + b^2 && (10.57b)\\ &= a^2 - b^2 && (10.57c)\end{aligned}$$

Wir erhalten die Länge des grünen Rechtecks, wenn wir zu der Länge a die Länge b dazurechnen. Die Breite erhalten wir, wenn wir von der Länge a, die Länge b abziehen. Nun berechnen wir den Flächeninhalt:

$$\begin{aligned}A &= (a+b)\cdot(a-b) && (10.57d)\\ &= (6+1{,}5)\cdot(6-1{,}5) && (10.57e)\\ &= (7{,}5)\cdot(1{,}5) = 33{,}75\,\text{cm}^2 && (10.57f)\end{aligned}$$

Herleitung - 2. Möglichkeit

Abbildung 10.10:



Quelle: Eigene Darstellung, nach Wikipedia

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Herleitung - 2. Möglichkeit:

Wir berechnen den Flächeninhalt des grünen Rechtecks auf zwei verschiedene Arten.

Dazu nehmen wir folgende Seitenlängen an:
$a = 6$ cm, $b = 1{,}5$ cm.

Wir schneiden von unserem Rechteck ein kleineres Rechteck mit der Länge b ab.
Dieses abgeschnittene Rechteck legen wir um 90° gedreht oben auf das Rechteck drauf.
Entstanden ist nun eine Fläche, die fast ein Quadrat ist.

Von der Länge des Rechtecks $(a + b)$ wird b abgeschnitten:
$(a + b) - b = a + b - b = a$

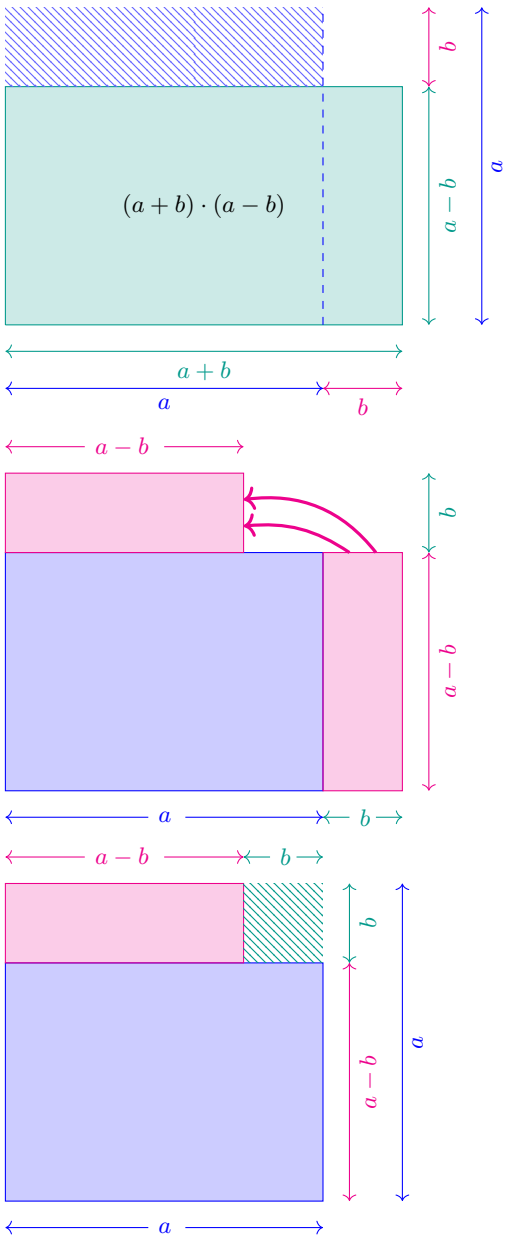
Zur Breite des Rechtecks $(a - b)$ wird b dazugegeben :
$(a - b) + b = a - b + b = a$

Es entsteht also ein Quadrat mit der Seitenlänge a, aus dem ein kleineres Quadrat mit der Seitenlänge b herausgeschnitten wurde.

Wir berechnen den Flächeninhalt also folgendermaßen:

$$A = a^2 - b^2 = 6^2 - 1{,}5^2 = 36 - 2{,}25 = 33{,}75\,\text{cm}^2 \tag{10.58}$$

Abbildung 10.11:



Quelle: Eigene Darstellung, nach Wikipedia

Zusammenfassung:

Da bei beiden Möglichkeiten dasselbe Ergebnis herauskommt, kann man die beiden Rechenwege gleichsetzen:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2 \tag{10.59}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Regel 10.9: 3. Binomische Formel

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2 \tag{10.60}$$

Beispiel 10.12: 3. Binomische Formel

$$(8\cdot m + 3\cdot n)\cdot(8\cdot m - 3\cdot n) = 64\cdot m^2 - 9\cdot n^2 \tag{10.61}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

10.3.4 Der binomische Lehrsatz

10.3.4.1 Begriff der Fakultät

Natürliche Zahlen sind ganzzahlige positive Zahlen: $1, 2, 3, 4, \ldots$ Manchmal zählt man auch die 0 (Null) zu den natürlichen Zahlen.

Die Fakultät $n!$ einer natürlichen Zahl $n > 0$ ist das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen:

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ \prod_{i=1}^{n} i & \text{für } n \geq 1 \end{cases} \tag{10.62}$$

Dabei steht das Produktzeichen $\prod_{i=1}^{n} i$ für das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$.

0	1
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5 040
8	40 320
9	362 880
10	3 628 800
15	1 307 674 368 000
20	2 432 902 008 176 640 000

Für $n = 0$ definiert man $0! := 1$.

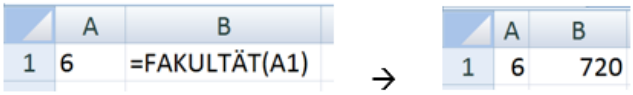
Beispiel 10.13:

$$5! = \prod_{i=1}^{5} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

Die Fakultät $n!$ steigt mit wachsendem n überaus stark an, wie die Wertetabelle oben rechts zeigt.

Berechnung mit EXCEL®: In eine Zelle eingeben „=FAKULTÄT(Zahl)“. Zahl kann dabei eine natürliche Zahl ≤ 170 oder ein Zellenbezug sein. Wenn die Zahl keine natürliche Zahl ist, dann wird sie auf die nächstkleinere natürliche Zahl abgerundet.

Abbildung 10.12:



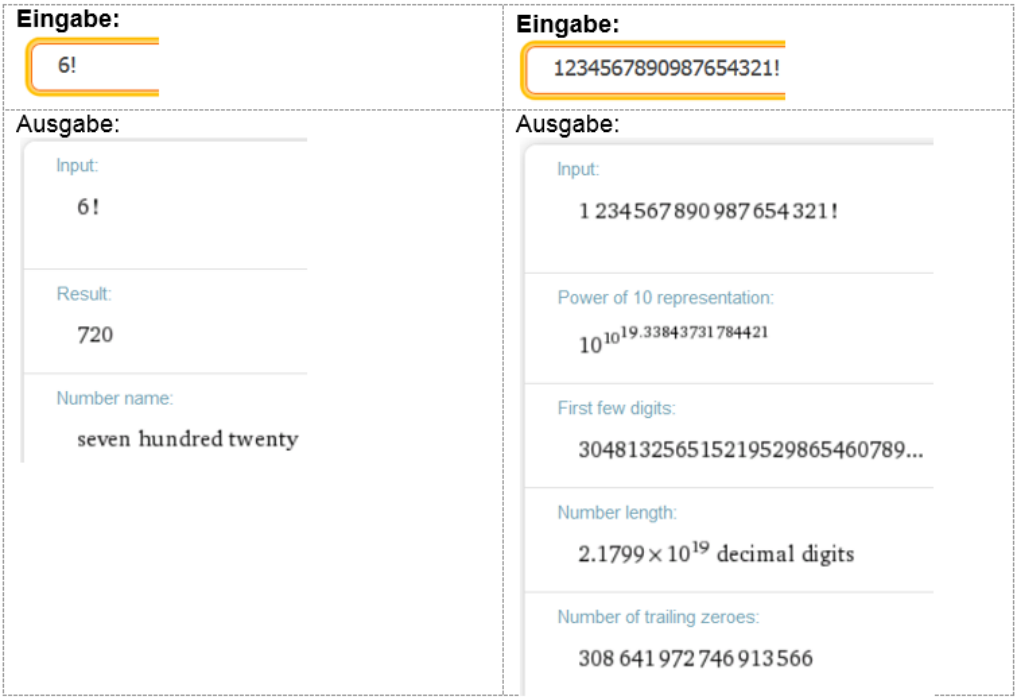
Quelle: Eigene Abbildung

Berechnung mit Wolfram|Alpha: Eingabe von „Zahl!“. Wenn Zahl keine natürliche Zahl ist, wird statt der Fakultät der Wert der Gammafunktion berechnet. Wolfram|Alpha scheint keine größte Zahl zu kennen.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Abbildung 10.13: Wolfram|Alpha



Quelle: Screenshot

Berechnung mit R: factorial(Zahl). Wenn Zahl keine natürliche Zahl ist, dann wird die Gammafunktion von Zahl - 1 zurück gegeben.

Abbildung 10.14: R

```
> factorial(12)
[1] 479001600
>
```

Quelle: Screenshot

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

10.3.4.2 Rechnen mit Fakultäten

Häufig hat man Ausdrücke der Form $\frac{n!}{k!}$. Wenn z. B. k kleiner als n ist, dann lassen sich die ersten k Faktoren heraus kürzen:

$$\frac{n!}{k!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \cdot \ldots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot k} = (k+1) \cdot (k+2) \cdot \ldots \cdot n \tag{10.63}$$

Beispiel 10.14: Kürzen von Fakultäten

$$\frac{49!}{43!} = \frac{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \ldots \cdot \cancel{42} \cdot \cancel{43} \cdot 44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49}{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \ldots \cdot \cancel{42} \cdot \cancel{43}} = 44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49 \tag{10.64}$$

10.3.4.3 Binomialkoeffizienten

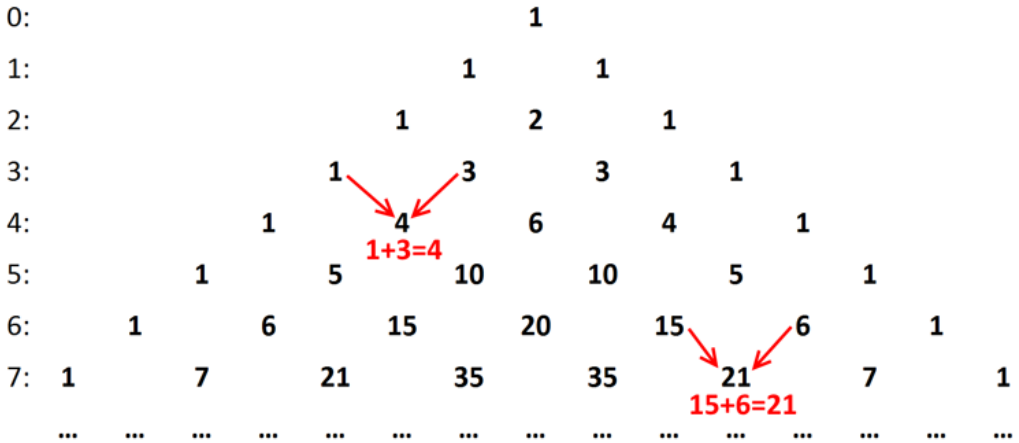
Betrachten wir die binomischen Formeln und Ihre Lösungen für steigende Potenzen:

$$\begin{array}{lll}
(x+y)^0 & =1 & = 1 \\
(x+y)^1 & =(x+y) & = 1 \cdot x^1 \cdot y^0 + 1 \cdot x^0 \cdot y^1 \\
(x+y)^2 & =(x+y) \cdot (x+y) & = 1 \cdot x^2 \cdot y^0 + 2 \cdot x^1 \cdot y^1 + 1 \cdot x^0 \cdot y^2 \\
(x+y)^3 & =(x+y) \cdot (x+y) \cdot (x+y) & = 1 \cdot x^3 \cdot y^0 + 3 \cdot x^2 \cdot y^1 + 3 \cdot x^1 \cdot y^2 + 1 \cdot x^0 \cdot y^3 \\
(x+y)^4 & =\underbrace{(x+y) \cdot \ldots \cdot (x+y)}_{4 Faktoren} & = 1 \cdot x^4 \cdot y^0 + 4 \cdot x^3 \cdot y^1 + 6 \cdot x^2 \cdot y^2 + 4 \cdot x^1 \cdot y^3 + 1 \cdot x^0 \cdot y^4
\end{array}$$

... und so weiter.

Von **Blaise Pascal** [10.4] stammt die Idee, Zahlen in Form eines Dreiecks wie folgt anzuordnen:

Abbildung 10.15: Pascalsches Dreieck



Quelle: Eigene Abbildung

[10.4] Blaise Pascal (* 19. Juni 1623 in Clermont-Ferrand; † 19. August 1662 in Paris) war ein französischer Mathematiker, Physiker, Literat und christlicher Philosoph.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

An der Spitze steht eine ‚1'. Davon ausgehend werden jeweils nach rechts und links diagonal weitere ‚1' in die nächsten Zeilen geschrieben. Genau unter der Mitte zweier Zahlen wird in der nächsten Zeile die Summe dieser beiden Zahlen eingetragen.

Offenbar entsprechen diese Zahlen genau den Zahlen, die vor den einzelnen Summanden unserer binomischen Formeln stehen. Man nennt diese Zahlen deswegen auch **Binomialkoeffizienten**.

Die Binomialkoeffizienten errechnen sich nach der Formel:

$$B_{n,k} := \binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \tag{10.65}$$

(lies: ‚n über k'). Hierbei bedeutet ‚n' die Potenz (den Grad) des gesuchten Binoms, und das ‚k' nummeriert die Lösungsterme (nach fallenden Potenzen der ersten Variablen geordnet) durch.

Beispiel 10.15: Binomialkoeffizienten

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4! \cdot (7-4)!} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 5 \cdot 7 = 35 \tag{10.66}$$

Regel 10.10: Sonderfälle

$$\binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n}{1} = n; \quad \binom{n}{n} = 1 \tag{10.67}$$

Übrigens sind die Binomialkoeffizienten auch die Lösung der Aufgabe: „Auf wie viele verschiedene Arten kann ich ‚k' Stück aus einer Menge von ‚n' Stück auswählen?".

Beispiel 10.16: Als Beispiel das Zahlenlotto „6 aus 49"

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot (49-6)!} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = \frac{44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13\,983\,816$$

Es gibt also 13 983 816 verschiedene 6er- Reihen aus 49 Zahlen; damit beträgt die Gewinnwahrscheinlichkeit rund 1 : 14 Millionen (ohne Berücksichtigung der „Superzahl").

Mit dieser formalen Definition der Binomialkoeffizienten lässt sich das Pascal'sche Dreieck auch so schreiben:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \end{array}$$

Damit erhält man den Binomischen Lehrsatz, der die binomischen Formeln auf beliebige Potenzen erweitert:

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Regel 10.11: Binomischer Lehrsatz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k \tag{10.68}$$

Beispiel 10.17:

$$(x+y)^4 = \binom{4}{0} \cdot x^4 \cdot y^0 + \binom{4}{1} \cdot x^3 \cdot y^1 + \binom{4}{2} \cdot x^2 \cdot y^2 + \binom{4}{3} \cdot x^1 \cdot y^3 + \binom{4}{4} \cdot x^0 \cdot y^4 \tag{10.69}$$

$$= x^4 + 4 \cdot x^3 \cdot y + 6 \cdot x^2 \cdot y^2 + 4 \cdot x \cdot y^3 + y^4 \tag{10.70}$$

Übungsaufgaben finden Sie z. B. unter (alle zuletzt geprüft am 2025-08-10):
https://www.aufgabenfuchs.de/mathematik/gleichung/binfor.shtml
http://www.mathe-trainer.de/Klasse8/Termumformungen/Aufgabensammlung.htm

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

10.4 Bruch-Zerlegungen

10.4.1 Kettenbruchzerlegungen von Termen

Definition 10.2: Kettenbruch

In der Mathematik und insbesondere der Zahlentheorie ist ein ***Kettenbruch*** (fortgesetzter Bruch) ein Ausdruck der Form[10.5]

$$a+\cfrac{b}{c+\cfrac{d}{e+\cfrac{f}{\ddots}}} \tag{10.71}$$

Regel 10.12: Kettenbrüche

Jede reelle Zahl kann als ein Kettenbruch mit ganzen Zahlen $a, b, c, d, e, f, \ldots$ ausgedrückt werden.

Ein Kettenbruch ist also ein gemischter Bruch der Form $a+\frac{b}{x'}$, bei dem der Nenner x' wieder die Form eines gemischten Bruchs besitzt, wobei sich dieser Aufbau weiter so fortsetzt.

Kettenbrüche können daher als Zahlensystem bezeichnet werden, wie das Dezimalsystem. Sie dienen jedoch in erster Linie nicht zum Rechnen, sondern werden dazu verwendet, Approximationsaufgaben zu lösen: So liefern sie in der Zahlentheorie Näherungen für reelle Zahlen, indem diese durch einen Bruch aus ganzen Zahlen ausgedrückt werden, und in der numerischen Mathematik approximiert man durch sie Funktionen, ähnlich wie dies auch mittels Potenzreihen erreicht wird.

Kettenbrüche spielen zudem eine große Rolle in der Zahlentheorie. So zeigte zum Beispiel Joseph Liouville[10.6] 1844 mit ihrer Hilfe, dass transzendente Zahlen existieren. Außer in der Zahlentheorie kommen Kettenbrüche in der Kryptographie, algebraischen Geometrie, Topologie, Funktionentheorie, numerischen Mathematik und bei der Analyse chaotischer Systeme zur Anwendung.

Wenn von einem Kettenbruch *ohne nähere Angabe* die Rede ist, ist meist ein **regulärer Kettenbruch** gemeint.

[10.5] https://de.wikipedia.org/wiki/Kettenbruch; abgerufen am 2017-08-01

[10.6] Joseph Liouville (* 24. März 1809 in Saint-Omer; † 8. September 1882 in Paris) war ein französischer Mathematiker. Liouville arbeitete in zahlreichen mathematischen Teilgebieten, darunter Zahlentheorie, Funktionentheorie und Differentialgeometrie, aber auch in mathematischer Physik und sogar in Astronomie.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Definition 10.3: Reguläre Kettenbrüche

Ein **regulärer Kettenbruch** hat die Form:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}} \tag{10.72}$$

Eine alternative Schreibweise für (reguläre) Kettenbrüche ist $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$.

Man unterscheidet **endliche**, **periodisch unendliche** und **nichtperiodisch unendliche** Kettenbrüche.

Beispiel 10.18: Beispiel für einen periodisch-unendlichen, regulären Kettenbruch

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}} \tag{10.73}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

10.4.1.1 Endliche Kettenbrüche und der euklidische Algorithmus

Ein endlicher Kettenbruch hört nach dem n-ten Glied auf, hat also die Form:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_n}}} \tag{10.74}$$

Die Umwandlung einer rationalen Zahl in einen Kettenbruch erfolgt mit Hilfe des euklidischen Algorithmus.

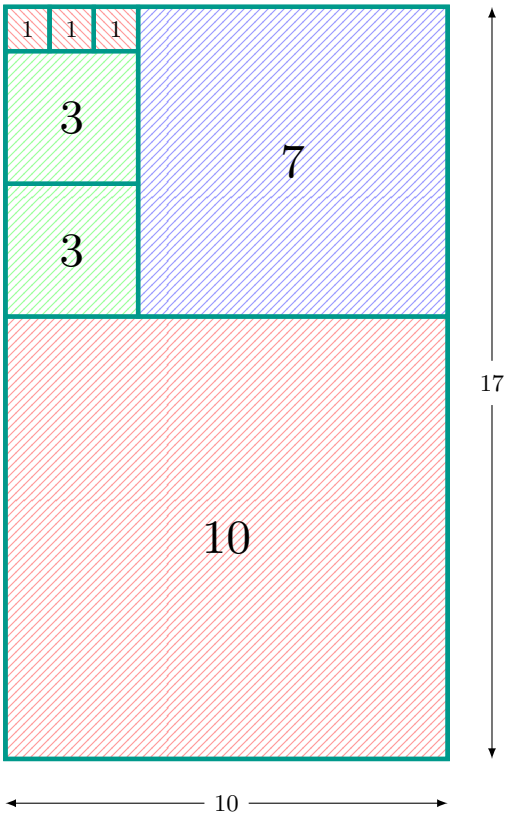
Als Beispiel rechnen wir für $\frac{17}{10}$ wie folgt:

$$17 = 1 \cdot 10 + 7 \tag{10.75a}$$
$$10 = 1 \cdot 7 + 3 \tag{10.75b}$$
$$7 = 2 \cdot 3 + 1 \tag{10.75c}$$
$$3 = 3 \cdot 1 + 0 \tag{10.75d}$$

In der Abbildung 10.16 ist dieses Verfahren veranschaulicht. Aus der folgenden Gleichungskette ist ersichtlich, dass die Kettenbruchentwicklung durch wiederholtes Einsetzen der Gleichungen des euklidischen Algorithmus entsteht:

$$\frac{17}{10} = 1 + \frac{7}{10} = 1 + \frac{1}{\frac{10}{7}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{7}} \tag{10.75e}$$
$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{10}{7}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{7}{3}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1\frac{1}{2+\frac{1}{3}}}} \tag{10.75f}$$

Abbildung 10.16: Euklidischer Algorithmus für Kettenbrüche



Quelle: Eigene Darstellung, nach Wikipedia

Das graphische Verfahren kann so erläutert werden:

Man beginnt mit einem 17 x 10 großen Rechteck.

Darin bringt man so viele Quadrate der Seitenlänge 10 unter, wie möglich (in diesem Beispiel geht das nur einmal). Es bleibt nun ein 10 x 7 großes Rechteck unbedeckt, auf das man die Überlegung weiter anwendet.

Die Anzahl der jeweils verwendeten Quadrate sind dabei die Teilnenner des Kettenbruchs.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

10.4.1.2 Periodisch unendliche Kettenbrüche

[10.7] Periodische unendliche Kettenbrüche beschreiben irrationale algebraische Zahlen, die Lösungen von ganzzahligen quadratischen Gleichungen sind. Umgekehrt lässt sich jede irrationale Lösung einer quadratischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten als periodischer unendlicher Kettenbruch darstellen.

Dass die erste dieser Behauptungen leicht zu zeigen ist, sei an einem Beispiel demonstriert:

Wenn x etwa der periodische Kettenbruch

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ldots}}}} \tag{10.76}$$

ist, dann gilt

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{x}}} = \ldots = \frac{10 \cdot x + 3}{7 \cdot x + 2} \tag{10.77}$$

woraus $7 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 3 = 0$ folgt.

Beispiel 10.19: Kettenbruch für $\sqrt{2}$

Ein Beispiel ist der unendliche Kettenbruch für die Quadratwurzel aus 2:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}} \tag{10.78}$$

[10.7] http://www.mathepedia.de/Kettenbrueche.aspx; abgerufen am 2017-04-22

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beispiel 10.20: Kettenbruch für π

$$\pi = \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cfrac{9^2}{2+\ddots}}}}}} \tag{10.79}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

10.4.1.3 Nichtperiodisch unendliche Kettenbrüche

Jeder nichtperiodisch unendliche Kettenbruch stellt eine irrationale Zahl dar, die sich nicht als Lösung einer quadratischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten darstellen lässt. Umgekehrt lässt sich jede solche Zahl (insbesondere jede transzendente Zahl) als nichtperiodischer Kettenbruch schreiben.

Der unendliche Kettenbruch für die Eulersche Zahl e:

$$\mathrm{e} = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, \ldots] \tag{10.80}$$

wobei sich das hier erkennbare Muster bis ins Unendliche fortsetzt, jedoch keine Periode aufweist.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

10.4.2 Polynomdivision

Die Polynomdivision, auch Partialdivision genannt, ist ein mathematisches Rechenverfahren.[10.8] Das Verfahren verläuft analog zur üblichen und in der Schule gelehrten Division von Zahlen mit Rest, nur dass hier statt zweier Zahlen zwei Polynome durcheinander dividiert werden und man als Ergebnis ein oder zwei neue Polynome – den „Ganzteil“ und ggf. den Rest der Division – erhält.

Das Verfahren funktioniert für Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten genauso wie die schriftliche Division ganzer Zahlen (ggf. mit Rest) und kann mit dem gleichen Schema gelöst werden.

Hier werden die einzelnen Schritte an einem Beispiel erläutert:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{2\cdot x^3 - x^2 - 2\cdot x + 1}{x+1} \tag{10.81}$$

Wie bei der Division ganzer Zahlen wird zuerst der Summand höchsten Grades des Zählerpolynoms p eliminiert.

Dazu wird zunächst der Summand höchsten Grades vom Zählerpolynom p durch den Summanden höchsten Grades des Nennerpolynoms q dividiert.

Das Ergebnis ist

$$\frac{2\cdot x^3}{x} = 2\cdot x^2 \tag{10.82}$$

Dann wird q mit $2\cdot x^2$ multipliziert und von p subtrahiert.

$$\begin{array}{l} (2\cdot x^3 - \quad x^2 - 2\cdot x + 1) : (x+1) = 2\cdot x^2 + \ldots \\ \underline{-(2\cdot x^3 + 2\cdot x^2)} \\ \qquad -3\cdot x^2 \end{array} \tag{10.83}$$

Es bleibt ein Rest von

$$-3\cdot x^2 + 2\cdot x + 1 \tag{10.84}$$

Das Verfahren wiederholt sich, bis das Zählerpolynom komplett „abgearbeitet“ ist:

[10.8] https://de.wikipedia.org/wiki/Polynomdivision; abgerufen am 2017-05-30

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

$$
\begin{array}{rl}
(2\cdot x^3 - & x^2 - 2\cdot x + 1) : (x+1) = 2\cdot x^2 - 3\cdot x + 1 \\
-(2\cdot x^3 + 2\cdot x^2) & \downarrow \\
\hline
-3\cdot x^2 - 2\cdot x & \\
-\ (-3\cdot x^2 - 3\cdot x) & \downarrow \\
\hline
x + 1 & \\
-(x+1) & \\
\hline
0 &
\end{array}
\tag{10.85}
$$

In diesem Beispiel geht die Polynomdivision ohne Rest auf.

Hier noch ein weiteres Beispiel für eine Polynomdivision mit Rest:

$$
\begin{array}{rl}
(4\cdot x^5 - & x^4 + 2\cdot x^3 + x^2 \qquad - 1) \ : \ (x^2 - 1) = 4\cdot x^3 - x^2 + 6\cdot x + \dfrac{6\cdot x - 1}{x^2 - 1} \\
-(4\cdot x^5 & - 4\cdot x^3) \\
\hline
& -x^4 + 6\cdot x^3 + x^2 \\
& -(-x^4 \qquad + x^2) \\
\hline
& 6\cdot x^3 \qquad - 1 \\
& -(6\cdot x^3 \qquad - 6\cdot x) \\
\hline
& 6\cdot x \quad - 1
\end{array}
\tag{10.86}
$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

10.4.3 Partialbruchzerlegung

Die Partialbruchzerlegung wird hauptsächlich in der Integralrechnung angewendet. Sie bietet häufig die einzige Möglichkeit, um zu gebrochen rationalen Funktionen überhaupt eine Stammfunktion zu finden.

Das Vorgehen sei anhand einiger Beispiele gezeigt.

Beispiel 1:
Der Grad des Zählerpolynoms ist kleiner als der Grad des Nennerpolynoms, und der Nenner hat nur einfache Nullstellen:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \tag{10.87}$$

Zunächst faktorisiert man den Nenner vollständig:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{x}{(x+1) \cdot (x-1)} \tag{10.88}$$

Nun lautet der Ansatz:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{x}{(x+1) \cdot (x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \tag{10.89}$$

Die Größen A und B findet man durch **Koeffizientenvergleich**: Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit dem ursprünglichen Nenner:

$$\frac{x}{x^2 - 1} \cdot (x^2 - 1) = \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \right) \cdot (x^2 - 1) \Leftrightarrow x = A \cdot (x-1) + B \cdot (x+1) \tag{10.90}$$

Sortieren:

$$x = A \cdot (x-1) + B \cdot (x+1) = x \cdot (A+B) + (-A+B) \tag{10.91}$$

Der Koefizientenvergleich ergibt:

$$A + B = 1 \text{ und } -A + B = 0 \tag{10.92}$$

Hieraus folgt sofort

$$A = B = \frac{1}{2} \tag{10.93}$$

und damit

$$\frac{x}{x^2 - 1} = \frac{1/2}{x+1} + \frac{1/2}{x-1} \tag{10.94}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beispiel 2:
Der Grad des Zählerpolynoms ist kleiner als der Grad des Nennerpolynoms, und der Nenner hat auch mehrfache Nullstellen:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 2 \cdot x + 1} \tag{10.95}$$

Wir faktorisieren wieder den Nenner:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x}{(x-1)^2} \tag{10.96}$$

Nun lautet der Ansatz:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 2 \cdot x + 1} = \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} \tag{10.97}$$

Wir multiplizieren wieder beide Seiten mit dem ursprünglichen Nenner:

$$\frac{x}{x^2 - 2 \cdot x + 1} \cdot (x-1)^2 = \left(\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2}\right) \cdot (x-1)^2 \Leftrightarrow x = A \cdot (x-1) + B \tag{10.98}$$

Wir sortieren wieder und führen den Koeffizientenvergleich durch:

$$x = A \cdot x + (-A + B) \Rightarrow A = B \text{ und } A = 1 \Rightarrow A = B = 1 \tag{10.99}$$

Damit

$$\frac{x}{x^2 - 2 \cdot x + 1} = \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2} \tag{10.100}$$

Beispiel 3:
Der Grad des Zählerpolynoms ist gleich (oder größer) dem Grad des Nennerpolynoms:

$$\frac{2 \cdot x^2 - 14 \cdot x + 12}{x^3 - 2 \cdot x^2 + x} \tag{10.101}$$

Zunächst führen wir eine Polynomdivision durch, bis der Grad des verbleibenden Rest-Zählerpolynoms kleiner ist als der Grad des Nennerpolynoms:

$$(2x^3 \qquad - 14x + 12) : (x^3 + 2 \cdot x^2 + x) = 2 + \frac{-4 \cdot x^2 - 16 \cdot x + 12}{x^3 + 2 \cdot x^2 + x} \tag{10.102}$$

$$\underline{-(2 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 + \ 2 \cdot x)} \tag{10.103}$$

$$-4 \cdot x^2 - 16 \cdot x + 12 \tag{10.104}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Nun führen wir mit dem Restpolynom die Partialbruchzerlegung durch:

$$\frac{-4x^2-16\cdot x+12}{x^3+2\cdot x^2+x}=\frac{-4\cdot x^2-16\cdot x+12}{x\cdot(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2} \tag{10.105}$$

$$=\frac{A\cdot(x+1)^2+B\cdot x\cdot(x+1)+C\cdot x}{x\cdot(x+1)^2} \tag{10.106}$$

$$=\frac{A\cdot x^2+2\cdot A\cdot x+A+B\cdot x^2+B\cdot x+C\cdot x}{x\cdot(x+1)^2} \tag{10.107}$$

$$=\frac{x^2\cdot(A+B)+x\cdot(2\cdot A+B+C)+C\cdot x}{x\cdot(x+1)^2} \tag{10.108}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert:

$$A+B=-4 \tag{10.109}$$

$$2\cdot A+B+C=-16 \tag{10.110}$$

Hieraus ergibt sich sofort:

$$A=12 \tag{10.111}$$

$$B=-16 \tag{10.112}$$

$$C=-24 \tag{10.113}$$

und damit die gesuchte Partialbruchzerlegung:

$$\frac{2\cdot x^3-14\cdot x+12}{x^3+2\cdot x^2+x}=2+\frac{12}{x}-\frac{16}{x+1}-\frac{24}{(x+1)^2} \tag{10.114}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

11 Nullstellen von Polynomen

11.1 Nullstellen von einer linearen Funktion

Wir setzen die Funktionsvorschrift $f(x) = m \cdot x + b$ gleich Null und lösen nach x auf. Eine lineare Funktion können wir als Potenzfunktion ersten Grades interpretieren; wir erhalten gemäß des Fundamentalsatzes der Algebra genau eine Nullstelle.

Sonderfälle: $m = 0$ und $b = 0$ ergibt unendlich viele Nullstellen; $m = 0$ und $b \neq 0$ ergibt keine Nullstellen. Allerdings sind dies dann streng genommen keine linearen Funktionen mehr, sondern **konstante Funktionen**.

Beispiel 11.1: Nullstelle

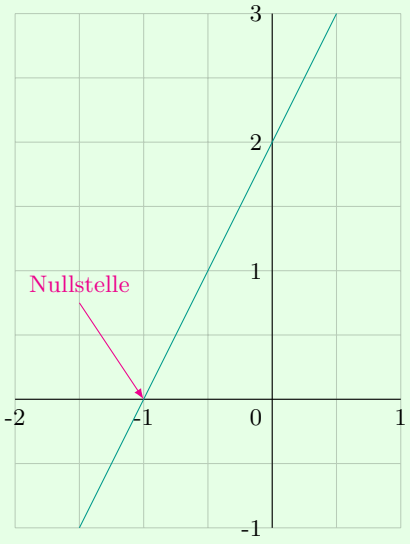
Wir wollen die Nullstelle der Funktion $f(x) = 2x + 2$ berechnen.

Zuerst setzen wir die Funktionsvorschrift Null:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2x + 2 = 0 \tag{11.1}$$

Jetzt können wir mithilfe von Äquivalenzumformungen nach x auflösen.

$$\begin{aligned} 2x + 2 &= 0 && | - 2 && (11.2)\\ 2x &= -2 && | : 2 && (11.3)\\ x &= -1 && && (11.4) \end{aligned}$$



Dieses Ergebnis bedeutet, dass bei $x = -1$ eine Nullstelle vorliegt. Oder als Punkt ausgedrückt, ein Nullpunkt bei $N(-1|0)$. Wir interpretieren, dass der Funktionsgraph der Funktion

$$f(x) = 2x + 2 = 0 \text{ bei } x = -1 \tag{11.5}$$

die x-Achse schneidet.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

11.1.1 Nullstellen von quadratischen Funktionen

Eine quadratische Funktion der Form $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ (oder auch Potenzfunktion zweiten Grades) besitzt nach dem Fundamentalsatz der Algebra zwei Nullstellen; von diesen sind bis zu zwei rein reell (möglicherweise doppelt).[11.1]

Wir gehen vor wie bei der linearen Funktion: Wir setzen die Funktionsvorschrift Null und lösen nach x auf. Am besten geht das mit der PQ-Formel (oder man macht es mit der quadratischer Ergänzung). Wir machen das an dieser Stelle mit der PQ-Formel.

Beispiel 11.2:

Wir wollen die Nullstelle der Funktion $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$ berechnen.

Zuerst setzen wir die Funktionsvorschrift Null:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 6 \tag{11.6}$$

Jetzt wollen wir die PQ-Formel anwenden und erinnern uns daran, dass dies nur mit der normierten quadratischen Gleichung möglich ist, also der Parameter a, die Zahl vor dem x^2 gleich 1 sein muss. Dafür teilen wir also erst einmal durch 2:

$$2x^2 + 4x - 6 = 0 \quad | : 2 \tag{11.7}$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \quad | p = 2 \text{ und } q = -3 \tag{11.8}$$

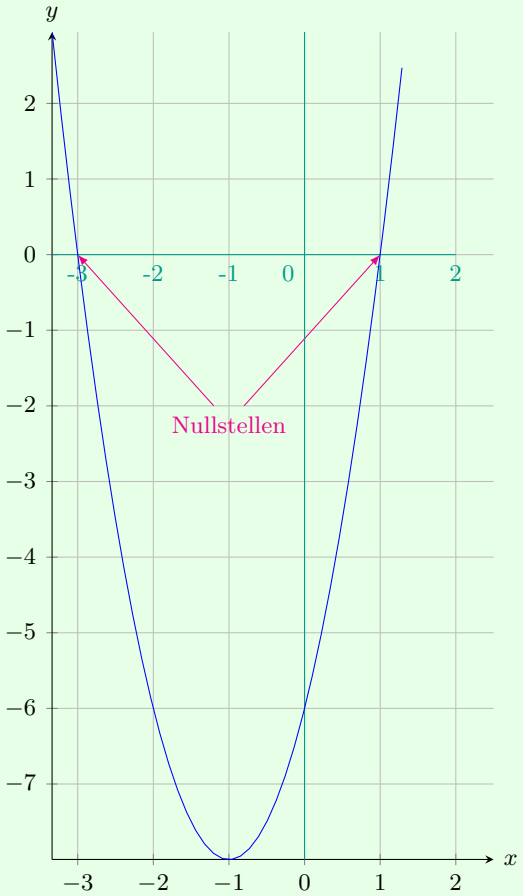
Wir setzen in die PQ-Formel ein:

$$x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad \left| \begin{array}{l} p = 2 \\ q = -3 \end{array} \right. \tag{11.9}$$

$$x_{12} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-3)} \tag{11.10}$$

$$x_{12} = -1 \pm \sqrt{(1)^2 + 3)} = -1 \pm 2 \tag{11.11}$$

$$x_1 = 1 \text{ und } x_2 = -3 \tag{11.12}$$



[11.1] Zum Fundamentalsatz der Algebra siehe Referenz einfügen.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

11.1.2 Allgemeines zu quadratischen Gleichungen

Definition 11.1: Quadratische Gleichungen

Eine ***quadratische Gleichung*** ist eine Gleichung, die sich in der Form

$$y = f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \tag{11.13}$$

mit $a \neq 0$ schreiben lässt. Hierbei sind a, b, c Koeffizienten; x ist die Unbekannte. Ist $b = 0$, spricht man von einer ***reinquadratischen Gleichung***.

Die linke Seite dieser Gleichung ist der Term einer quadratischen Funktion (allgemeiner ausgedrückt: ein Polynom zweiten Grades),

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \tag{11.14}$$

Der Funktionsgraph dieser Funktion im kartesischen Koordinatensystem ist eine Parabel. Geometrisch beschreibt die quadratische Gleichung

$$f(x) = 0 \tag{11.15}$$

die Nullstellen dieser Parabel.

Die allgemeine Form der quadratischen Gleichung lautet

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \qquad (a \neq 0) \tag{11.16}$$

Dabei heißt $a \cdot x^2$ quadratisches Glied, $b \cdot x$ lineares Glied und c konstantes Glied (oder auch Absolutglied) der Gleichung.

Die Gleichung ist in ***Normalform***, wenn $a = 1$, also wenn das quadratische Glied den Koeffizient 1 hat. Aus der allgemeinen Form lässt sich die Normalform durch Äquivalenzumformungen gewinnen, indem durch a dividiert wird[11.2].

Mit der Substitution

$$p = \frac{b}{a} \text{ und } q = \frac{c}{a} \tag{11.17}$$

lässt sich die Normalform somit schreiben als

$$x^2 + p \cdot x + q = 0 \tag{11.18}$$

Im Folgenden werden zunächst quadratische Gleichungen mit reellen Zahlen als Koeffizienten a, b und c bzw. als p und q betrachtet.

[11.2] Hierfür muss natürlich gelten: $a \neq 0$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Eine Lösung der quadratischen Gleichung ist eine Zahl, die die Gleichung erfüllt, wenn sie für x eingesetzt wird.

Jede quadratische Gleichung hat, wenn man komplexe Zahlen als Lösungen zulässt, genau zwei (gegebenenfalls zusammenfallende) Lösungen, auch ***Wurzeln*** der Gleichung genannt. Betrachtet man nur die reellen Zahlen, so hat eine quadratische Gleichung null bis zwei Lösungen.

Zum Lösen quadratischer Gleichungen kann man die quadratische Ergänzung nutzen. Oft ist es einfacher, stattdessen eine der mit Hilfe der quadratischen Ergänzung hergeleiteten allgemeinen Formeln zu verwenden:

Die Lösungen der allgemeinen quadratischen Gleichung lauten („Mitternachtsformel“):

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \tag{11.19}$$

Herleitung:

Aus der allgemeinen Form ergibt sich durch Umformen nach dem Verfahren der ***quadratischen Ergänzung***:

$$\begin{aligned}
a \cdot x^2 + b \cdot x + c &= 0 && || - c \\
a \cdot x^2 + b \cdot x &= -c && || \cdot 4 \cdot a \\
4 \cdot a^2 \cdot x^2 + 4 \cdot a \cdot b \cdot x &= -4 \cdot a \cdot c && || + b^2 \text{ (quadratische Ergänzung)} \\
4 \cdot a^2 \cdot x^2 + 4 \cdot a \cdot b \cdot x + b^2 &= -4 \cdot a \cdot c + b^2 && \\
(2 \cdot a \cdot x)^2 + 2 \cdot 2 \cdot a \cdot b \cdot x + b^2 &= b^2 - 4 \cdot a \cdot c && || \text{ (Umformen mit binomischer Formel)} \\
(2 \cdot a \cdot x + b)^2 &= b^2 - 4 \cdot a \cdot c && || \pm \sqrt{\square} \\
2 \cdot a \cdot x + b &= \pm\sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c} && || - b \\
2 \cdot a \cdot x &= -b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c} && || : (2 \cdot a) \\
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} &&
\end{aligned}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

11.1.3 Nullstellen eines Polynoms dritten Grades

Für Polynome dritten Grades und höher existieren keine allgemeine Formeln, mit denen wir direkt die Nullstellen berechnen können. Wir müssen zunächst versuchen, den Grad durch Faktorisieren zu verkleinern (ein Produkt ist Null, wenn ein Faktor Null ist). Wir führen dies anhand Polynome dritten Grades durch (und können maximal drei Nullstellen erwarten). Aber auch Polynome höherer Grade müssten in dieser Weise gelöst werden, häufig in mehreren Schritten.

Wir betrachten als Beispiel die Potenzfunktion dritten Grades $f(x) = 2 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 - 6 \cdot x$. Zu allererst überprüfen wir, ob wir ein x, ein x^2 und so weiter ausklammern können. Das erspart uns ganz erheblich viel Arbeit.

Hier können wir das machen, wir klammern x aus.

$2x^3 + 4x^2 - 6x = 0 \quad | \; x$ ausklammern

$x \cdot (2x^2 + 4x - 6) = 0 \quad |$ ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null wird

Wir untersuchen die Faktoren einzeln.

$x = 0$ wird Null (ist schon Lösung)

oder

$2x^2 + 4x - 6 = 0$

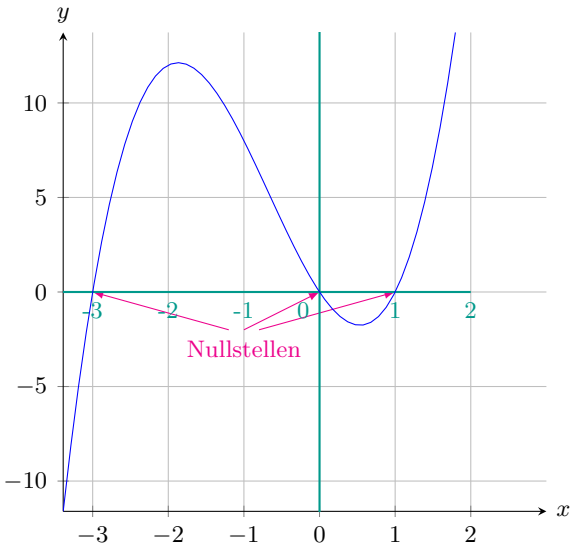
Diese quadratische Gleichung können wir wieder mit PQ-Formel lösen:

$$x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad \left| \begin{array}{l} p = 2 \\ q = -3 \end{array} \right. \tag{11.20}$$

$$x_{12} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-3)} \tag{11.21}$$

$$x_{12} = -1 \pm \sqrt{(1)^2 + 3)} = -1 \pm 2 \tag{11.22}$$

$$x_1 = 1 \text{ und } x_2 = -3 \tag{11.23}$$



© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

11.1.4 Nullstellenberechnung mit Polynomdivision

Wenn wir durch Ausklammern von x nicht den Grad des Polynoms verkleinern können, müssen wir dies durch Polynomdivision erledigen. Ein Nachteil: Wir müssen für jede Polynomdivision eine Nullstelle schon kennen (oder vorher raten).

Wir betrachten die folgende Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{26}{9} \tag{11.24}$$

Zuerst müssen wir eine Nullstelle raten. Wir probieren $x = 1$. „Zufällig“ ist $x = 1$ tatsächlich Nullstelle von $f(x)$. Das Polynom $x - 1$ ist bei $x = 1$ gleich Null. Durch dieses Polynom teilen wir, deshalb heißt es auch Polynomdivision.

$$\left(\frac{1}{9} \cdot x^3 - \frac{1}{3} \cdot x^2 - \frac{8}{3} \cdot x + \frac{26}{9}\right) : (x - 1) \tag{11.25}$$

Zuerst teilen wir den ersten Summanden der ersten Klammer durch den ersten Summanden der zweiten Klammer und schreiben das Ergebnis hinter das Gleichheitszeichen. Danach multiplizieren wir den ersten Summanden hinter dem Gleichheitszeichen mit der zweiten Klammer und schreiben das Ergebnis unter den ersten Summanden der ersten Klammer. Danach subtrahieren wir die untere Klammer von der ersten oberen Klammer.

$$\left(\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{26}{9}\right) : (x - 1) = \frac{1}{9}x^2 \tag{11.26}$$

$$\underline{-\left(\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2\right)} \tag{11.27}$$

$$-\frac{2}{9}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{26}{9} \tag{11.28}$$

Mit diesem Term wiederholen wir das Dividieren erneut. Wir teilen den unteren ersten Summanden durch den ersten Summanden der zweiten Klammer und addieren dieses Ergebnis hinter das, was schon hinter dem Gleichheitszeichen steht. Das was wir als letztes hinter unserem Gleichheitszeichen addiert haben, multiplizieren wir mit der zweiten Klammer und schreiben das Ergebnis unter den untersten Term. Danach subtrahieren wir beide unteren Terme.

$$\left(\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{26}{9}\right) : (x - 1) = \frac{1}{9}x^2 + \left(-\frac{2}{9}x\right) \tag{11.29}$$

$$\underline{-\left(\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2\right)} \tag{11.30}$$

$$-\frac{2}{9}x^2 - \frac{8}{3}x \tag{11.31}$$

$$\underline{-\left(-\frac{2}{9}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{26}{9}\right)} \tag{11.32}$$

$$-\frac{26}{9}x + \frac{26}{9} \tag{11.33}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Den Schritt müssen wir so häufig wiederholen, bis wir fertig sind.

$$\left(\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{26}{9}\right) : (x-1) = \frac{1}{9}x^2 + \left(-\frac{2}{9}x\right) \tag{11.34}$$

$$\underline{-\left(\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2\right)} \tag{11.35}$$

$$-\frac{2}{9}x^2 - \frac{8}{3}x \tag{11.36}$$

$$\underline{-\left(-\frac{2}{9}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{26}{9}\right)} \tag{11.37}$$

$$-\frac{26}{9}x + \frac{26}{9} \tag{11.38}$$

$$\underline{-\left(-\frac{26}{9}x + \frac{26}{9}\right)} \tag{11.39}$$

$$0 \tag{11.40}$$

Wir erhalten unseren Faktor für die faktorisierte Funktionsvorschrift. Wir denken rückwärts und sehen:

$$f(x) = \frac{1}{9}\cdot x^3 - \frac{1}{3}\cdot x^2 - \frac{8}{3}\cdot x + \frac{26}{9} = (x-1)\cdot\left(\frac{1}{9}\cdot x^2 - \frac{2}{9}\cdot x + \frac{26}{9}\right) \tag{11.41}$$

Die erste Nullstelle ist klar, die hatten wir oben schon. Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist, also untersuchen wir:

$$x - 1 = 0 \text{ (hatten wir oben schon, gilt für } x = 1) \text{ oder} \tag{11.42}$$

$$\frac{1}{9}\cdot x^2 - \frac{2}{9}\cdot x + \frac{26}{9} = 0 \tag{11.43}$$

Diese Gleichung lösen wir am besten mit der PQ-Formel, dafür müssen wir die Gleichung aber normieren, vor dem x^2 muss eine 1 als Faktor stehen.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

$$\frac{1}{9}\cdot x^2-\frac{2}{9}\cdot x+\frac{26}{9}=0 \qquad |\cdot 9 \qquad (11.44)$$

$$x^2-2\cdot x-26=0 \qquad |p=-2 \text{ und } q=-26 \qquad (11.45)$$

$$x_{2,3}=\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \quad |p \text{ und } q \text{ einsetzen} \qquad (11.46)$$

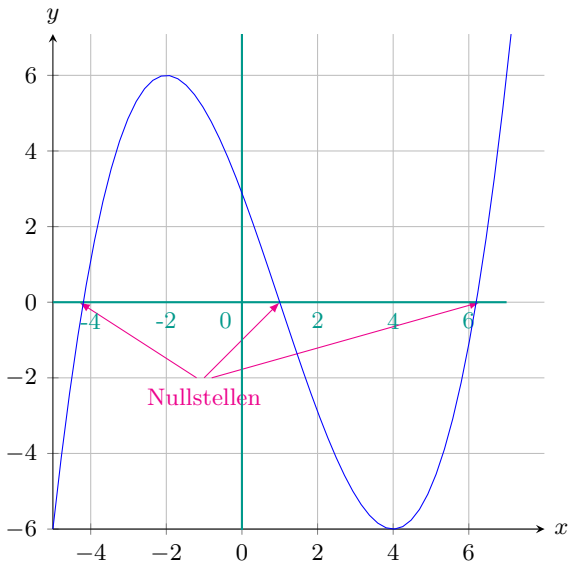
$$x_{2,3}=\frac{-2}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2-(-26)} \qquad (11.47)$$

$$x_{2,3}=1\pm\sqrt{1+26)} \qquad (11.48)$$

$$x_{2,3}=1\pm\sqrt{27} \qquad (11.49)$$

$$x_2=1+\sqrt{27} \text{ und } x_3=1-\sqrt{27} \qquad (11.50)$$

$$x_2=1+3\cdot\sqrt{3} \text{ und } x_3=1-3\cdot\sqrt{3} \qquad (11.51)$$



© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

12 Komplexe Zahlen

12.1 Grundlagen

Die mathematische Operation des Quadratwurzelziehens stößt im Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ an eine Grenze, wenn die Wurzel aus einer negativen Zahl gezogen werden soll.

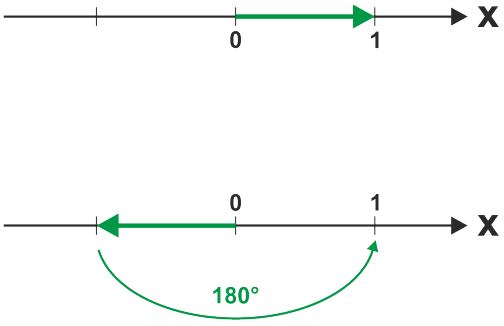
Betrachten wir die einfache reellwertige Aufgabe $x = \sqrt{+1}$. Gesucht ist also die Zahl, die mit sich selber multipliziert $+1$ ergibt.

Auf dem Zahlenstrahl entspricht die $+1$ einem nach rechts gerichtetem Pfeil, ausgehend vom Nullpunkt. Neben der offensichtlichen Lösung $\sqrt{+1} = 1$ ist auch $\sqrt{+1} = -1$ eine Lösung.

Auf dem Zahlenstrahl entspricht -1 einem Pfeil vom Ursprung nach links. Die Richtung dieses Pfeils ist gegenüber der Richtung des Radikanden $+1$ um 180° verschoben.

Wir legen als Winkelreferenz mit 0° die Richtung der positiven reellen Achse fest und können folgern:

Abbildung 12.1: Wurzel aus +1



Quelle: Eigene Darstellung

Die Quadratwurzeln aus $+1$ haben auf dem Zahlenstrahl eine Richtung, die verdoppelt genau 0° ergibt (vgl. Abbildung 12.1):

$$\begin{aligned}(+1)\cdot(+1) &= +1 \rightarrow 2\cdot 0^\circ = 0^\circ \\ (-1)\cdot(-1) &= +1 \rightarrow 2\cdot 180^\circ = 360^\circ = 0^\circ\end{aligned} \tag{12.1}$$

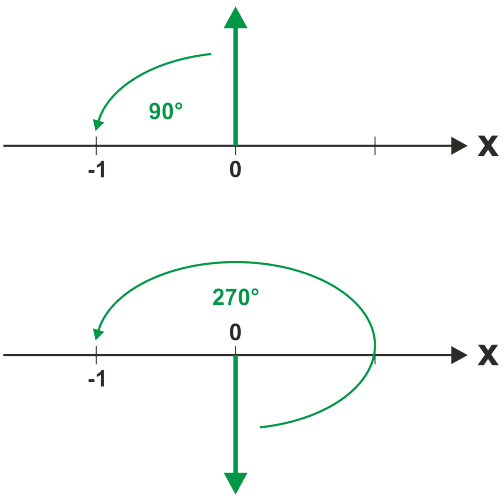
Es liegt nun nahe, eine ähnliche Überlegung für die Lösungen der Gleichung $x = \sqrt{-1}$ vorzunehmen. Diese Lösungen können ganz sicher nicht auf dem reellen Zahlenstrahl liegen.

-1 entspricht auf dem reellen Zahlenstrahl einem Pfeil der Richtung 180°. Die Hälfte dieser Richtung ist 90° oder 270°(vgl. Abbildung 12.2):

$$\begin{aligned}2\cdot 90^\circ &= 180^\circ \\ 2\cdot 270^\circ &= 540^\circ = 180^\circ\end{aligned} \tag{12.2}$$

Nach dieser Überlegung erhalten wir als Lösung der Gleichung $x = \sqrt{-1}$ zwei Wurzeln, die gegenüber dem reellen Zahlenstrahl um 90° bzw. 270° gedreht sind.

Abbildung 12.2: Wurzel aus -1



Quelle: Eigene Darstellung

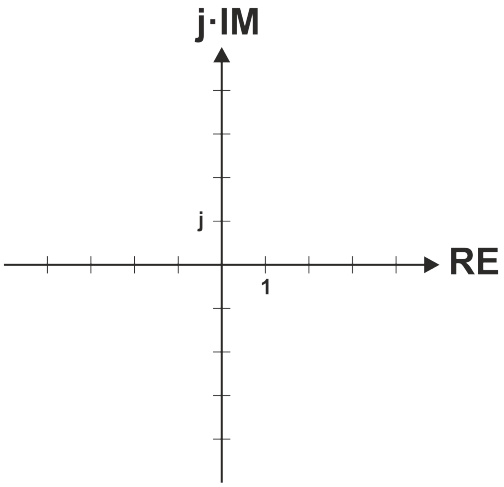
© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Diese beiden Zahlen markieren einen eigenen Zahlenstrahl, den man als Zahlenstrahl der imaginären Zahlen bezeichnet. Zur Unterscheidung von der reellen Einheit „1“ bezeichnet man die imaginäre Einheit mit einem „i“ (in der Mathematik und Physik) bzw. mit einem „j“ (in den Ingenieurwissenschaften, um eine Verwechselung mit der Momentanstromstärke i zu vermeiden)[12.1].

Damit bekommt man zur reellen Zahlenstrahl-Achse eine dazu senkrecht stehende imaginäre Achse. Die damit aufgespannte Ebene heißt die „Gauß’sche Zahlenebene“ (vgl. Abbildung 12.3.)

Abbildung 12.3: Gauß’sche Zahlenebene



Quelle: Eigene Darstellung

Durch die Orthogonalität der beiden Achsen sind die reellen und die imaginären Zahlen voneinander völlig unabhängig.

Bislang haben wir nur die rein imaginären Zahlen als die Lösungen von Wurzeln aus negativen Zahlen betrachtet. Betrachten wir nunmehr die quadratische Gleichung

$$x^2 - 2 \cdot x + 2 = 0 \tag{12.3}$$

Der Ansatz über die bekannte Formel zur Lösung quadratischer Gleichungen führt zu:

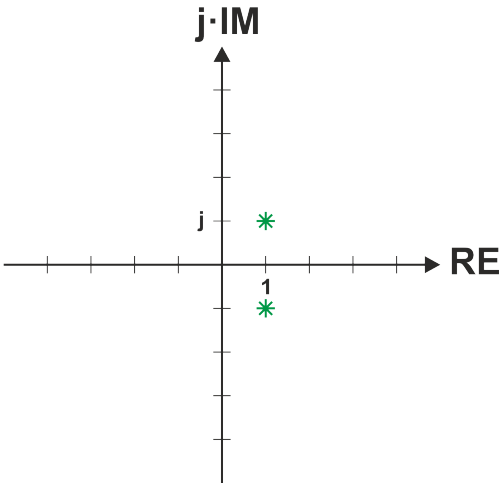
$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{2}{2} \pm \frac{\sqrt{-4}}{2} \\ &= 1 \pm \sqrt{-1} \end{aligned} \tag{12.4}$$

Mit der oben getroffenen Definition $\sqrt{-1} = \mathrm{j}$ wird aus Gleichung (12.4)):

$$x_{1,2} = 1 \pm \mathrm{j} \tag{12.5}$$

Es liegt nun nahe, diese Lösungen wie in Abbildung 12.4 in der Gauß’schen[12.2] Zahlenebene darzustellen.

Abbildung 12.4: Lösungen von $x^2 - 2 \cdot x + 2 = 0$



Quelle: Eigene Darstellung

[12.1] Man beachte: Die imaginäre Einheit i bzw. j wird nicht *kursiv*, sondern in Steilschrift geschrieben

[12.2] Johann Carl Friedrich Gauß (latinisiert Carolus Fridericus Gauss; * 30. April 1777 in Braunschweig; † 23. Februar 1855 in Göttingen) war ein deutscher Mathematiker, Astronom, Geodät und Physiker. Wegen seiner überragenden wissenschaftlichen Leistungen galt er bereits zu seinen Lebzeiten als Princeps Mathematicorum („Fürst der Mathematiker“).

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Derartige Zahlen, die aus einem Realteil RE (im Beispiel +1) und einem Imaginärteil IM (im Beispiel +1 bzw.−1) bestehen, nennt man **komplexe Zahlen**. Die Menge aller derartigen Zahlen bilden den Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C} := \left\{ \underline{z} = x + \mathrm{j} \cdot y \mid x, y \in \mathbb{R}; \mathrm{j} = \sqrt{-1} \right\} \tag{12.6}$$

12.2 Die Eulersche Formel

Im nebenstehenden Beispiel Abbildung 12.5 ist die komplexe Zahl $\underline{z} = 4 + \mathrm{j} \cdot 2$ dargestellt[12.3]. Diese hat den Realteil $\mathrm{RE}(\underline{z}) = 4$ und den Imaginärteil $\mathrm{IM}(\underline{z}) = 2$. Der rot eingezeichnete Ortsvektor $\overrightarrow{OZ}$ bildet mit der reellen Achse der Gauß'schen Zahlenebene den Winkel φ.

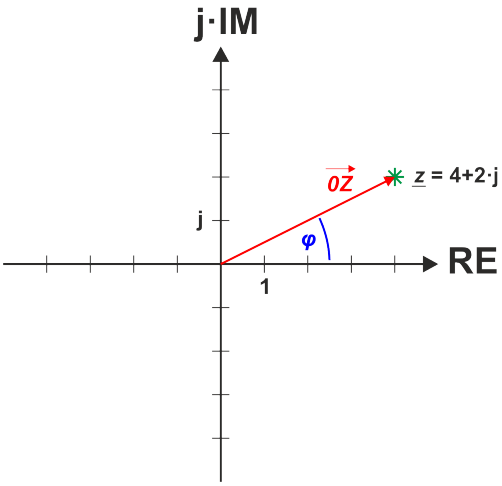
Die Anwendung des Satzes des Pythagoras[12.4] liefert für die Länge von $\overrightarrow{OZ}$:

$$r = |\overrightarrow{OZ}| = \sqrt{\mathrm{RE}\,(\underline{z})^2 + \mathrm{IM}\,(\underline{z})^2} \tag{12.7}$$

Im Beispiel $\underline{z} = 4 + \mathrm{j} \cdot 2$ ergibt dies:

$$r = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2 \cdot \sqrt{5} \tag{12.8}$$

Abbildung 12.5: Die komplexe Zahl $\underline{z} = 4 + \mathrm{j} \cdot 2$



Quelle: Eigene Darstellung

Die Anwendung elementarer trigonometrischer Beziehungen liefert:

$$\begin{aligned} \mathrm{RE}\,(\underline{z}) &= |\overrightarrow{OZ}| \cdot \cos(\varphi) = r \cdot \cos(\varphi) \\ \mathrm{IM}\,(\underline{z}) &= |\overrightarrow{OZ}| \cdot \sin(\varphi) = r \cdot \sin(\varphi) \end{aligned} \tag{12.9}$$

Mit

$$\underline{z} = \sigma + \mathrm{j} \cdot \omega \quad \Rightarrow \quad \mathrm{RE}\,(\underline{z}) = \sigma;\ \mathrm{IM}\,(\underline{z}) = \omega \tag{12.10}$$

können wir also schreiben:

$$\begin{aligned} &\underline{z} = \sigma + \mathrm{j} \cdot \omega = r \cdot \cos(\varphi) + \mathrm{j} \cdot r \cdot \sin(\varphi) = r \cdot \left(\cos(\varphi) + \mathrm{j} \cdot \sin(\varphi)\right) \\ &\text{mit } r = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} \text{ und } \varphi = \arctan\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) \end{aligned} \tag{12.11}$$

[12.3] Komplexe Variablen können gemäß DIN 1304-1 bzw. DIN 5483-3 zwecks Unterscheidbarkeit von reellen Variablen unterstrichen werden. Die imaginäre Einheit i bzw. j ist gemäß DIN 1304, DIN 1338 bzw. ISO 80000-1:2013 stets in Steilschrift (also nicht *kursiv*) zu schreiben.

[12.2] Pythagoras von Samos (* um 570 v. Chr. auf Samos; † nach 510 v. Chr. in Metapont in der Basilicata) war ein antiker griechischer Philosoph (Vorsokratiker) und Gründer einer einflussreichen religiös-philosophischen Bewegung.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Den in Gleichung (12.11) rot eingefärbten Teil nennt man die **trigonometrische Darstellungsform** einer komplexen Zahl $\underline{z}$.

Leonhard Euler[12.3] hat die Beziehung

$$e^{j\cdot\varphi} = \cos(\varphi) + j\cdot\sin(\varphi) \tag{12.12}$$

gezeigt. Der Beweis hierfür lässt sich recht einfach anhand der Taylor-Reihenentwicklung nach φ für $e^{j\cdot\varphi}$ und anschließendem Vergleich mit den Reihenentwicklungen für sin () und cos () finden.

Mit dieser Euler'schen Formel (12.12) kommen wir zu einer dritten Darstellungsmöglichkeit für komplexe Zahlen, der in Gleichung (12.13) rot eingefärbten **Exponentialdarstellung**:

$$\begin{aligned}&\underline{z} = \sigma + j\cdot\omega = r\cdot e^{j\cdot\varphi}\\ &\text{mit } r = \sqrt{\sigma^2+\omega^2} \text{ und } \varphi = \arctan\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)\end{aligned} \tag{12.13}$$

Die Umrechnungen zwischen den Darstellungsformen seien hier kurz zusammen gefasst:

Tabelle 12.1: Umrechnung zwischen den Darstellungsformen einer komplexen Zahl

Kartesische Form	Trigonometrische Form	Exponentialform
$\underline{z} = \sigma + j\cdot\omega$	$\underline{z} = r\cdot(\cos(\varphi) + j\cdot\sin(\varphi))$	$\underline{z} = r\cdot e^{j\cdot\varphi}$
	$r = \sqrt{\sigma^2+\omega^2}$	$r = \sqrt{\sigma^2+\omega^2}$
	$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)$	$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)$
$\underline{z} = \sigma + j\cdot\omega$	$\underline{z} = r\cdot(\cos(\varphi) + j\cdot\sin(\varphi))$	$\underline{z} = r\cdot e^{j\cdot\varphi}$
$\sigma = r\cdot\cos(\varphi)$		
$\omega = r\cdot\sin(\varphi)$		

Quelle: Eigene Darstellung

[12.3] Leonhard Euler (* 15. April 1707 in Basel; † 7. September (jul.)/ 18. September 1783 (greg.) in Sankt Petersburg) war ein Schweizer Mathematiker und Physiker. Wegen seiner Beiträge zur Analysis, zur Zahlentheorie und zu vielen weiteren Teilgebieten der Mathematik gilt er als einer der bedeutendsten Mathematiker.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

12.3 Rechnen mit komplexen Zahlen

Tabelle 12.2: Rechenregeln für komplexe Zahlen

Operation	Kartesische Koordinaten: $\underline{Z}_1 = a + \mathrm{j}\cdot b \quad \underline{Z}_2 = c + \mathrm{j}\cdot d$	Polarkoordinaten: $\underline{Z}_1 = r_1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\varphi_1} \quad \underline{Z}_2 = r_2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\varphi_2}$
Betrag	$\lvert\underline{Z}_1\rvert = \sqrt{a^2+b^2}$	$\lvert\underline{Z}_1\rvert = r_1$
Argument	$\arg(\underline{Z}_1) = \angle\underline{Z}_1 = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ [6]	$\arg(\underline{Z}_1) = \angle\underline{Z}_1 = \varphi_1$
Real- und Imaginärteil	$\mathrm{RE}(\underline{Z}_1) := \Re(\underline{Z}_1) = a$ $\mathrm{IM}(\underline{Z}_1) := \Im(\underline{Z}_1) = b$	$\mathrm{RE}(\underline{Z}_1) := \Re(\underline{Z}_1) = r_1\cdot\cos(\varphi_1)$ $\mathrm{IM}(\underline{Z}_1) := \Im(\underline{Z}_1) = r_1\cdot\sin(\varphi_1)$
Umrechnung	$\underline{Z}_1 = r_1\cdot\cos(\varphi_1) + \mathrm{j}\cdot r_1\cdot\sin(\varphi_1)$	$\underline{Z}_1 = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\arctan\left(\frac{b}{a}\right)}$
Konjugiert komplexe Zahl	$\underline{Z}_1^{\,*} = a - \mathrm{j}\cdot b$	$\underline{Z}_1^{\,*} = r_1\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\cdot\varphi_1}$
Kehrwert	$\frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \mathrm{j}\cdot\frac{b}{a^2+b^2}$	$\frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{r_1}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\cdot\varphi_1}$
Addition	$\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = (a+c) + \mathrm{j}\cdot(b+d)$	Nicht empfohlen [7]
Subtraktion	$\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2 = (a-c) + \mathrm{j}\cdot(b-d)$	Nicht empfohlen
Multiplikation	$\underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_2 = (ac-bd) + \mathrm{j}\cdot(ad+bc)$	$\underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_2 = r_1\cdot r_2\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot(\varphi_1+\varphi_2)}$
Division	$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{a\cdot c + b\cdot d}{c^2+d^2} + j\cdot\frac{b\cdot c - a\cdot d}{c^2+d^2}$	$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot(\varphi_1-\varphi_2)}$
Potenz	Nicht empfohlen [8]	$\underline{Z}_1^{\,n} = r_1^{\,n}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot n\cdot\varphi_1} \quad (n\in\mathbb{N})$ $\underline{a}^{\underline{z}} = \mathrm{e}^{\underline{z}\cdot\ln(\underline{a})} \quad (\underline{a},\underline{z}\in\mathbb{C})$
Wurzel	Nicht empfohlen	$\sqrt[n]{\underline{z}} = \sqrt[n]{r\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\varphi}} = \sqrt[n]{r}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\frac{\varphi+2\cdot k\cdot\pi}{n}}$ mit k = 0, 1, 2, …, n-1
Logarithmus	Nicht empfohlen	$\ln(\underline{z}) = \ln(\lvert\underline{z}\rvert) + \mathrm{j}\cdot\arg(\underline{z})$ Sonderfall: Logarithmus negativer Zahlen $x\in\mathbb{R}$: $\ln(-x) = \ln(\lvert -x\rvert) + \mathrm{j}\cdot\pi$

Quelle: Eigene Darstellung 12.4 12.5 12.6

[12.4] Beachten Sie die Fallunterscheidungen der inversen Tangens-Funktion!

[12.5] Addition und Subtraktion komplexer Zahlen macht man üblicherweise in kartesischen Koordinaten, weil sich in Polarkoordinaten sehr unhandliche „Bandwurm“-Ausdrücke ergeben.

[12.6] Höhere Operationen mit komplexen Zahlen macht man üblicherweise in Polarkoordinaten, weil sich in kartesischen Koordinaten sehr unhandliche „Bandwurm“-Ausdrücke ergeben.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

12.4 Ortskurven

Sei $\underline{z}$ eine komplexwertige Funktion, die von einem reellen Parameter t abhängt:

$$\underline{z} = \underline{z}(t) = \sigma(t) + \mathrm{j} \cdot \omega(t) \tag{12.14}$$

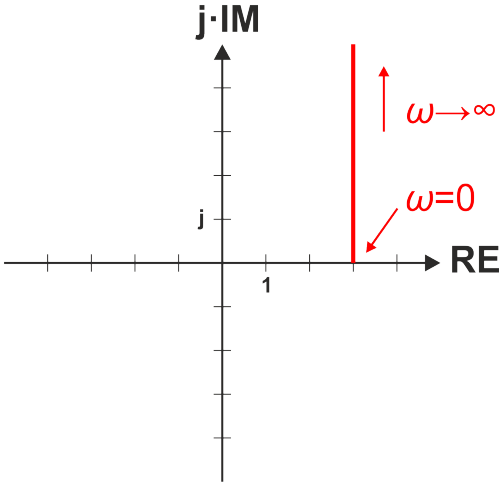
Wenn man die Bahn zeichnet, auf der der Punkt $\underline{z}(t)$ in der Gauß'schen Zahlenebene bei einer Änderung des Parameters t verläuft, erhält man die **Ortskurve** von $\underline{z}(t)$.

Beispielsweise gilt für die Impedanz der Serienschaltung eines Ohm'schen Widerstands R mit einer Induktivität L und dem Parameter ω:

$$\underline{Z} = \underline{Z}(\omega) = R + \mathrm{j} \cdot \omega \cdot L \tag{12.15}$$

Diese ist von der Kreisfrequenz ω abhängig. Die Ortskurve von $\underline{Z}$ in Abhängigkeit vom Parameter ω ist damit eine parallel zur imaginären Achse verlaufende Halbgerade im ersten Quadranten der Gauß'schen Zahlenebene.
Die Abbildung 12.6 zeigt diese Ortskurve für $R = 3$.

Abbildung 12.6: Ortskurve (1)



Quelle: Eigene Darstellung

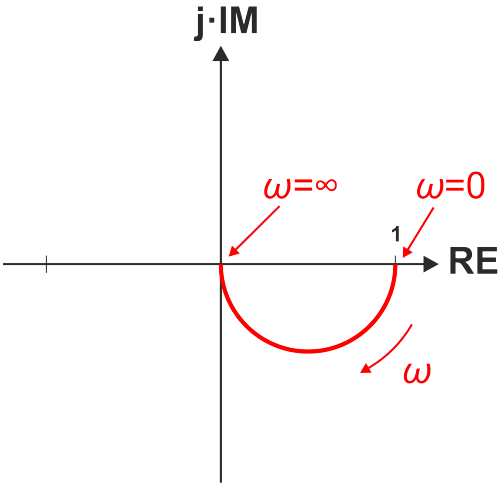
Dazu auch noch ein zweites Beispiel:

Für die Übertragungsfunktion H eines aus einem Ohm'schen Widerstand R und einem Kondensator C bestehenden Tiefpasses gilt:

$$\underline{H} = \underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + \mathrm{j} \cdot \omega \cdot R \cdot C} \tag{12.16}$$

Diese ist von der Kreisfrequenz ω abhängig. Die Ortskurve von $\underline{H}$ in Abhängigkeit vom Parameter ω ist ein Halbkreis im vierten Quadranten der Gauß'schen Zahlenebene.
Die Abbildung 12.7 zeigt diese Ortskurve.

Abbildung 12.7: Ortskurve (2)



Quelle: Eigene Darstellung

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

12.5 Pol-Nullstellen-Diagramme

Bei der mathematischen Betrachtung dynamischer Systeme bedient man sich mit Vorteil der Laplace-Transformation. Im Ergebnis erhält man in der Regel gebrochen-rationale Funktionen einer komplexwertigen Variablen $\underline{s}$, also Funktionen des Typs:

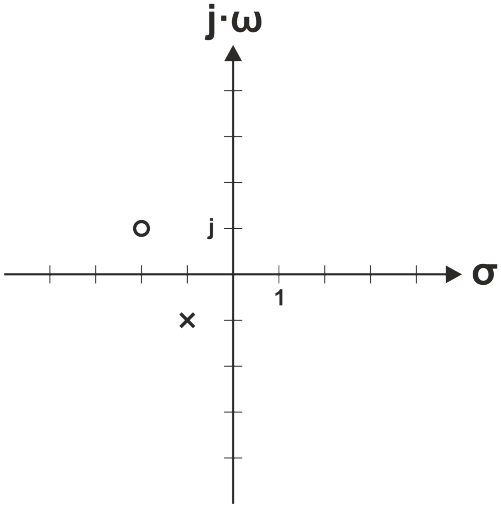
$$\underline{H}(\underline{s}) = \frac{\sum_{i=0}^{m} a_i \cdot \underline{s}^i}{\sum_{i=0}^{n} b_i \cdot \underline{s}^i} \quad \text{mit} \quad \underline{s} = \sigma + \mathrm{j} \cdot \omega \tag{12.17}$$

Zur weiteren Diskussion und Charakterisierung solcher Systeme ist es im Allgemeinen nicht notwendig, die in der komplexen $\underline{s}$-Bildebene ermittelte Systemfunktion $\underline{H}(\underline{s})$ wieder in den reellen t-Bereich zurück zu transformieren. Die interessierenden Aussagen lassen sich aus der Analyse der Pol- und der Nullstellen der komplexen System-Übertragungsfunktion $\underline{H}(\underline{s})$ gewinnen.

Zur Visualisierung dient das sogenannte **Pol-Nullstellen-Diagramm**. Dieses zeigt in der komplexen Gauß'schen Zahlenebene die Lage der Pol- und der Nullstellen.
Polstellen sind diejenigen komplexen Argumente der Systemfunktion, für welche der Betrag der Funktion über alle Maßen wächst. Sie werden üblicherweise durch ein Kreuz gekennzeichnet.
Bei den Nullstellen wird die Systemfunktion 0. Sie werden üblicherweise mit einem Kreis gekennzeichnet.
Im Beispiel der Abbildung 12.8 ist eine Nullstelle bei $-2+\mathrm{j}$ und eine Polstelle bei $-1-\mathrm{j}$. Die zugehörige Funktion lautet damit:

$$\underline{H}(\underline{s}) = \frac{\underline{s}+2-\mathrm{j}}{\underline{s}+1+\mathrm{j}} \qquad (\underline{s} \in \mathbb{C}) \tag{12.18}$$

Abbildung 12.8: PN-Diagramm (1)

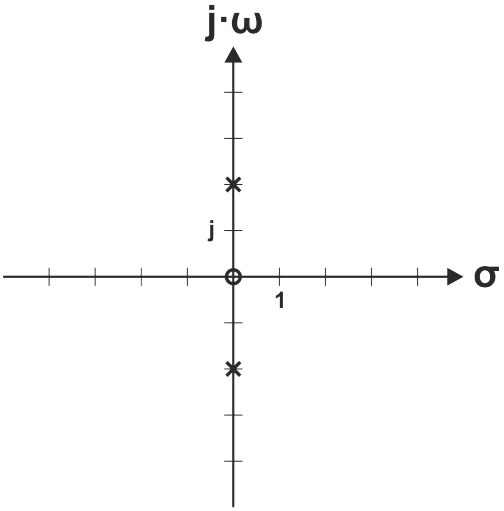


Quelle: Eigene Darstellung

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Abbildung 12.9: PN-Diagramm (2)

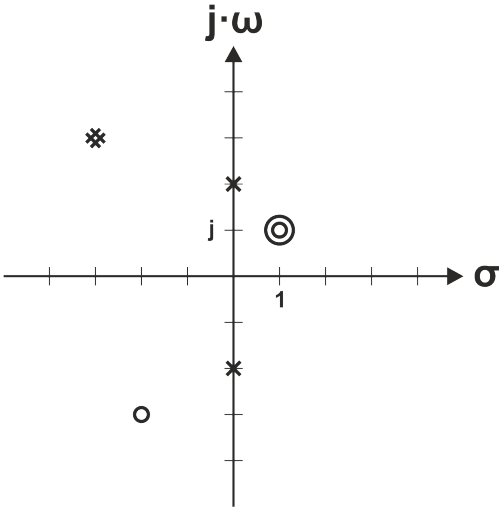


Quelle: Eigene Darstellung

Das rechte Diagramm Abbildung 12.9 zeigt die Pol- und Nullstellen der Funktion

$$\underline{H}(\underline{s}) = \frac{\underline{s}}{\underline{s}^2 + 4} \qquad (\underline{s} \in \mathbb{C}) \tag{12.19}$$

Abbildung 12.10: PN-Diagramm (3)



Quelle: Eigene Darstellung

Mehrfache Polstellen werden durch ein Doppelkreuz und mehrfache Nullstellen durch einen Doppelkreis gekennzeichnet. In der Diagramm-Legende ist darauf hin zu weisen, wieviel-fach die Mehrfach-Pol- bzw. –Nullstellen sind. Beispielsweise soll das untere PN-Diagramm Abbildung 12.10 bei $+2 \cdot \mathrm{j}$ und $-2 \cdot \mathrm{j}$ je eine einfache Polstelle, bei $-3 + 3 \cdot \mathrm{j}$ eine zweifache Polstelle, bei $-2 + 3 \cdot \mathrm{j}$ eine einfache Nullstelle und bei $1 + \mathrm{j}$ eine dreifache Nullstelle zeigen.
Die zugehörige System-Übertragungsfunktion $\underline{H}(\underline{s})$ lautet damit:

$$\underline{H}(\underline{s}) = \frac{(\underline{s} + 2 + 3 \cdot \mathrm{j}) \cdot (\underline{s} - 1 - \mathrm{j})^3}{(\underline{s}^2 + 4) \cdot (\underline{s} + 3 - 3 \cdot \mathrm{j})^2} \tag{12.20}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

13 Lineare Gleichungssysteme

Viele Aufgabenstellungen führen auf lineare Gleichungssysteme (LGS), das sind mehrere Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten. Gesucht ist eine Lösung, die alle Einzelgleichungen des Gleichungssystems erfüllt.

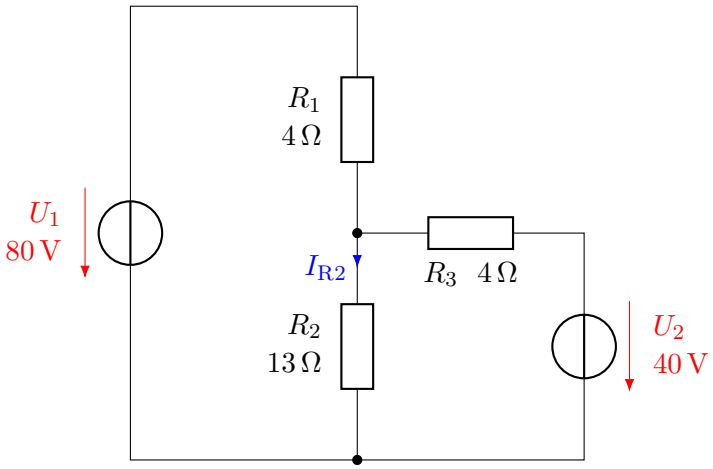
Man kann zeigen: Damit genau eine Lösung überhaupt existiert, muss die Anzahl der Gleichungen gleich der Anzahl der Unbekannten sein (notwendige Bedingung).

Wir beschränken uns im Folgenden auf Gleichungssysteme, die genau eine Lösung haben.

Hierfür wählen wir ein praktisches Beispiel aus der Elektrotechnik:

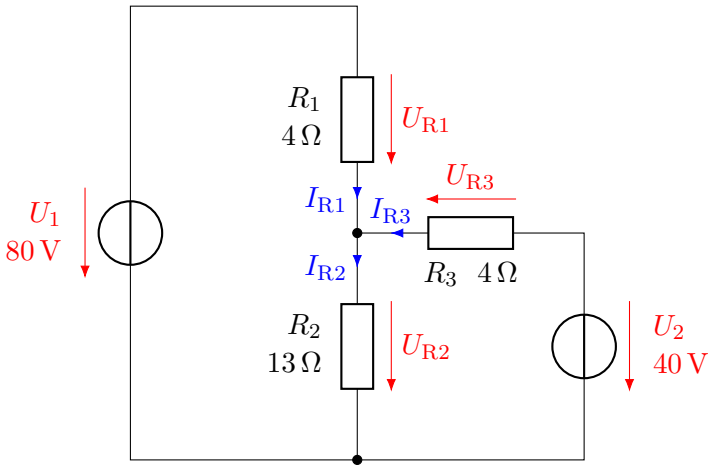
Im nebenstehenden Netzwerk sind U_1, U_2, R_1, R_2 und R_3 gegeben. Gesucht ist z. B. der Strom I_{R2} durch den Widerstand R_2.

Wir zeichnen zunächst die kompletten Spannungs- und Strompfeile ein. Hierbei verwenden wir z. B. konsequent das Verbraucher-Zählpfeilsystem (Spannungs- und Strompfeil am Verbraucher gleich gerichtet).



Die Richtung von I_{R2} ist in der Aufgabenstellung vorgegeben; die Richtungen der anderen Ströme wählen wir willkürlich.

Wir stellen zunächst die beiden Maschengleichungen und die Knotengleichung auf (1. und 2. Kirchhoff'scher Satz):



$$U_1 - U_{R2} - U_{R1} = 0 \tag{13.1a}$$

$$U_2 - U_{R2} - U_{R3} = 0 \tag{13.1b}$$

$$I_{R1} - I_{R2} + I_{R3} = 0 \tag{13.1c}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Da nach dem Strom I_{R2} gefragt ist, ersetzen wir die unbekannten Spannungen U_{R1}, U_{R2} und U_{R3} unter Anwendung des Ohm'schen Gesetzes durch die jeweiligen Ströme:

Allgemeine Gleichungen

$$U_1 - I_{R2} \cdot R_2 - I_{R1} \cdot R_1 = 0 \tag{13.2a}$$
$$U_2 - I_{R2} \cdot R_2 - I_{R3} \cdot R_3 = 0 \tag{13.2b}$$
$$I_{R1} - I_{R2} + I_{R3} = 0 \tag{13.2c}$$

Zahlenwertgleichungen (alle Werte in V, A, Ω)

$$80 - 13 \cdot I_{R2} - 4 \cdot I_{R1} = 0 \tag{13.3a}$$
$$40 - 13 \cdot I_{R2} - 4 \cdot I_{R3} = 0 \tag{13.3b}$$
$$I_{R1} - I_{R2} + I_{R3} = 0 \tag{13.3c}$$

Mithin haben wir ein System von drei linearen Gleichungen mit drei Unbekannten, welches mit den bekannten Methoden lösbar ist:

- Einsetzungsverfahren
- Gleichsetzungsverfahren
- Additionsverfahren
- Gauß'sches Eliminationsverfahren
- Gauß-Jordan-Verfahren
- Cramer'sche Regel
- Inversion der Koeffizientenmatrix

In diesem Brückenkurs-Skript werden lediglich die drei ersten (aus der Schulmathematik bekannten) Verfahren behandelt.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

13.1 Einsetzungsverfahren

Wir lösen eine der Gleichungen nach einer der Unbekannten auf und setzen den sich ergebenden Term in die verbleibenden Gleichungen ein.

Damit haben wir den Grad des Gleichungssystems (Anzahl Gleichungen, Anzahl Unbekannte) um 1 reduziert.

Dieses Verfahren wiederholen wir so lange, bis schließlich nur noch eine Gleichung mit einer Unbekannten übrig ist, deren Wert damit feststeht.

Den gefundenen Wert setzen wir jetzt im „Rückwärtsgang“ in die verbleibende Gleichung des Gleichungssystems nächst höherem Grades ein.

Auch dieses wiederholen wir so lange, bis alle Unbekannten berechnet sind.

In unserem Beispiel:

$$80 - 13 \cdot I_{R2} - 4 \cdot I_{R1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad I_{R1} = \frac{80 - 13 \cdot I_{R2}}{4} \tag{13.4a}$$

$$40 - 13 \cdot I_{R2} - 4 \cdot I_{R3} = 0 \tag{13.4b}$$

$$I_{R1} - I_{R2} + I_{R3} = 0 \tag{13.4c}$$

Einsetzen der umgestellten Gleichung (13.4a) in die Gleichungen (13.4b) und (13.4c) ergibt:

$$40 - 13 \cdot I_{R2} - 4 \cdot I_{R3} = 0 \tag{13.5b}$$

$$\frac{80 - 13 \cdot I_{R2}}{4} - I_{R2} + I_{R3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad I_{R3} = I_{R2} - \frac{80 - 13 \cdot I_{R2}}{4} = I_{R2} - 20 + \frac{13}{4} \cdot I_{R2} = \frac{17}{4} \cdot I_{R2} - 20 \tag{13.5c}$$

Einsetzen der Gleichung (13.5c) in die Gleichung (13.5b) ergibt:

$$40 - 13 \cdot I_{R2} - 4 \cdot \left(\frac{17}{4} \cdot I_{R2} - 20 \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 40 - 13 \cdot I_{R2} - 17 \cdot I_{R2} + 80 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 30 \cdot I_{R2} = 120 \quad \Leftrightarrow \quad I_{R2} = 4 \tag{13.6b}$$

Nun das Ganze rückwärts. Einsetzen von (13.6b) in die umgestellte Gleichung (13.5c) ergibt:

$$I_{R3} = \frac{17}{4} \cdot 4 - 20 = -3 \tag{13.7c}$$

Einsetzen von (13.6b) in die umgestellte Gleichung (13.4a) ergibt:

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

$$I_{\mathrm{R1}} = \frac{80 - 13 \cdot 4}{4} = 7 \tag{13.8a}$$

Also erhalten wir als Lösungen:

$$I_{\mathrm{R1}} = 7\,\mathrm{A} \tag{13.9a}$$
$$I_{\mathrm{R2}} = 4\,\mathrm{A} \tag{13.9b}$$
$$I_{\mathrm{R3}} = -3\,\mathrm{A} \tag{13.9c}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

13.2 Gleichsetzungsverfahren

Wir lösen alle Gleichungen nach einer der Unbekannten auf, wählen eine der Gleichungen aus und setzen den Lösungsterm für die Variable den Lösungstermen der verbleibenden Gleichungen gleich.

Damit haben wir den Grad des Gleichungssystems (Anzahl Gleichungen, Anzahl Unbekannte) um 1 reduziert.

Dieses Verfahren wiederholen wir so lange, bis schließlich nur noch eine Gleichung mit einer Unbekannten übrig ist, deren Wert damit feststeht.

Diesen Wert setzen wir in die gleichgesetzten Term-Gleichungen ein und wiederholen das gesamte Verfahren, bis schließlich alle Unbekannten bestimmt sind.

In unserem Beispiel:

$$80 - 13 \cdot I_{R2} - 4 \cdot I_{R1} = 0 \quad \Leftrightarrow I_{R2} = \frac{80 - 4 \cdot I_{R1}}{13} \tag{13.10a}$$

$$40 - 13 \cdot I_{R2} - 4 \cdot I_{R3} = 0 \quad \Leftrightarrow I_{R2} = \frac{40 - 4 \cdot I_{R3}}{13} \tag{13.10b}$$

$$I_{R1} - I_{R2} + I_{R3} = 0 \quad \Leftrightarrow I_{R2} = I_{R1} + I_{R3} \tag{13.10c}$$

Wir wählen z. B. die Gleichung (13.10c) und setzen den Lösungsterm für I_{R2} den Lösungstermen aus Gleichung (13.10a) und (13.10b) gleich:

$$I_{R1} + I_{R3} = \frac{80 - 4 \cdot I_{R1}}{13} \Leftrightarrow 13 \cdot I_{R1} + 13 \cdot I_{R3} = 80 - 4 \cdot I_{R1}$$
$$\Leftrightarrow 17 \cdot I_{R1} + 13 \cdot I_{R3} - 80 = 0 \tag{13.11a}$$

$$I_{R1} + I_{R3} = \frac{40 - 4 \cdot I_{R3}}{13} \Leftrightarrow 13 \cdot I_{R1} + 13 \cdot I_{R3} = 40 - 4 \cdot I_{R3}$$
$$\Leftrightarrow 13 \cdot I_{R1} + 17 \cdot I_{R3} - 40 = 0 \tag{13.11b}$$

Wir stellen die Gleichungen (13.11a) und (13.11b) z. B. nach I_{R1} um und setzen gleich:

$$I_{R1} = \frac{-13 \cdot I_{R3} + 80}{17} \tag{13.12a}$$

$$I_{R1} = \frac{-17 \cdot I_{R3} + 40}{13} \tag{13.12b}$$

$$\frac{-13 \cdot I_{R3} + 80}{17} = \frac{-17 \cdot I_{R3} + 40}{13} \Leftrightarrow I_{R3} = -3 \tag{13.12d}$$

In der Praxis wird man jetzt nicht erneut ein Gleichungssystem aufstellen und das Verfahren wiederholen, sondern auf das Einsetzungsverfahren wechseln und z. B. I_{R1} durch Einsetzen des gefundenen Wertes $I_{R3} = -3\,\mathrm{A}$ in eine der Gleichungen (13.11a) oder (13.11b) ausrechnen.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

13.3 Additionsverfahren

Beim Additionsverfahren werden die Variablen schrittweise durch geschicktes Miteinander-Addieren der Gleichungen oder Vielfachen der Gleichungen eliminiert.

Dabei nutzt man die Tatsache, dass eine Gleichung immer noch richtig bleibt, wenn man auf beiden Seiten Dasselbe hinzu addiert, oder beide Seiten der Gleichung mit Demselben multipliziert.

Man schreibt die Gleichungen nach Unbekannten geordnet übereinander.

In unserem Beispiel:

I_{R1}	I_{R2}	I_{R3}	Linear	Rechts	
$-4 \cdot I_{R1}$	$-13 \cdot I_{R2}$		$+80$	$=0$	(13.13a)
	$-13 \cdot I_{R2}$	$-4 \cdot I_{R3}$	$+40$	$=0$	(13.13b)
I_{R1}	$-I_{R2}$	$+I_{R3}$		$=0$	(13.13c)

Wir multiplizieren Gleichung (13.13c) mit 4:

I_{R1}	I_{R2}	I_{R3}	Linear	Rechts	
$-4 \cdot I_{R1}$	$-13 \cdot I_{R2}$		$+80$	$=0$	(13.14a)
	$-13 \cdot I_{R2}$	$-4 \cdot I_{R3}$	$+40$	$=0$	(13.14b)
$4 \cdot I_{R1}$	$-4 \cdot I_{R2}$	$+4 \cdot I_{R3}$		$=0$	(13.14c)

Wir ersetzen die Gleichung (13.14a) durch die Summe der Gleichungen (13.14a) und (13.14c), und streichen anschließend Gleichung (13.14c):

I_{R1}	I_{R2}	I_{R3}	Linear	Rechts	
	$-17 \cdot I_{R2}$	$+4 \cdot I_{R3}$	$+80$	$=0$	(13.15a)
	$-13 \cdot I_{R2}$	$-4 \cdot I_{R3}$	$+40$	$=0$	(13.15b)
					(13.15c)

Wie man sieht, haben wir durch diese Schritte die Variable I_{R1} eliminiert und den Grad unseres Gleichungssystems um 1 reduziert.

Wir wiederholen das Verfahren und addieren die Gleichung (13.15b) zur Gleichung (13.15a); anschließend streichen wir Gleichung (13.15a):

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

I_{R1}	I_{R2}	I_{R3}	Linear	Rechts			
	$-30 \cdot I_{R2}$		$+120$	$=0$	$\Leftrightarrow$	$I_{R2} = 4$	(13.16b)

In der Praxis wird man auch hier nicht erneut ein Gleichungssystem aufstellen und das Verfahren wiederholen, sondern auf das Einsetzungsverfahren wechseln und I_{R3} durch Einsetzen des gefundenen Wertes $I_{R2} = 4\,\text{A}$ in eine der Gleichungen (13.13a) oder (13.13b) ausrechnen.

13.4 Mögliche Lösungen von Gleichungssystemen

13.4.1 Eindeutige Lösung

Gegeben ist das Gleichungssystem

$$2 \cdot x + y = 4 \tag{13.17}$$
$$3 \cdot x + 2 \cdot y = 5 \tag{13.18}$$

Wir entscheiden uns dafür, die Unbekannte x zu eliminieren. Dazu berechnen wir zunächst das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der Faktoren vor der Unbekannten x. Das kleinste gemeinsame Vielfache von 2 und 3 ist 6. Damit in beiden Gleichungen eine 6 vor dem x steht, müssen wir die erste Gleichung mit 3 multiplizieren und die zweite Gleichung mit 2.

$$2 \cdot x + y = 4 \qquad || \cdot 3 \tag{13.19}$$
$$3 \cdot x + 2 \cdot y = 5 \qquad || \cdot 2 \tag{13.20}$$

Auf diese Weise erhalten wir

$$6 \cdot x + 3 \cdot y = 12 \tag{13.21}$$
$$6 \cdot x + 4 \cdot y = 10 \tag{13.22}$$

Im nächsten Schritt ziehen wir von der ersten Zeile die zweite Zeile ab, um die Unbekannte x in der ersten Zeile zu eliminieren.

$$6 \cdot x + 3 \cdot y = 12 \qquad |\text{1. Zeile - 2. Zeile} \tag{13.23}$$
$$6 \cdot x + 4 \cdot y = 10 \tag{13.24}$$

Auf diese Weise erhalten wir

$$-y = 2$$

Jetzt lösen wir die Gleichung nach y auf, dazu müssen wir nur noch mit -1 multiplizieren.

$$-y = 2 \qquad || \cdot (-1)$$

$$\boxed{y = -2}$$

Nachdem wir für die Unbekannte y eine Lösung berechnet haben, ist nun die Unbekannte x an der Reihe. Dazu setzen wir den eben berechneten y-Wert in eine der beiden ursprünglichen Gleichungen ein. Wir entscheiden uns für die erste Gleichung.

$$2 \cdot x + y = 4 \qquad |\text{mit } y = -2$$
$$2 \cdot x - 2 = 4$$

Jetzt müssen wir noch die Gleichung nach x auflösen.

$$2 \cdot x - 2 = 4 \qquad || + 2$$
$$2 \cdot x = 6 \qquad || : 2$$

$$\boxed{x = 3}$$

Die Lösung des Gleichungssystems lautet: $x = 3$ und $y = -2$

Es handelt sich um eine eindeutige Lösung.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Definition 13.1: Eindeutige Lösung

Es gibt eine eindeutige Lösung, wenn der Rang der (erweiterten) Koeffizientenmatrix der Anzahl der Unbekannten n entspricht.

Anmerkung: Dies ist genau dann der Fall, wenn alle Gleichungen linear unabhängig sind.

$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|b) = n$

13.4.2 Unendlich viele Lösungen

Gegeben ist das Gleichungssystem

$$9 \cdot x + 6 \cdot y = 15 \tag{13.25}$$
$$3 \cdot x + 2 \cdot y = 5 \tag{13.26}$$

Wir entscheiden uns dafür, die Unbekannte x zu eliminieren. Dazu berechnen wir zunächst das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der Faktoren vor der Unbekannten x. Das kleinste gemeinsame Vielfache von 9 und 3 ist 9. Damit in beiden Gleichungen eine 9 vor dem x steht, müssen wir die zweite Gleichung mit 3 multiplizieren.

$$9 \cdot x + 6 \cdot y = 15 \tag{13.27}$$
$$3 \cdot x + 2 \cdot y = 5 \quad || \cdot 3 \tag{13.28}$$

Auf diese Weise erhalten wir

$$9 \cdot x + 6 \cdot y = 15 \tag{13.29}$$
$$9 \cdot x + 6 \cdot y = 15 \tag{13.30}$$

Im nächsten Schritt ziehen wir von der ersten Zeile die zweite Zeile ab, um die Unbekannte x in der ersten Zeile zu eliminieren.

$$9 \cdot x + 6 \cdot y = 15 \quad |\text{1. Zeile - 2. Zeile} \tag{13.31}$$
$$9 \cdot x + 6 \cdot y = 15 \tag{13.32}$$

Auf diese Weise erhalten wir

$0 = 0$

An dieser Stelle können wir nicht mehr weiterrechnen. Es handelt sich um eine allgemeingültige Aussage.

Das bedeutet, dass das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen besitzt.

Definition 13.2: Unendlich viele Lösungen

Es gibt unendlich viele Lösungen, wenn der Rang der (erweiterten) Koeffizientenmatrix kleiner ist als die Anzahl der Unbekannten n.

$\text{rang}(A) = \text{rang}(A|b) < n$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

13.4.3 Keine Lösungen

Gegeben ist das Gleichungssystem

$$6 \cdot x + 4 \cdot y = 8 \tag{13.33}$$
$$3 \cdot x + 2 \cdot y = 5 \tag{13.34}$$

Wir entscheiden uns dafür, die Unbekannte x zu eliminieren. Dazu berechnen wir zunächst das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der Faktoren vor der Unbekannten x. Das kleinste gemeinsame Vielfache von 6 und 3 ist 6. Damit in beiden Gleichungen eine 6 vor dem x steht, müssen wir die zweite Gleichung mit 2 multiplizieren.

$$6 \cdot x + 4 \cdot y = 8 \tag{13.35}$$
$$3 \cdot x + 2 \cdot y = 5 \quad || \cdot 2 \tag{13.36}$$

Auf diese Weise erhalten wir

$$6 \cdot x + 4 \cdot y = 8 \tag{13.37}$$
$$6 \cdot x + 4 \cdot y = 10 \tag{13.38}$$

Im nächsten Schritt ziehen wir von der ersten Zeile die zweite Zeile ab, um die Unbekannte x in der ersten Zeile zu eliminieren.

$$6 \cdot x + 4 \cdot y = 8 \quad |\text{1. Zeile - 2. Zeile} \tag{13.39}$$
$$6 \cdot x + 4 \cdot y = 10 \tag{13.40}$$

Auf diese Weise erhalten wir

$$0 = -2$$

An dieser Stelle können wir nicht mehr weiterrechnen. Es handelt sich um eine **falsche** Aussage.

Das bedeutet, dass das Gleichungssystem keine Lösung besitzt.

Definition 13.3: Keine Lösungen

Es gibt keine Lösung, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix A nicht dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|B)$ entspricht.

$\text{rang}(A) \neq \text{rang}(A|b)$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

14 Ungleichungen

14.1 Allgemeines zu Ungleichungen

Jede Ungleichung besteht aus zwei Termen, die durch eines der Vergleichzeichen

$<$ (Kleiner-Zeichen),
$\leq$ (Kleiner-Gleich-Zeichen),
$>$ (Größer-Zeichen) oder
$\geq$ (Größer-Gleich-Zeichen)

verbunden sind.[14.1]

Beispiele:

$$3 < 4 \tag{14.1}$$
$$x \geq 3{,}75 \tag{14.2}$$
$$(a+b) > (c+d) \tag{14.3}$$

Ungleichungen dienen der Formulierung und Untersuchung von Größenvergleichen.

Eigenschaften:

1. $a \leq a$ (Reflexivität).
2. Ist $a > b$ und $b > c$, dann ist $a > c$ (Transitivität). Die anderen Rechenzeichen sind ebenfalls transitiv.
3. Ist $a \leq b$ und $b \leq a$, dann gilt $a = b$ (Antisymmetrie).

[14.1] http://www.mathebibel.de/ungleichungen; abgerufen am 2017-07-27

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

14.2 Rechenregeln zu Ungleichungen

- Eine Ungleichung kann von beiden Seiten gelesen werden $a < b \quad \longleftrightarrow \quad b > a$
- Auf beiden Seiten einer Ungleichung darf dieselbe Zahl addiert werden:
  $a \leq b \quad \Rightarrow \quad a + c \leq b + c \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{B}$
- Zwei gleichgerichtete Ungleichungen dürfen addiert werden:
  $a \leq b \quad \text{und} \quad c \leq d \quad \Rightarrow \quad a + c \leq b + d$
  $a < b \quad \text{und} \quad c \leq d \quad \Rightarrow \quad a + c < b + d$
- Eine Ungleichung darf mit einer nichtnegativen (!) Zahl multipliziert werden:
  $a \leq b \quad \text{und} \quad c \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot c \leq b \cdot c$
- Wird eine Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert, so dreht sich das Ungleichheitszeichen um:
  $a \leq b \quad \text{und} \quad c \leq 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot c \geq b \cdot c$
- Wenn die Seiten der Ungleichung entweder beide positiv oder beide negativ sind, gilt: Bildet man auf beiden Seiten einer Ungleichung den Kehrwert, so dreht sich das Ungleichheitszeichen um:

$$a \leq b \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$$

Man kann die gleichen Umformungen vornehmen wie bei einer Gleichung, allerdings muss man bei der Multiplikation und bei der Division auf das Vorzeichen aufpassen!

In der Praxis führt dies häufig zu **Fallunterscheidungen**.

Rechenart	Regel	Beispiel
Addition	Man kann auf beiden Seiten der Ungleichung dieselbe Zahl oder denselben Term addieren.	$x - 3 \leq 4 \quad \vert + 3$ $x - 3 + 3 \leq 4 + 3$ $x \leq 7$
Subtraktion	Man kann auf beiden Seiten der Ungleichung dieselbe Zahl oder denselben Term abziehen.	$7 \cdot x - 3 > 4 \quad \vert - 4 \cdot x$ $3 \cdot x - 3 > 6 \quad \vert + 3$ $3 \cdot x > 9 \quad \vert : 3$ $x > 3$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Multiplikation	Man kann auf beiden Seiten der Ungleichung mit einer positiven Zahl multiplizieren. **Wenn man beide Seiten der Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert, so ändert sich das Ungleichheitszeichen!** • $<$ $\rightarrow$ $>$ • $>$ $\rightarrow$ $<$ • $\leq$ $\rightarrow$ $\geq$ • $\geq$ $\rightarrow$ $\leq$	$\frac{1}{3} \cdot x < 5 \quad \vert \cdot 3$ $3 \cdot x < 15$ $-\frac{1}{5}x > 2 \quad \vert \cdot (-5)$ $x > 10$
Division	Man kann auf beiden Seiten der Ungleichung durch eine positive Zahl dividieren. **Wenn man beide Seiten der Ungleichung durch eine negative Zahl dividiert, so ändert sich das Ungleichheitszeichen!** • $<$ $\rightarrow$ $>$ • $>$ $\rightarrow$ $<$ • $\leq$ $\rightarrow$ $\geq$ • $\geq$ $\rightarrow$ $\leq$	$4 \geq 5 \quad \vert : 8$ $\frac{1}{2} \geq x$ $-6 \cdot x \leq -12 \quad \vert : (-6)$ $x \geq 2$

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

14.3 Lineare Ungleichungen

Bei einer linearen Ungleichung handelt es sich um eine Ungleichung ersten Grades. „Erster Grad“ bedeutet, dass die Variable x lediglich in einfacher Ausführung vorkommt - also nicht potenziert (z. B. x^2).[14.2]

Beispiele für lineare Ungleichungen

$$x - 5 < 8 \tag{14.4}$$
$$7 \cdot x + 5 \geq 3 \cdot x - 4 \tag{14.5}$$
$$x - 3 \leq 3 \cdot (x - 1) + 5 \tag{14.6}$$

Normalformen linearer Ungleichungen

$$a \cdot x + b < 0 \tag{14.7}$$
$$a \cdot x + b > 0 \tag{14.8}$$
$$a \cdot x + b \leq 0 \tag{14.9}$$
$$a \cdot x + b \geq 0 \tag{14.10}$$

Jede lineare Ungleichung lässt sich in eine der obigen Darstellungen umformen. Diese Darstellungen bezeichnet man deshalb auch als die „Normalformen linearer Ungleichungen“.

Vorgehensweise

1. Ungleichung nach x auflösen

...dazu dürfen wir:

- auf beiden Seiten der Ungleichung eine Zahl addieren/subtrahieren
- beide Seiten der Ungleichung mit einer Zahl multiplizieren bzw. durch eine Zahl dividieren Wichtig: Multipliziert/dividiert man die Ungleichung mit einer negativen Zahl, dreht sich das Ungleichheitszeichen um!

Beispiel 1

$x - 5 < 8$

1.) Ungleichung nach x auflösen

$x - 5 < 8$

$x - 5 + 5 < 8 + 5$

$x < 13$

In Intervallschreibweise lautet die Lösung der linearen Ungleichung:
$\mathbb{L} =]-\infty; 13[$.

[14.2] http://www.mathebibel.de/lineare-ungleichungen; abgerufen am 2017-07-27

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beispiel 2

$x - 3 \leq 3 \cdot (x - 1) + 5$

1.) Ungleichung nach x auflösen

Klammer ausmultiplizieren

$$x - 3 \leq 3 \cdot (x - 1) + 5$$
$$x - 3 \leq 3 \cdot x + 3 \cdot (-1) + 5$$
$$x - 3 \leq 3 \cdot x - 3 + 5$$

Zusammenfassen

$$x - 3 \leq 3 \cdot x + 2$$

Ungleichung nach x auflösen

$$x - 3 \cdot x - 3 \leq 3 \cdot x - 3 \cdot x + 2$$
$$-2 \cdot x - 3 \leq 2$$
$$-2 \cdot x - 3 + 3 \leq 2 + 3$$
$$-2 \cdot x \leq 5$$

Um die Lösung zu erhalten, müssen wir durch -2 dividieren.
Wichtig: Bei der Division durch eine negative Zahl, dreht sich das Ungleichheitszeichen um!

$$\frac{-2 \cdot x}{-2} \geq \frac{5}{-2}$$
$$x \geq \frac{5}{-2}$$

oder in Dezimalschreibweise

$$x \geq -2,5$$

In Intervallschreibweise lautet die Lösung der linearen Ungleichung:
$\mathbb{L} = [-2,5; \infty[$.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

14.4 Quadratische Ungleichungen

Bei einer quadratischen Ungleichung handelt es sich um eine Ungleichung zweiten Grades. „Zweiter Grad“ bedeutet, dass die Variable x bis zur zweiten Potenz - also x^2 - vorkommt.[14.3]

Beispiele für lineare Ungleichungen

$$x^2 - 5 < 8 \tag{14.11}$$
$$7 \cdot x + 5 \geq 3 \cdot x^2 - 4 \tag{14.12}$$
$$x^2 - 3 \leq 3 \cdot (x - 1) + 5 \tag{14.13}$$

Normalformen linearer Ungleichungen

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c < 0 \tag{14.14}$$
$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c > 0 \tag{14.15}$$
$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c \leq 0 \tag{14.16}$$
$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c \geq 0 \tag{14.17}$$

Um Ungleichungen in Normalform zu bringen, dürfen wir...

- auf beiden Seiten der Ungleichung eine Zahl addieren/subtrahieren
- beide Seiten der Ungleichung mit einer Zahl multiplizieren bzw. durch eine Zahl dividieren **Wichtig**: Multipliziert/dividiert man die Ungleichung mit einer negativen Zahl, dreht sich das Ungleichheitszeichen um!

Vorgehensweise

1. Quadratische Gleichung lösen
2. Potenzielle Lösungsintervalle aufstellen
3. Überprüfen, welche Lösungsintervalle zur Lösung gehören

zu 1.)

Wir behandeln die Ungleichung als Gleichung, indem wir das Ungleichheitszeichen durch ein Gleichheitszeichen (=) ersetzen. Nach der Gestalt der quadratischen Gleichung lassen sich folgende vier Fälle unterscheiden:

1. $a \cdot x^2 = 0$
2. $a \cdot x^2 + c = 0$
3. $a \cdot x^2 + b \cdot x = 0$
4. $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$

[14.3] http://www.mathebibel.de/quadratische-ungleichungen; abgerufen am 2017-07-28

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

zu 2.)

Eine quadratische Gleichung besitzt entweder **keine Lösung**, **eine (doppelte) Lösung** oder **zwei Lösungen**.

Wenn es **keine Lösung** gibt, lautet die Lösung der Ungleichung: $\mathbb{L} = \{\}$.

Wenn es eine Lösung (x_1) gibt, lauten die potenziellen Lösungsintervalle:

$\mathbb{L}_1 =]-\infty; x_1[$ und $\mathbb{L}_2 =]x_1; \infty[$
wenn die Ungleichung ein $>$ (Größerzeichen) oder
$<$ (Kleinerzeichen) enthält

$\mathbb{L}_1 =]-\infty; x_1]$ und $\mathbb{L}_2 = [x_1; \infty[$,
wenn die Ungleichung ein $\geq$ (Größergleichzeichen) oder
$\leq$(Kleinergleichzeichen) enthält

Wenn es **zwei Lösungen** (x_1 und x_2) gibt, lauten die potenziellen Lösungsintervalle:

$\mathbb{L}_1 =]-\infty; x_1[$
$\mathbb{L}_2 =]x_1; x_2[$
und $\mathbb{L}_3 =]x_2; \infty[$
wenn die Ungleichung ein $>$ (Größerzeichen) oder
$<$(Kleinergleichzeichen) enthält

$\mathbb{L}_1 =]-\infty; x_1]$
$\mathbb{L}_2 = [x_1; x_2]$
und $\mathbb{L}_3 = [x_2; \infty[$
wenn die Ungleichung ein $\geq$ (Größergleichzeichen) oder
$\leq$ (Kleinergleichzeichen) enthält

zu 3.)

Um herauszufinden, welche Intervalle zur Lösung gehören, setzt man aus jedem Intervall eine Zahl in die Ungleichung ein.
Ist die Ungleichung erfüllt, gehört das jeweilige Intervall zur Lösung.
Hinweis: Die Intervallgrenzen eignen sich nicht zum Einsetzen in die Ungleichung!

Die Lösung der Ungleichung ist die **Vereinigungsmenge** der gültigen Lösungsintervalle.

1. Fall: $a \cdot x^2 = 0$

Gleichungen vom Typ $a \cdot x^2 = 0$ besitzen als einzige Lösung die Null.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beispiel 1

$4 \cdot x^2 > 0$

1.) Quadratische Gleichung lösen

$4 \cdot x^2 = 0 \qquad \rightarrow x_1 = 0$

2.) Potenzielle Lösungsintervalle aufstellen

$\mathbb{L}_1 =]-\infty; 0[$ und $\mathbb{L}_2 =]0; \infty[$

3.) Überprüfen, welche Lösungsintervalle zur Lösung gehören

Aus dem 1. Intervall $\mathbb{L}_1 =]-\infty; 0[$ setzen wir -1 in die Ungleichung ein: $4 \cdot x^2 > 0$ $4 \cdot (-1)^2 > 0 \qquad \rightarrow 4 > 0$ ✓

Aus dem 2. Intervall $\mathbb{L}_2 =]0; \infty[$ setzen wir 1 in die Ungleichung ein: $4 \cdot x^2 > 0$ $4 \cdot 1^2 > 0 \qquad \rightarrow 4 > 0$ ✓

Die Lösung der Ungleichung ist demnach $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 =]-\infty; 0[\cup]0; \infty[$

Beispiel 2

$-3 \cdot x^2 \leq 0$

1.) Quadratische Gleichung lösen

$-3 \cdot x^2 = 0 \qquad \rightarrow x_1 = 0$

2.) Potenzielle Lösungsintervalle aufstellen

$\mathbb{L}_1 =]-\infty; 0]$ und $\mathbb{L}_2 = [0; \infty[$

3.) Überprüfen, welche Lösungsintervalle zur Lösung gehören

Aus dem 1. Intervall $\mathbb{L}_1 =]-\infty; 0]$ setzen wir -1 in die Ungleichung ein: $-3 \cdot x^2 \leq 0$ $-3 \cdot (-1)^2 \leq 0 \qquad \rightarrow -3 \leq 0$ ✓

Aus dem 2. Intervall $\mathbb{L}_2 = [0; \infty[$ setzen wir 1 in die Ungleichung ein: $-3 \cdot x^2 \leq 0$ $-3 \cdot 1^2 \leq 0 \qquad \rightarrow -3 \leq 0$ ✓

Die Lösung der Ungleichung ist demnach $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 =]-\infty; 0] \cup [0; \infty[= \mathbb{R}$

2. Fall:

$a \cdot x^2 + c = 0$

Vorgehensweise

1. Quadratische Gleichung lösen
   - 1.1 Gleichung nach x^2 auflösen
   - 2.2 Wurzel ziehen
2. Potenzielle Lösungsintervalle aufstellen
3. Überprüfen, welche Lösungsintervalle zur Lösung gehören

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beispiel 1

$x^2 - 9 \geq 0$

1.1) Gleichung nach x^2 auflösen

$$
\begin{aligned}
&x^2 - 9 \geq 0 \\
&x^2 - 9 = 0 \qquad |+9 \\
&x^2 - 9 + 9 = +9 \\
&x^2 = 9
\end{aligned}
$$

1.2) Wurzel ziehen

$$
\begin{aligned}
&x^2 = 9 \qquad |\sqrt{\ } \\
&x = \pm\sqrt{9} \\
&x = \pm 3 \\
&\Rightarrow x_1 = -3 \\
&\Rightarrow x_2 = 3
\end{aligned}
$$

2.) Potenzielle Lösungsintervalle aufstellen

$\mathbb{L}_1 =]-\infty; -3]$,
$\mathbb{L}_2 = [-3; 3]$ und
$\mathbb{L}_3 = [3; \infty[$

3.) Überprüfen, welche Lösungsintervalle zur Lösung gehören

Aus dem 1. Intervall $]-\infty; -3]$ setzen wir -4 in die Ungleichung ein:
$x^2 - 9 \geq 0 \quad (-4)^2 - 9 \geq 0 \qquad \rightarrow 7 \geq 0 \quad \checkmark$

Aus dem 2. Intervall $[-3; 3]$ setzen wir 0 in die Ungleichung ein:
$x^2 - 9 \geq 0 \quad 0^2 - 9 \geq 0 \qquad \rightarrow -9 \geq 0 \quad \times$

Aus dem 3. Intervall $[3; \infty[$ setzen wir 4 in die Ungleichung ein:
$x^2 - 9 \geq 0 \quad 4^2 - 9 \geq 0 \qquad \rightarrow 7 \geq 0 \quad \checkmark$

Die Lösung der Ungleichung ist demnach $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_3 =]-\infty; -3] \cup [3; \infty[$

Beispiel 2

$2 \cdot x^2 + 8 < 0$

1.1) Gleichung nach x^2 auflösen

$$
\begin{aligned}
&2 \cdot x^2 + 8 = 0 \qquad |-8 \\
&2 \cdot x^2 + 8 - 8 = -8 \\
&2 \cdot x^2 = -8 \qquad |:2 \\
&\tfrac{2 \cdot x^2}{2} = \tfrac{-8}{2} \\
&x^2 = -4
\end{aligned}
$$

1.2) Wurzel ziehen

$$
\begin{aligned}
&x^2 = -4 \qquad |\sqrt{\ } \\
&x = \pm\sqrt{-4}
\end{aligned}
$$

Die Wurzel einer negativen Zahl ist (in $\mathbb{R}$) nicht definiert!

$\Rightarrow$ Es gibt keine Lösungen,
d. h. die Lösungsmenge ist leer:
$\mathbb{L} = \{\}$.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

3. Fall:

$a \cdot x^2 + b \cdot x = 0$

Vorgehensweise

1. Quadratische Gleichung lösen
   1.1 x ausklammern
   2.2 Faktoren gleich Null setzen (Ein Produkt ist genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist.)
2. Potenzielle Lösungsintervalle aufstellen
3. Überprüfen, welche Lösungsintervalle zur Lösung gehören

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beispiel 1

$x^2 + 9 \cdot x > 0$

1.1) x ausklammern

$$x \cdot (x + 9) = 0$$

1.2) Faktoren gleich Null setzen

$$\underbrace{x}_{\text{1. Faktor}} \cdot \underbrace{(x + 9)}_{\text{2. Faktor}} = 0$$

1.Faktor

$$x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

2.Faktor

$$\begin{aligned} x + 9 &= 0 \qquad |-9 \\ x + 9 - 9 &= -9 \\ x &= -9 \\ \Rightarrow x_2 &= -9 \end{aligned}$$

2.) Potenzielle Lösungsintervalle aufstellen

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_1 &=]-\infty; -9[, \\ \mathbb{L}_2 &=]-9; 0[\text{ und} \\ \mathbb{L}_3 &=]0; \infty[\end{aligned}$$

3.) Überprüfen, welche Lösungsintervalle zur Lösung gehören

Aus dem 1. Intervall $]-\infty; -9[$ setzen wir -10 in die Ungleichung ein: $x^2 + 9 \cdot x > 0$ $(-10)^2 + 9 \cdot (-10) > 0 \qquad \rightarrow 10 > 0$ ✓

Aus dem 2. Intervall $]-9; 0[$ setzen wir -1 in die Ungleichung ein: $x^2 + 9 \cdot x > 0$ $(-1)^2 + 9 \cdot (-1) > 0 \qquad \rightarrow -8 > 0$ ×

Aus dem 3. Intervall $]0; \infty[$ setzen wir 1 in die Ungleichung ein: $x^2 + 9 \cdot x > 0$ $1^2 + 9 \cdot 1 > 0 \qquad \rightarrow 10 > 0$ ✓

Die Lösung der Ungleichung ist demnach $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_3 =]-\infty; -9[\cup]0; \infty[$

4. Fall:

$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$

Beispiel 2

$-2 \cdot x^2 + 4 \cdot x \leq 0$

1.1) x ausklammern

$$x \cdot (-2 \cdot x + 4) = 0$$

1.2) Faktoren gleich Null setzen

$$\underbrace{x}_{\text{1. Faktor}} \cdot \underbrace{(-2 \cdot x + 4)}_{\text{2. Faktor}} = 0$$

1.Faktor

$$x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

2.Faktor

$$\begin{aligned} -2 \cdot x + 4 &= 0 \qquad |-4 \\ -2 \cdot x + 4 - 4 &= -4 \\ -2 \cdot x &= -4 \qquad |:(-2) \\ \tfrac{-2x}{-2} &= \tfrac{-4}{-2} \\ x &= 2 \\ \Rightarrow x_2 &= 2 \end{aligned}$$

2.) Potenzielle Lösungsintervalle aufstellen

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_1 &=]-\infty; 0], \\ \mathbb{L}_2 &= [0; 2] \text{ und} \\ \mathbb{L}_3 &= [2; \infty[\end{aligned}$$

3.) Überprüfen, welche Lösungsintervalle zur Lösung gehören

Aus dem 1. Intervall $]-\infty; 0]$ setzen wir -1 in die Ungleichung ein: $-2 \cdot x^2 + 4 \cdot x \leq 0$ $-2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) \leq 0 \qquad \rightarrow -6 \leq 0$ ✓

Aus dem 2. Intervall $[0; 2]$ setzen wir 1 in die Ungleichung ein: $-2 \cdot x^2 + 4 \cdot x \leq 0$ $-2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 \leq 0 \qquad \rightarrow 2 \leq 0$ ×

Aus dem 3. Intervall $[2; \infty[$ setzen wir 3 in die Ungleichung ein: $-2 \cdot x^2 + 4 \cdot x \leq 0$ $-2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 \leq 0 \qquad \rightarrow -6 \leq 0$ ✓

Die Lösung der Ungleichung ist demnach $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_3 =]-\infty; 0] \cup [2; \infty[$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Vorgehensweise

1. Quadratische Gleichung lösen
2. Potenzielle Lösungsintervalle aufstellen
3. Überprüfen, welche Lösungsintervalle zur Lösung gehören

Gleichungen dieses Typs löst man mit Hilfe der Mitternachtsformel oder der pq-Formel.

Beispiel

$x^2 - 6 \cdot x + 8 < 0$

1) Quadratische Gleichung lösen

Der Ansatz zur Lösung der quadratischen Gleichung mit Hilfe der Mitternachtsformel lautet:

$$x_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

2.) Potenzielle Lösungsintervalle aufstellen

$\mathbb{L}_1 =]-\infty; 2[$,
$\mathbb{L}_2 =]2; 4[$ und
$\mathbb{L}_3 =]4; \infty[$

3.) Überprüfen, welche Lösungsintervalle zur Lösung gehören

Aus dem 1. Intervall $]-\infty; 2[$ setzen wir 1 in die Ungleichung ein:
$x^2 - 6 \cdot x + 8 < 0 \quad 1^2 - 6 \cdot 1 + 8 < 0 \qquad \rightarrow 3 < 0 \quad \times$

Aus dem 2. Intervall $]2; 4[$ setzen wir 3 in die Ungleichung ein:
$x^2 - 6 \cdot x + 8 < 0 \quad 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 < 0 \qquad \rightarrow -1 < 0 \quad \checkmark$

Aus dem 3. Intervall $]4; \infty[$ setzen wir 5 in die Ungleichung ein:
$x^2 - 6 \cdot x + 8 < 0 \quad 5^2 - 6 \cdot 5 + 8 < 0 \qquad \rightarrow 3 < 0 \quad \times$

Die Lösung der Ungleichung ist demnach
$\mathbb{L} = \mathbb{L}_2 =]2; 4[$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

14.5 Bruchungleichungen

Bruchungleichungen sind Ungleichungen, in denen die Variable im Nenner eines Bruchs auftaucht. Solche Ungleichungen erfordern spezielle Lösungsverfahren. Der Grund ist klar: Wir wissen ja nicht, ob der Nenner positiv oder negativ ist (da in ihm eine Variable enthalten ist). Damit wissen wir auch nicht im Allgemeinen, ob wir bei einer Multiplikation beider Seitenterme mit dem Nenner die Ungleichungs-Relation umkehren müssen.

Beispiele für Bruchungleichungen

$$\frac{x^2-5}{x-1} < 8$$

$$\frac{7\cdot x+5}{4\cdot x^2+3} \geq \frac{1}{2}$$

Bruchungleichungen lösen

a) Rechte Seite der Ungleichung $\neq 0$

Vorgehensweise

1. Bruch auflösen durch Fallunterscheidung
2. Lösungsmengen der einzelnen Fälle bestimmen
3. Lösungsmenge der Ungleichung bestimmen

zu 1.)

$$\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{N}} > c = \begin{cases} \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{N}}\cdot \mathrm{N} > c\cdot \mathrm{N} & \text{für } \mathrm{N}>0 \\ \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{N}}\cdot \mathrm{N} < c\cdot \mathrm{N} & \text{für } \mathrm{N}<0 \end{cases}$$

Übrig bleibt:

$$\frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{N}} > c = \begin{cases} \mathrm{Z} > c\cdot \mathrm{N} & \text{für } \mathrm{N}>0 \\ \mathrm{Z} < c\cdot \mathrm{N} & \text{für } \mathrm{N}<0 \end{cases}$$

zu 2.) Die Lösungsmengen geben wir als Intervalle an.

zu 3.) Die Lösung der Ungleichung ist die Vereinigungsmenge der einzelnen Lösungsmengen.

Beispiel

$$\frac{2}{x+1} < 2$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

1.) Bruch auflösen durch Fallunterscheidung

Ansatz

$$\frac{2}{x+1} < 2 = \begin{cases} 2 < 2 \cdot (x+1) & \text{für } x+1 > 0 \\ 2 > 2 \cdot (x+1) & \text{für } x+1 < 0 \end{cases}$$

Im Folgenden lösen wir die beiden Bedingungen nach x auf, um zu berechnen, für welches x der Term im Nenner größer (1. Fall) bzw. kleiner Null (2. Fall) ist.

Fall 1:

$$\begin{aligned} &x+1 > 0 \\ &x+1 > 0 \\ &x+1-1 > 0-1 \\ &x > -1 \end{aligned}$$

Fall 2:

$$\begin{aligned} &x+1 < 0 \\ &x+1 < 0 \\ &x+1-1 < 0-1 \\ &x < -1 \end{aligned}$$

Zusammenfassend gilt:

$$\frac{2}{x+1} < 2 = \begin{cases} 2 < 2 \cdot (x+1) & \text{für } x > -1 \\ 2 > 2 \cdot (x+1) & \text{für } x < -1 \end{cases}$$

Für $x = -1$ ist die Ungleichung $\frac{2}{x+1} < 2$ nicht definiert. Grund dafür ist, dass der Nenner in einem Bruch niemals Null werden darf.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

2.) Lösungsmengen der einzelnen Fälle bestimmen

Fall 1: $x > -1$

Für $x > -1$ können wir die Ungleichung $\frac{2}{x+1} < 2$ umschreiben zu $2 < 2 \cdot (x+1)$

Jetzt müssen wir noch die Ungleichung nach x auflösen:

$$
\begin{aligned}
&2 < 2 \cdot x + 2 \cdot 1 \\
&(2 - 2) < 2 \cdot x + 2 - 2 \\
&0 < 2 \cdot x \\
&0 - 2 \cdot x < 2 \cdot x - 2 \cdot x \\
&-2 \cdot x < 0 \\
&\frac{-2 \cdot x}{-2} > \frac{0}{-2} \\
&x > 0
\end{aligned}
$$

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}_1$ muss sowohl die Bedingung $x > -1$ (1. Fall) als auch $x > 0$ (Lösung 1. Fall) erfüllen:

$$\mathbb{L}_1 =]0; \infty[$$

Fall 2: $x < -1$

Für $x < -1$ können wir die Ungleichung $\frac{2}{x+1} < 2$ umschreiben zu $2 > 2 \cdot (x+1)$

Jetzt müssen wir noch die Ungleichung nach x auflösen:

$$
\begin{aligned}
&2 > 2 \cdot x + 2 \cdot 1 \\
&2 - 2 > 2 \cdot x + 2 - 2 \\
&0 > 2 \cdot x \\
&0 - 2 \cdot x > 2 \cdot x - 2 \cdot x \\
&-2 \cdot x > 0 \\
&\frac{-2 \cdot x}{-2} < \frac{0}{-2} \\
&x < 0
\end{aligned}
$$

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}_2$ muss sowohl die Bedingung $x < -1$ (2. Fall) als auch $x < 0$ (Lösung 2. Fall) erfüllen:

$$\mathbb{L}_2 =]-\infty; -1[$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

3.) Lösungsmenge der Ungleichung bestimmen

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_1 =]-\infty; -1[\cup]0; \infty[$$

b) Rechte Seite der Ungleichung = 0

Vorgehensweise

1. Definitionsbereich bestimmen
2. Nullstellen berechnen
3. Intervallweise Betrachtung

Beispiel

$$\frac{x^2-4}{x+1} > 0$$

1.) Definitionsbereich bestimmen

Der Nenner eines Bruchs darf nicht Null werden. Der Nenner wird Null, wenn gilt

$$x + 1 = 0 \qquad \rightarrow \qquad x = -1$$

Der Definitionsbereich ist dementsprechend: $D_f = \mathbb{R} \backslash \{-1\}$

2.) Nullstellen berechnen

Ein Bruch wird Null, wenn sein Zähler gleich Null ist.

$$x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 = 4$$
$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{4}$$
$$x = \pm 2$$

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

3.) Intervallweise Betrachtung

Die Intervallgrenzen ergeben sich aus der Definitionslücke (-1) und den Nullstellen (-2; 2). Für jedes Intervall wird das Vorzeichen des Zählers bzw. des Nenners angegeben. Dies geschieht dadurch, dass man aus dem jeweiligen Intervall einen beliebigen Wert auswählt und entsprechend in den Zähler oder Nenner einsetzt. Im Anschluss daran schaut man sich an, welches Vorzeichen der Bruch insgesamt hat. Ist z. B. im Zähler und im Nenner ein negatives Vorzeichen, so hat der Bruch insgesamt ein positives Vorzeichen -> „minus geteilt durch minus ergibt plus“.

	$]-\infty;-2[$	$]-2;-1[$	$]-1;2[$	$]2;\infty[$
Zähler	$+$	$-$	$-$	$+$
Nenner	$-$	$-$	$+$	$+$
Gesamt	$-$	$+$	$-$	$+$

In der letzten Reihe der Tabelle können wir ablesen, in welchen Intervallen der Term größer als Null ist.

Für unser Beispiel ergibt sich demnach die Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} =]-2;-1[\cup]2;\infty[$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

15 Euklidische Geometrie der Ebene

Die euklidische Geometrie ist zunächst die uns vertraute, anschauliche Geometrie des Zwei- oder Dreidimensionalen. Der Begriff hat jedoch sehr verschiedene Aspekte und lässt Verallgemeinerungen zu.[15.1] Benannt ist dieses mathematische Teilgebiet der Geometrie nach dem griechischen Mathematiker Euklid von Alexandria[15.2] .

15.1 Fundamentale Eigenschaften ebener Figuren

15.1.1 Punkte, Geraden, Strecken, Winkel

Die euklidische Geometrie beruht auf einer Reihe von Definitionen und Axiomen, die Euklid in seinen Elementen aufgestellt hat.

Das „kleinste“ Objekt in der euklidischen Geometrie ist der Punkt. Allerdings tut man sich schwer, den Begriff „Punkt“ zu definieren.

Definition 15.1: Euklid definiert:

- Ein **Punkt** ist, was keine Teile hat.
- Eine **Linie** ist eine breitenlose Länge.
- Eine **Gerade** ist eine Linie, die bezüglich der Punkte auf ihr stets gleich liegt.

Definition 15.2:

Am besten hilft noch die **Definition von Oskar Perron[15.3]:**
Eine Gerade ist eine gerade, unendlich lange, unendlich dünne und in beide Richtungen unbegrenzte Linie.

[15.1] Große Teile des Kapitels über Geometrie sind entnommen aus BENDER, Peter (2012): Elemente der Geometrie. Vorlesungsskript der Universität Paderborn

[15.2] Euklid von Alexandria (latinisiert Euclides) war ein griechischer Mathematiker, der wahrscheinlich im 3. Jahrhundert v. Chr. in Alexandria gelebt hat. Die überlieferten Werke umfassen sämtliche Bereiche der antiken griechischen Mathematik: Das sind die theoretischen Disziplinen Arithmetik und Geometrie (Die Elemente, Data), Musiktheorie (Die Teilung des Kanon), eine methodische Anleitung zur Findung von planimetrischen Problemlösungen von bestimmten gesicherten Ausgangspunkten aus (Porismen) sowie die physikalischen bzw. angewandten Werke (Optik, astronomische Phänomene).

[15.3] Oskar Perron (* 7. Mai 1880 in Frankenthal (Pfalz); † 22. Februar 1975 in München) war ein deutscher Mathematiker.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

15.1.1.1 Beziehungen zwischen Punkten und Geraden

Eine gerade Linie oder kurz Gerade ist ein Element der Geometrie.[15.4] Die kürzeste Verbindung zweier Punkte ist gerade und wird als Strecke bezeichnet. Eine gerade, unendlich lange, unendlich dünne und in beide Richtungen unbegrenzte Linie nennt man eine Gerade. Moderne axiomatische Theorien der Geometrie nehmen darauf jedoch keinen Bezug (Synthetische Geometrie). Für sie ist eine Gerade ein Objekt ohne innere Eigenschaften, lediglich die Beziehungen zu anderen Geraden, Punkten und Ebenen sind von Bedeutung. In der Analytischen Geometrie wird eine Gerade als eine Menge von Punkten realisiert.

In der formalisierten Sprache der Mengenlehre können wir die Geraden als Mengen von Punkten auffassen. „Der Punkt P liegt auf der Geraden g“ bzw. „g geht durch P“ wird dann kurz geschrieben „$P \in g$“. „Die Geraden g und h schneiden sich im Punkt P“ lautet kurz „$g \cap h = P$“.

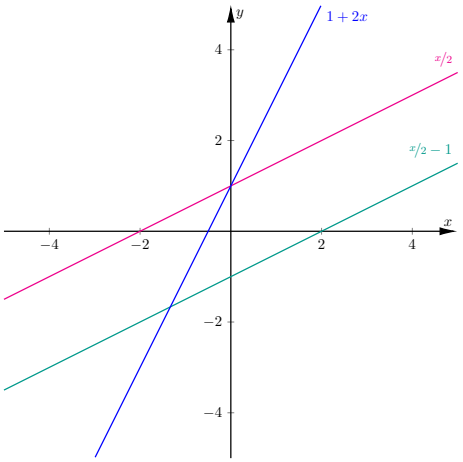
15.1.1.2 Lagebeziehung von Geraden

Zwei Geraden können in der Ebene, im Raum oder auch in höheren Dimensionen auf verschiedene Weise räumlich orientiert zueinander sein.[15.5]

Mögliche Lage zweier Geraden zueinander:

- **identisch**
  Wenn alle Punkte der einen Gerade auch Punkte der anderen Gerade sind.
- **echt parallel**
  Zwei Geraden sind echt parallel, wenn sie durch eine Verschiebung identisch werden.
- **Zwei sich schneidende Geraden**
  Zwei Geraden haben einen Schnittpunkt, wenn sie genau einen gemeinsamen Punkt haben. (Sonderfall „rechter Winkel“
- **windschief**
  Falls sich zwei Geraden gar nicht berühren, aber nicht parallel zueinander stehen, sind sie windschief zueinander. Dies ist nur für Geraden möglich, die im dreidimensionalen Raum oder einem Raum mit höheren Dimensionen liegen.

Abbildung 15.1: Verschiedene Geraden



Quelle: Eigene Darstellung

Für die Lagebeziehungen gelten dabei die folgenden Grundaussagen sowohl in der Ebene als auch im Raum:

[15.4] Gerade https://de.wikipedia.org/wiki/Gerade; abgerufen am 2017-07-13

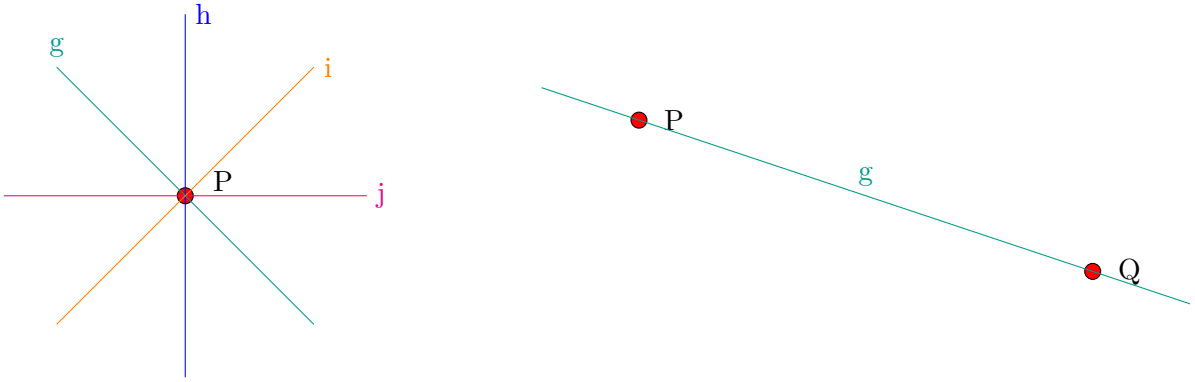
[15.5] Lagebeziehungen von Geraden, https://de.serlo.org/mathe/geometrie/analytische-geometrie/lagebeziehung-punkten-geraden-ebenen/lagebeziehung-zweier-geraden/lagebeziehung-zwischen-zwei-geraden;abgerufen am 26-JUL-2017.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Axiom 15.1: Geraden-Axiome

- Durch **einen Punkt** gehen ***unendlich viele*** Geraden.
- Durch **zwei (verschiedene) Punkte** geht ***genau eine*** Gerade.

Abbildung 15.2: Punkte und Geraden

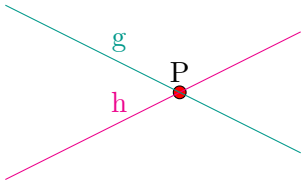


Quelle: Eigene Darstellung

Axiom 15.2: Weitere Geraden-Axiome

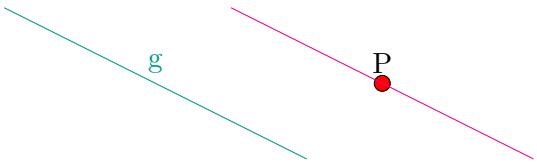
- Zwei verschiedene Geraden in der Ebene schneiden sich entweder in ***genau einem Punkt***,
- oder sie sind zueinander ***parallel***.

Abbildung 15.3: Schnittpunkt zweier Geraden



Quelle: Eigene Darstellung

Abbildung 15.4: Parallelen



Quelle: Eigene Darstellung

Von besonderer Bedeutung für die formale Geometrie ist das **Parallelenaxiom**:

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Axiom 15.3: Parallelenaxiom

- Zu einer beliebigen Geraden g und einem beliebigen Punkt P gibt es genau eine Gerade durch P, die parallel zu g ist.
- Jede Gerade ist parallel zu sich selbst.

15.1.1.3 Strecken und Längen

Eine Strecke (auch Geradenabschnitt oder Geradenstück) ist eine gerade Linie, die von zwei Punkten begrenzt wird; sie ist die kürzeste Verbindung ihrer beiden Endpunkte.[15.6] Die Begrenzung einer Strecke durch diese Punkte unterscheidet sie von Geraden, die beidseitig unbegrenzt sind, und von Halbgeraden (Strahl), die nur auf einer Seite begrenzt sind.

Eine Strecke $\overline{AB}$ ist ein durch zwei Punkte A und B begrenztes Geradenstück bzw. (in der Mengensprache) die Menge aller Punkte, die auf der Geraden zwischen A und B liegen; man braucht hier also noch eine Lagebeziehung, diesmal von drei Punkten, die auf einer Geraden liegen: „Punkt liegt zwischen zwei Punkten“.

Mit dem Begriff „Strecke“ ist auch immer die Vorstellung der Länge $|\overline{AB}|$ verknüpft. Zur Geometrie kommt nun auch die Zahl, die Arithmetik ins Spiel.

Wenn die Punkte A, B, C, D in dieser Reihenfolge auf einer Geraden liegen, dann sagen wir „die Strecke $\overline{AC}$ ist länger als die Strecke $\overline{AB}$ und kürzer als die Strecke $\overline{AD}$ “ und schreiben:

$$|\overline{AC}| > |\overline{AB}| \text{ und } |\overline{AC}| < |\overline{AD}| \tag{15.1}$$

Sonderfall: $|\overline{AC}| = |\overline{AD}|$ und C und D liegen auf derselben Seite von $A \Rightarrow C$ und D markieren den selben Punkt: $\Rightarrow C = D$

Um den Abstand zweier Punkte A und B zu bestimmen, muss man die Länge der Strecke $|\overline{AB}|$ angeben. Für diese Länge gilt:

Axiom 15.4: Abstandsaxiom

Die Strecke $\overline{AB}$ ist die ***kürzeste Verbindung*** zweier Punkte A und B.

Aus dieser Definition der Strecke folgt unmittelbar die sogenannte **Dreiecksungleichung**:

Satz 15.1: Dreiecksungleichung

Sei AB eine Strecke und C ein beliebiger Punkt. Dann gilt:

$$|\overline{AB}| \leq |\overline{AC}| + |\overline{CB}| \tag{15.2}$$

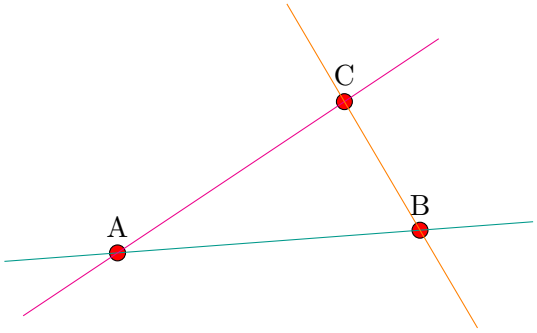
Die Gleichheit gilt genau dann, wenn C auf der Strecke $\overline{AB}$ zwischen A und B liegt.

[15.6] Wikipedia „Strecke (Geometrie)“ https://de.wikipedia.org/wiki/Strecke_(Geometrie)

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Abbildung 15.5: Schnittpunkt zweier Geraden



Quelle: Eigene Darstellung

Wenn man die drei Punkte als Eckpunkte eines Dreiecks betrachtet, kann man die Dreiecksungleichung auch wie folgt formulieren:

Satz 15.2: Andere Formulierung der Dreiecksungleichung

In einem (nicht entartetem) Dreieck ist eine Seite immer kürzer als die beiden anderen Seiten zusammen (im degenerierten Sonderfall höchstens genau so lang).

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

15.1.2 Winkel

15.1.2.1 Allgemeines

Wenn zwei Geraden sich in einem Punkt schneiden, entstehen vier **Halbgeraden**, auch **Strahlen** genannt, und vier **Winkel**.

Ein Winkel ist bestimmt durch zwei Halbgeraden (**Schenkel**), die von einem Punkt (**Scheitel**) ausgehen. Eigentlich muss man begrifflich das geometrische Objekt „Winkel“ (Winkelfeld; Teilmenge der Ebene) und das arithmetische Objekt „Winkelmaß“ (Grad; Zahl) unter-scheiden. Wir werden für „Winkelmaß“ hin und wieder auch „Winkel“ sagen und insbesondere durchweg dieselben (griechischen) Buchstaben verwenden. Zwei Grundvorstellungen sind mit dem Winkelbegriff verbunden:

Aus einer statischen Sichtweise heraus ist er ein **Winkelfeld**, das Gebiet zwischen den beiden Halbgeraden, und das **Winkelmaß** ist der Unterschied zwischen zwei Richtungen, repräsentiert durch die beiden Halbgeraden, die vom Scheitel ausgehen.

Beweglich gesehen, ist er die Fläche, die bei einer Richtungsänderung, einer Drehung (u.U., z.T., mehrfach) überstrichen wird, die die Richtung des ersten („festen“) Schenkels in die des zweiten („freien“) Schenkels überführt. Damit ist gleichzeitig eine Orientierung verbunden: Bei einer Drehung entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn nimmt man das Winkelmaß positiv, bei einer Drehung im Uhrzeigersinn negativ.

Die Angabe eines Winkels erfolgt nach DIN 1302 oder ISO 31-11, neuerdings auch nach ISO 80000-2:

- Winkel werden mit kleinen griechischen Buchstaben beginnend mit α bezeichnet, also $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$.
- Ein Winkel $\angle fg$ ist ein Winkel zwischen zwei Halbstrahlen, Geraden, Kanten und ähnlichem. Er wird dann von f ausgehend Richtung g gezählt.
- Alternativ kann man die drei Punkte angeben, die den Winkel definieren, wobei der Scheitelpunkt immer in der Mitte steht, z. B. Winkel $ABC, \angle ABC$, oder veraltet $\widehat{ABC}$. Dies bezeichnet den Winkel zwischen $\overline{BA}$ und $\overline{BC}$, wobei $\overline{BA}$ im mathematisch positiven Drehsinn auf $\overline{BC}$ gedreht wird.
- Im englischen Sprachraum ist auch nur die Angabe des Scheitels $\angle B$ bzw. $\widehat{B}$ üblich.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

15.1.2.2 Winkelmaße

Grad

Unser Winkelmaß von 360° für den Vollwinkel, 90° für den rechten Winkel stammt noch von den Babylonierinnen und Babyloniern (ab 3. Jahrtausend v. Chr.). Sie betrachteten den Winkel im vollkommensten aller Dreiecke, dem mit drei gleich großen Winkeln, als Einheitswinkel. Da ihr Zahlensystem ein Sechziger-System war, wählten sie als nächst kleinere Einheit (Grad) ein Sechzigstel dieses Einheitswinkels. Das passte wunderbar dazu, dass sechs dieser Einheitswinkel zusammen einen Kreis, also 360° ergeben, wo doch auch ihr Jahreskreis 360 Tage hatte.

Gon (Neugrad)

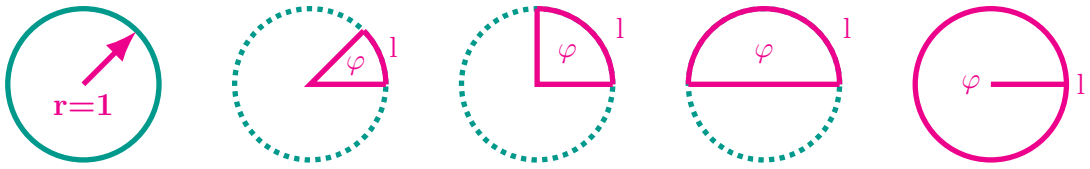
Nach der Französischen Revolution, ganz im Zeichen der Aufklärung, versuchte man, den rechten Winkel zum Maß aller Dinge zu machen und als nächst kleinere Einheit (Neugrad) in Anbetracht unseres Dezimalsystems ein Hundertstel des neuen Einheitswinkels zu wählen; ein rechter Winkel hat also 100 Neugrad, ein Vollwinkel 400 Neugrad. Statt Neugrad sagt man auch „Gon“ und kennzeichnet in Neugrad angegebene Winkel mit einem hochgestellten ^{g}, also z. B. 50^{g}. Verwendung findet das Gon heute nur noch im Vermessungswesen (der Geodäsie), sowie teilweise in der Robotik und Automatisierungstechnik, da die Mehrzahl der hier verwendeten Schrittmotoren mit 200 Schritten pro Vollkreis arbeitet.

⇒ Nicht alles Neue setzt sich durch.

Bogenmaß (Radiant)

Insbesondere bei trigonometrischen Formeln und bei Berechnungen mit komplexen Zahlen sind Winkel im Bogenmaß anzugeben. Dies ist die Länge eines Kreisbogens in einem Einheitskreis (Radius = 1), dessen Endpunkte durch den in der Kreismitte angetragenen zu messenden Winkel bestimmt werden. Die Abbildung 15.6 verdeutlicht die Berechnung.

Abbildung 15.6: Winkelangabe im Bogenmaß



Einheitskreis $\varphi = 45° = \frac{1}{4} \cdot \pi$ $\varphi = 90° = \frac{1}{2} \cdot \pi$ $\varphi = 180° = \pi$ $\varphi = 360° = 2 \cdot \pi$

Quelle: Eigene Darstellung

Die Länge des Kreisbogens bei einem Vollkreis ist bekanntlich $l = 2 \cdot \pi \cdot r$, also bei einem Einheitskreis $2 \cdot \pi$. Damit entsprechen 360° einem Bogenmaß von $2 \cdot \pi$ rad. Die Angabe der Einheit rad lässt man üblicherweise weg.

Damit erhält man für die drei Möglichkeiten der Angabe eines Winkels:

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Tabelle 15.1: Winkelmaß-Umrechnungen

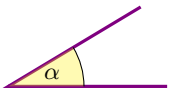
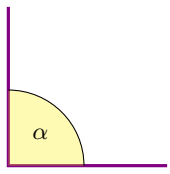
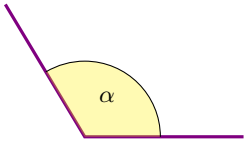
Grad	Gon	rad		Grad	Gon	rad
$0°$	0^{g}	0		$180°$	200^{g}	$\pi \approx 3,142$
$30°$	$33{,}\overline{3}^{\mathrm{g}}$	$\frac{\pi}{6} \approx 0{,}524$		$210°$	$233{,}\overline{3}^{\mathrm{g}}$	$\frac{7}{6} \cdot \pi \approx 3{,}665$
$60°$	$66{,}\overline{6}^{\mathrm{g}}$	$\frac{\pi}{3} \approx 1{,}047$		$240°$	$266{,}\overline{6}^{\mathrm{g}}$	$\frac{4}{3} \cdot \pi \approx 4{,}189$
$90°$	100^{g}	$\frac{\pi}{2} \approx 1{,}571$		$270°$	300^{g}	$\frac{3}{2} \cdot \pi \approx 4{,}712$
$120°$	$133{,}\overline{3}^{\mathrm{g}}$	$\frac{2}{3} \cdot \pi \approx 2{,}094$		$300°$	$333{,}\overline{3}^{\mathrm{g}}$	$\frac{5}{3} \cdot \pi \approx 5{,}236$
$150°$	$166{,}\overline{6}^{\mathrm{g}}$	$\frac{5}{6} \cdot \pi \approx 2{,}618$		$330°$	$366{,}\overline{6}^{\mathrm{g}}$	$\frac{11}{6} \cdot \pi \approx 5{,}760$

Umrechnungsformeln:

$$1 \text{ rad} = \frac{180°}{\pi}; \quad 1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \tag{15.3}$$

Bezeichnung von Winkeln:

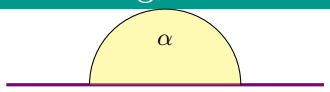
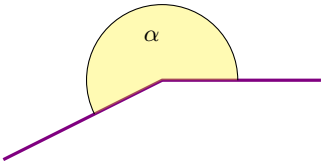
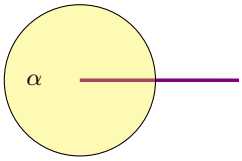
Tabelle 15.2: Bezeichnung von Winkeln

Bezeichnung	Winkel	Zeichnung
Nullwinkel	$\alpha = 0°$	
spitzer Winkel	$0° < \alpha < 90°$	
rechter Winkel	$\alpha = 90°$	
stumpfer Winkel	$90° < \alpha < 180°$	

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Tabelle 15.2: Bezeichnung von Winkeln

Bezeichnung	Winkel	Zeichnung
gestreckter Winkel	$\alpha = 180°$	
überstumpfer (erhabener) Winkel	$180° < \alpha < 360°$	
voller Winkel, Vollwinkel	$\alpha = 360°$	
Kennzeichnung rechter Winkel		

15.1.2.3 Winkelpaare

Die Geometrie kennt besondere Bezeichnungen für Paare von Winkeln, die zueinander in einer besonderen Beziehung stehen. Die für solche Winkel geltenden Gesetze helfen bei der Untersuchung komplexerer geometrischer Objekte.

Komplementwinkel oder Komplementärwinkel

Zwei Winkel heißen Komplementwinkel oder Komplementärwinkel, wenn sie sich zu einem rechten Winkel (90°) ergänzen.

Supplementwinkel oder Ergänzungswinkel

Zwei Winkel heißen Supplementwinkel (auch: Supplementärwinkel), Ergänzungswinkel oder kurz E-Winkel, wenn sie sich zu 180° ergänzen.

Nebenwinkel

Schneiden sich zwei Geraden, so bezeichnet man ein Paar benachbarter Winkel als Nebenwinkel. Nebenwinkel ergänzen sich zu 180°. Sie sind also Supplementwinkel.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Scheitelwinkel oder Gegenwinkel

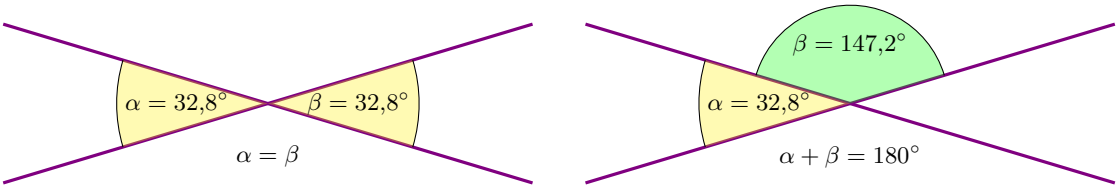
Schneiden sich zwei Geraden, so bezeichnet man das Paar gegenüberliegender Winkel als Scheitelwinkel oder Gegenwinkel. Scheitelwinkel sind immer gleich groß.

Die Bezeichnung Scheitelwinkel kommt daher, dass die beiden Winkel durch Punktspiegelung am Scheitelpunkt aufeinander abgebildet werden.

Satz 15.3: Scheitel- und Nebenwinkel

Scheitelwinkel sind gleich groß. Nebenwinkel ergänzen sich zu 180°.

Abbildung 15.7: Scheitel-(links) und Nebenwinkel (rechts)



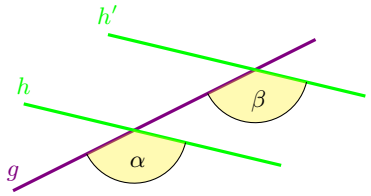
Stufen- oder F-Winkel

Schneidet eine Gerade g zwei Geraden h und h', so heißen die Winkel, die auf derselben Seite von g und auf einander entsprechenden Seiten von h bzw. h' liegen, Stufen- oder F-Winkel. Für den Fall, dass die Geraden h und h' parallel sind, gilt:

Satz 15.4: Stufenwinkel

Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen sind gleich groß.

Abbildung 15.8: Stufenwinkel



Quelle: Eigene Darstellung

Aus der Winkelgleichheit kann umgekehrt auf die Parallelität von Geraden geschlossen werden: Wird ein Geradenpaar h und h' von einer weiteren Geraden g so geschnitten, dass die Schnittwinkel auf derselben Seite von g und auf einander entsprechenden Seiten von h und h' gleich groß sind, so sind die Geraden h und h' parallel.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

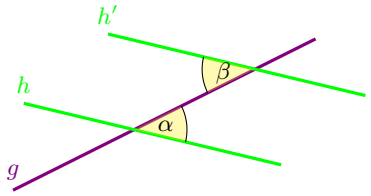
Wechsel- oder Z-Winkel

Schneidet eine Gerade g zwei Geraden h und h', so heißen die Winkel, die auf unterschiedlichen Seiten von g und entgegen gesetzten Seiten von h bzw h' liegen, Wechsel- oder Z-Winkel. Für den Fall, dass die Geraden h und h' parallel sind, gilt:

Satz 15.5: Wechselwinkel

Wechselwinkel an Parallelen sind gleich groß.

Abbildung 15.9:



Quelle: Eigene Darstellung

Aus der Winkelgleichheit kann umgekehrt auf die Parallelität von Geraden geschlossen werden: Wird ein Geradenpaar h und h' von einer weiteren Geraden g so geschnitten, dass die Schnittwinkel auf unterschiedlichen Seiten von g und unterschiedlichen Seiten von h bzw. h' gleich groß sind, so sind die Geraden h und h' parallel.

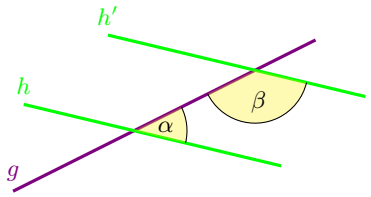
Nachbar- oder E-Winkel

Schneidet eine Gerade g zwei weitere parallele Geraden h und h', so bezeichnet man die Winkel, die auf derselben Seite von g, aber auf unterschiedlichen Seiten von h und h' liegen, als Nachbar- oder E-Winkel.

Satz 15.6: Nachbarwinkel

Nachbarwinkel ergänzen sich zu 180°.

Abbildung 15.10:



Quelle: Eigene Darstellung

Aus der Ergänzung der Winkel zu 180° kann umgekehrt auf die Parallelität von Geraden geschlossen werden: Wird ein Geradenpaar h und h' von einer weiteren Geraden g so geschnitten, dass sich die Schnittwinkel, die auf derselben Seite von g, aber jeweils auf unterschiedlichen Seiten von h und h' liegen, zu 180° ergänzen, so sind die Geraden h und h' parallel.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Die Eigenschaft, dass sich Nachbarwinkel zu 180° ergänzen, folgt direkt aus dem Parallelenaxiom der euklidischen Geometrie. Die oben genannten Eigenschaften von Stufen- und Wechselwinkeln lassen sich aus der Betrachtung von Neben- und Scheitelwinkeln von Nachbarwinkeln herleiten.

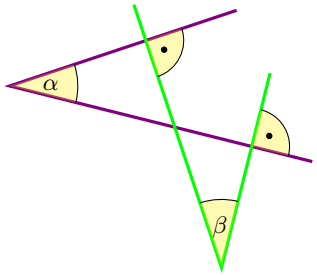
Winkel mit paarweise rechtwinkligen Schenkeln

Satz 15.7: Ergänzungswinkel

Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise senkrecht aufeinander stehen, sind gleich groß oder ergänzen sich zu 180°.

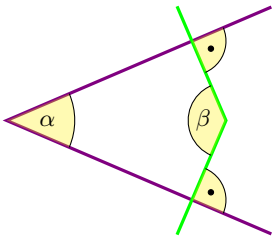
Vergleiche Abbildungen 15.11 und 15.12.

Abbildung 15.11:



Quelle: Eigene Darstellung

Abbildung 15.12:



Quelle: Eigene Darstellung

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

15.1.2.4 Winkelkonstruktion

Einige Winkel kann man allein mit Zirkel und Lineal konstruieren. Dazu gehören die 90°, 60°, 72° und 54° - Winkel, sowie sämtliche Winkel, die durch Verdoppelung, Halbierung, Addition oder Subtraktion (siehe unten) dieser Winkel entstehen.

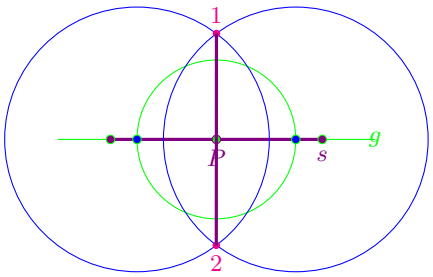
Nicht jeder Winkel kann mit Zirkel und Lineal gedrittelt werden.

Besonders wichtig sind ***rechte Winkel*** (90°-Winkel); man nennt deren Konstruktion auch „das Lot fällen“.

Konstruktion des 90-Grad-Winkels (für vorgegebenen Schnittpunkt P auf s)

Zeichne eine auf Gerade g liegende Strecke s. Zeichne einen Kreis um P mit beliebigem Radius. Dieser Kreis schneidet g in zwei Punkten. Zeichne um diese beiden Punkte jeweils einen Kreis mit gleichem Radius aber größer als den ersten Kreis. Die Radien der beiden Kreise müssen so gewählt sein, dass sich die Kreise in zwei Punkten schneiden. Verbinde die beiden Schnittpunkte dieser Kreise durch eine Gerade. Die so gezeichnete Gerade schneidet g im rechten Winkel und zwar genau im Punkt P.

Abbildung 15.13: Konstruktion des 90-Grad-Winkels

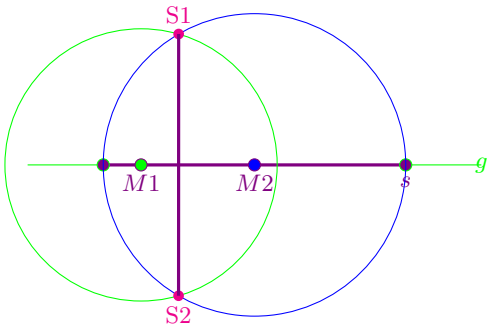


Quelle: Eigene Darstellung

Konstruktion (ohne vorgegebenen Schnittpunkt)

Zeichne eine auf der Gerade g liegende Strecke s. Wähle zwei Punkte M_1 und M_2 auf der Geraden, und zu diesen zwei Punkten zwei Kreisradien groß genug, dass die entsprechenden Kreise um M_1 und M_2 sich in zwei Punkten – im Weiteren S_1 und S_2 genannt – schneiden. Zeichne diese beiden Kreise (sie müssen nur soweit gezeichnet werden, dass die beiden Schnittpunkte erkennbar werden). Zeichne die durch die beiden Schnittpunkte S_1 und S_2 gehende Gerade. Diese Gerade wird die Gerade g senkrecht schneiden.

Abbildung 15.14: Konstruktion



Quelle: Eigene Darstellung

Ratschlag

Man braucht die Kreise nicht ganz zu schlagen; es reicht, für jeden Kreis entweder einen durchgehenden Bogenabschnitt zu ziehen, der beide Schnittpunkte enthält, oder auch nur zwei kleinere Bogenabschnitte, die jeweils einen der Schnittpunkte enthalten.

Faustregel fürs Zeichnen

Prinzipiell wird der rechte Winkel umso genauer, je größer der Abstand der beiden Schnittpunkte voneinander ist. Denn mit größerem Abstand werden die Auswirkungen von solchen Fehlern kleiner, die dadurch entstehen, dass die neugezeichnete Gerade oder auch schon die gezeichneten Schnittpunkte

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

nicht genau mit den idealen Schnittpunkten übereinstimmen. Also kann man die Genauigkeit des rechten Winkels oder des Zusammentreffens mit dem Punkt P verbessern, indem man die Kreisradien vergrößert.

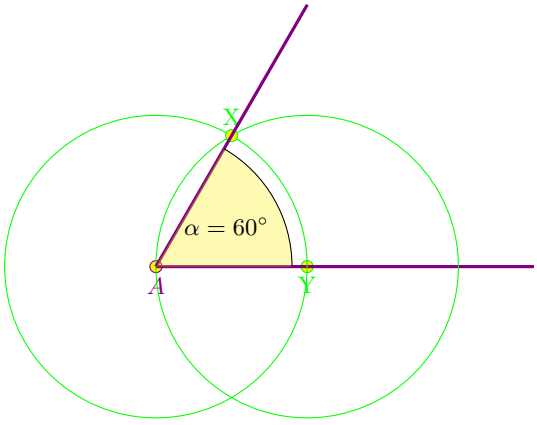
Folgerung (Streckenhalbierung, Mittelsenkrechte)

Man halbiert eine gegebene Strecke, indem man Kreise mit identischem Radius, deren Radius größer ist als die Hälfte der Strecke bzw. die sich in zwei Punkten schneiden, um die Endpunkte dieser Strecke zieht. Verbindet man nun die Schnittpunkte, die beide Kreise miteinander haben, so schneidet diese Verbindungslinie die Gerade genau in der Mitte und im rechten Winkel. Infolgedessen wurde eine Mittelsenkrechte konstruiert. (Eine Streckenhalbierende, die nicht senkrecht durch die Strecke geht, erhält man durch entsprechende Konstruktion mit schräg zur Strecke gestellten Ellipsen. Stehen die Ellipsen nicht schräg, erhält man wieder eine Mittelsenkrechte.)

Konstruktion des 60-Grad-Winkels

1. Zeichne einen Kreis um den Punkt A mit dem beliebigen Radius r. ⇒ Y
2. Zeichne einen weiteren Kreis um diesen Schnittpunkt (Y) mit dem selben Radius r.
3. Der Schnittpunk der beiden Kreise (X) ist ein Punkt auf dem zweiten Schenkel des 60° Winkels.

Abbildung 15.15: Konstruktion des 60-Grad-Winkels



Quelle: Eigene Darstellung

Die Idee bei der Konstruktion eines 60° Winkels ist die Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks, da jeder Innenwinkel im gleichseitigen Dreieck genau 60° beträgt.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

15.1.2.5 Addition und Subtraktion von Winkeln:

Jeder Winkel lässt sich zu einem anderen Winkel konstruktiv addieren und subtrahieren.[15.7]

Möchte man einen ersten zu einem zweiten Winkel addieren bzw. subtrahieren, das heißt den zweiten Winkel um die Größe des ersten vermehren bzw. vermindern, so zeichnet man zunächst um die Scheitelpunkte der beiden Winkel jeweils einen für beide Winkel gleich großen Kreis. (Es reicht in beiden Fällen auch ein Kreisbogen, der beide Schenkel des jeweiligen Winkels schneidet. Beim zweiten Winkel muss der Kreisbogen zudem so groß sein, dass er auch noch den zu addierenden bzw. subtrahierenden Winkel, dort, wo er später abgetragen wird, umfassen kann. Analog reicht auch eine größere Zahl noch kleinerer Kreisbögen, die lediglich die benötigten Schnittpunkte kenntlich machen.)

Nun greift man beim ersten Winkel den Abstand der beiden Schnittpunkte von Kreis und Schenkeln mit dem Zirkel ab und trägt diesen auf dem Kreisbogen des zweiten Winkels ab.

Für Letzteres sticht man den Zirkel in denjenigen Schnittpunkt von Kreis und Schenkel des zweiten Winkels ein, ab dessen Schenkel man den ersten Winkel addieren bzw. subtrahieren möchte.

Daraufhin trägt man mit dem Zirkel den eingestellten Abstand auf dem Kreisbogen des zweiten Winkels ab – und zwar entweder vom Winkel weg (in Richtung „Winkeläußeres“), wenn man addieren möchte, oder aber zum Winkel hin (in Richtung „Winkelinneres“), wenn man subtrahieren möchte.

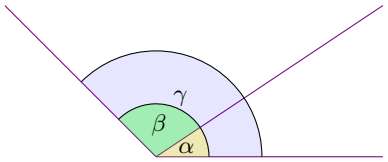
Danach zeichnet man einen Strahl vom Scheitelpunkt des zweiten Winkels durch den eben konstruieren Punkt des Kreisbogens. Dieser Strahl bildet zusammen mit demjenigen Schenkel des zweiten Winkels, in den man nicht eingestochen hatte, die Schenkel des nun konstruierten Summen- bzw. Differenzwinkels.

Zwei Winkel α und β mit einem gemeinsamen Schenkel ergänzen sich im Winkel γ[15.8].

Für die Größen gilt:

$$\alpha + \beta = \gamma \tag{15.4}$$

Abbildung 15.16: Summenwinkel:



Quelle: Eigene Darstellung

[15.7] Wikipedia: Winkel, https://de.wikipedia.org/wiki/Winkel; abgerufen am 2017-07-29

[15.8] Grundlagen zu Winkeln http://de.bettermarks.com/mathe-portal/mathebuch/grundlagen-zu-winkeln.html; abgerufen am 2017-07-29

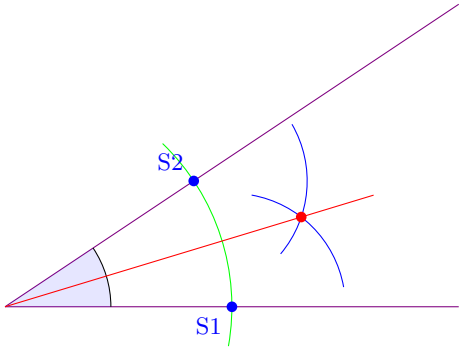
Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

15.1.2.6 Winkelteilungen

Winkelhalbierende

Ein Winkel ist durch seine beiden Schenkel (Halbgeraden mit gemeinsamen Anfang im Scheitel des Winkels) gegeben. Dann kann die Winkelhalbierende mit einem Zirkel und einem Lineal (Geodreieck) konstruiert werden:
Um den Scheitelpunkt wird ein Kreis mit beliebigem Radius gezeichnet. An den Schnittpunkten mit den Schenkeln des Winkels wird der Zirkel erneut angesetzt.
Dann zeichnet man jeweils einen Kreis mit gleichem Radius. Die Schnittpunkte dieser zwei Kreise liegen auf der **Winkelhalbierenden**.[15.9]

Abbildung 15.17: Winkelhalbierende



Quelle: Eigene Darstellung

Bei dieser Konstruktion wird benutzt, dass die Winkelhalbierende zugleich Mittelsenkrechte in dem gleichschenkligen Dreieck ist, das durch den Scheitel und die zwei ersten Hilfspunkte gegeben ist.

Dreiteilung des Winkels

Unter der Dreiteilung des Winkels (auch: Trisektion des Winkels) versteht man in der Geometrie das Problem, ob man einen beliebigen Winkel nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal (den euklidischen Werkzeugen) konstruktiv und präzise in drei gleich große Winkel unterteilen kann. Die Dreiteilung des Winkels gehört zu den drei klassischen Problemen der antiken Mathematik und ist nur für bestimmte Winkel durchführbar.[15.10]

Die **allgemeine Dreiteilung** des Winkels ist mit euklidischen Werkzeugen nicht möglich. Es gibt jedoch (Hand-)Zeichengeräte (z. B. Tomahawk) für diese Aufgabe.

Die **beliebige Teilung** erfordert ein Hilfsmittel, mit dem ein Winkel proportional auf eine Strecke abgebildet werden kann und umgekehrt, beispielsweise eine Schablone, mit einer als Archimedische Spirale geformten Kante. Damit lässt sich eine Winkelteilung in eine Streckenteilung überführen.

[15.9] Grundlagen zu Winkeln http://de.bettermarks.com/mathe-portal/mathebuch/grundlagen-zu-winkeln.html; abgerufen am 2017-07-29
[15.10] Wikipedia: https://de.wikipedia.org/wiki/Dreiteilung_des_Winkels; Abruf 2017-05-23

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

15.1.3 Dreieck

Ein **Dreieck**[15.11] ist ein **Polygon** und eine geometrische Figur. Es handelt sich innerhalb der euklidischen Geometrie um die einfachste Figur in der Ebene, die von geraden Linien begrenzt wird. Seine Begrenzungslinien bezeichnet man als Seiten. In seinem Inneren spannen sich drei Winkel, die sogenannten Innenwinkel auf. Die Scheitel dieser Winkel bezeichnet man als Eckpunkte des Dreiecks. Auch eine Verallgemeinerung des Dreiecksbegriffes auf nichteuklidische Geometrien ist möglich; in diesem Fall müssen die Begrenzungslinien Geodäten sein.[15.12]

Ein Dreieck wird durch drei Punkte definiert, die nicht auf einer Geraden liegen. Sie werden Ecken des Dreiecks genannt. Die Verbindungsstrecken zwischen je zwei Ecken heißen Seiten des Dreiecks. Das Dreieck unterteilt die Ebene in zwei Bereiche, das Äußere und das Innere des Dreiecks. Der von je zwei an einem Eckpunkt zusammentreffenden Seiten gebildete Winkel ist eine wichtige Größe zur Charakterisierung des Dreiecks.

Einteilung

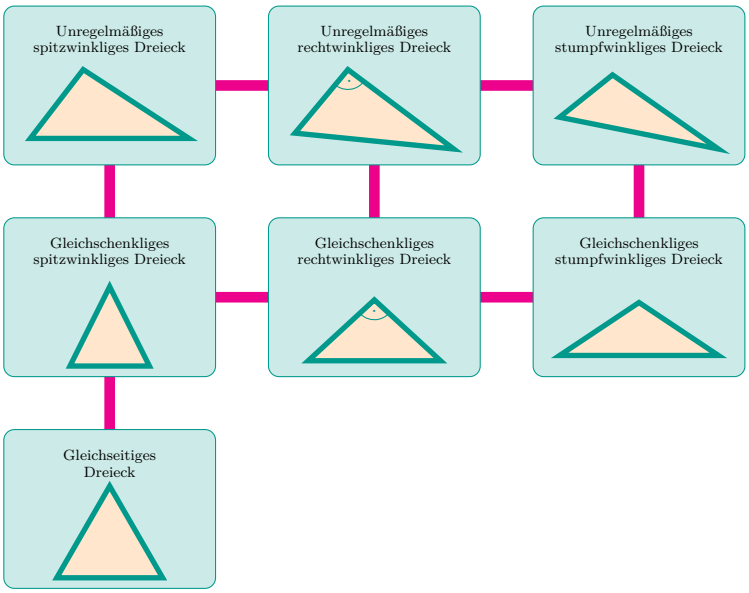
Nach Seitenlängen

- Unregelmäßiges Dreieck
- Gleichschenkliges Dreieck
- Gleichseitiges Dreieck

Nach Winkeln

- Spitzwinkliges Dreieck
- Rechtwinkliges Dreieck
- Stumpfwinkliges Dreieck

Abbildung 15.18: Einteilung der Dreiecke



Quelle: Eigene Darstellung

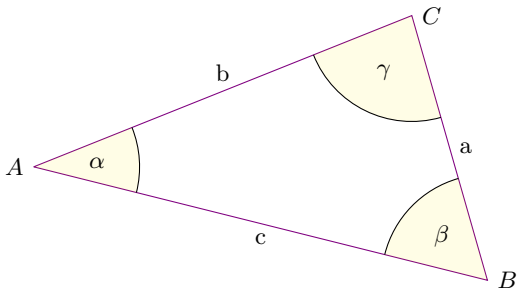
In der Geometrie werden die Eckpunkte des Dreiecks in der Regel mit $A, B,$ und C gegen den Uhrzeigersinn bezeichnet, üblicherweise so, wie in Abb. 15.19 gezeichnet.

[15.11] Veraltet auch Triangel, lat.: triangulum
[15.12] Wikipedia: https://de.wikipedia.org/wiki/Dreieck

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Die Seite, die einer Ecke gegenüberliegt, wird analog $a, b,$ und c genannt. Damit liegt z. B. die Seite a dem Eckpunkt A gegenüber, verbindet also die Punkte B und C. Häufig wird mit $a, b,$ und c auch stattdessen die Länge der jeweiligen Seite BC, CA oder AB bezeichnet. Die Winkel werden α, β und γ genannt; α ist der Winkel am Eckpunkt A, β liegt am Eckpunkt B und γ liegt am Eckpunkt C.

Abbildung 15.19: Allgemeines Dreieck



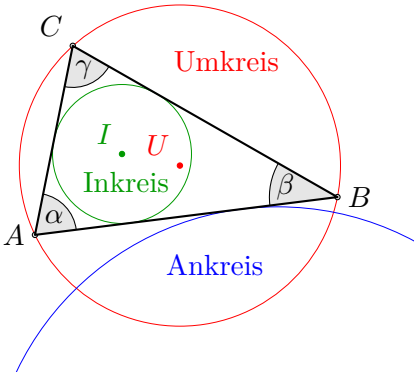
Quelle: Eigene Darstellung

Satz 15.8: Sätze zum Dreieck

- Die Summe der Innenwinkel in einem planaren (ebenen) Dreieck beträgt immer 180°.
- Die Summe der Außenwinkel beträgt entsprechend 360°. Dabei wird für jeden Eckpunkt nur ein Außenwinkel in die Summe aufgenommen. Da es sich bei den beiden Außenwinkeln eines Eckpunktes um Scheitelwinkel handelt, sind diese immer gleich groß. Die Summe aller Außenwinkel beträgt demnach genau genommen $2 \cdot 360° = 720°$.
- Die Gesamtlänge zweier Seiten eines Dreiecks ist immer größer als die Länge der dritten Seite. Diese Beziehungen lassen sich in der so genannten Dreiecksungleichung ausdrücken.

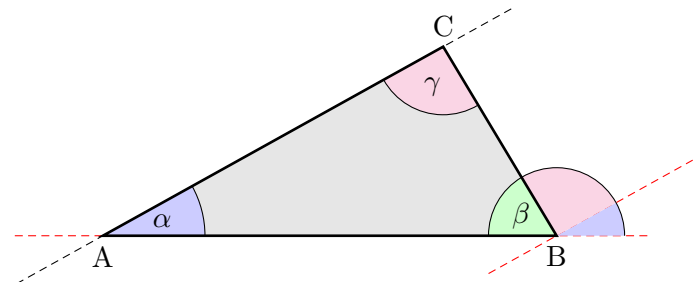
Diese intuitiv einsichtigen Eigenschaften ebener Dreiecke folgen aus den Axiomen der euklidischen Geometrie.

Abbildung 15.20: Umkreis, Inkreis, Ankreis



Quelle: Eigene Darstellung

Abbildung 15.21: Innenwinkel



Quelle: Eigene Darstellung

Jedes Dreieck besitzt einen **Umkreis**, das heißt einen Kreis, der durch seine drei Eckpunkte verläuft. Der Mittelpunkt des Umkreises ist der Schnittpunkt der drei **Mittelsenkrechten**; das sind die **Lotgeraden** durch die Mittelpunkte der Seiten.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Die **Winkelhalbierenden** der drei Innenwinkel schneiden sich ebenfalls in einem gemeinsamen Punkt, nämlich im Mittelpunkt des **Inkreises**. Dieser berührt die drei Seiten von innen. Die drei Kreise, die jeweils eine Seite von außen und die Verlängerungen der beiden anderen Seiten berühren, heißen Inkreises des Dreiecks.

Der **Schwerpunkt** eines Dreiecks ist der gemeinsame Schnittpunkt der drei **Seitenhalbierenden**, also der jeweiligen Verbindungsstrecken der Eckpunkte mit dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite. Der Schwerpunkt teilt dabei die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1.

Auch die drei **Höhen**, also die Lote der Eckpunkte auf die jeweils gegenüberliegende Seite, schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt, dem **Höhenschnittpunkt**. Mit Hilfe der Höhen kann der **Flächeninhalt** eines Dreiecks berechnet werden.

Ein weiterer bekannter Kreis am Dreieck ist der **Feuerbachkreis**[15.13]. Er wird auch **Neunpunktekreis** genannt, da er durch die drei Seitenmittelpunkte, die drei Fußpunkte der Höhen und die drei Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte verläuft. Sein Mittelpunkt liegt wie der Schwerpunkt, der Umkreismittelpunkt und der Höhenschnittpunkt auf der **eulerschen Geraden**.

[15.13] Karl Wilhelm Feuerbach (* 30. Mai 1800 in Jena; † 12. März 1834 in Erlangen) war ein deutscher Mathematiker.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

15.1.3.1 Gleichseitige Dreiecke

Ein gleichseitiges Dreieck ist ein Dreieck mit drei gleich langen Seiten bzw. Kanten sowie drei gleichen Winkeln von jeweils 60°. Ein gleichseitiges Dreieck wird auch als regelmäßiges Dreieck bezeichnet und zählt zu den regelmäßigen Polygonen. Alle gleichseitigen Dreiecke sind einander ähnlich. Gleichseitige Dreiecke sind rotationssymmetrisch (Drehung um den Mittelpunkt um $360°/3 = 120°$ oder Vielfache davon), spiegelsymmetrisch (bzgl. der drei Mittelsenkrechten) und spitzwinklig.[15.14]

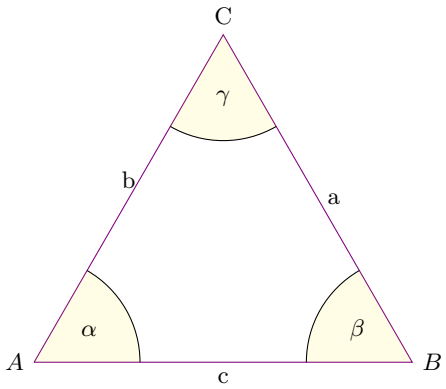
Satz 15.9: Gleichseitiges Dreieck

Ein gleichseitiges Dreieck ist durch eine Seitenlänge vollständig bestimmt.

Formeln zum gleichseitigen Dreieck

Seitenlänge	$a = b = c$
Winkel	$\alpha = \beta = \gamma$
Höhe	$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$
Flächeninhalt	$A = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$
Umfang	$U = 3 \cdot a$
Umkreisradius	$r_U = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot a$
Inkreisradius	$r_I = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot r_U$

Abbildung 15.22: Gleichseitiges Dreieck

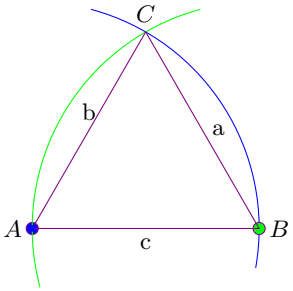


Quelle: Eigene Darstellung

Konstruktion eines gleichseitigen Dreieck

Die Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks mit Zirkel und Lineal ist oft einfach. Ist die Seitenlänge bzw. eine Seite als Strecke vorgegeben, so zeichnet man um die beiden Endpunkte der Strecke jeweils einen Kreis, dessen Radius die Strecke selbst ist. Jeder der beiden Schnittpunkte der Kreise bildet mit den Endpunkten der vorgegeben Strecke ein gleichseitiges Dreieck.

Abbildung 15.23:



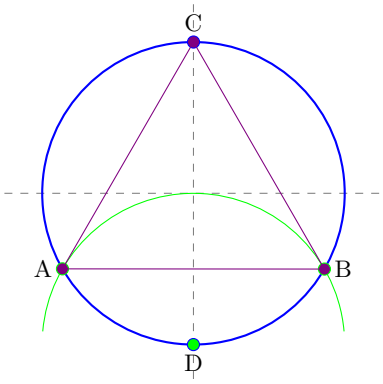
Quelle: Eigene Darstellung

[15.14] Wikipedia: https://de.wikipedia.org/wiki/Gleichseitiges_Dreieck

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Ist stattdessen der Umkreis des gleichseitigen Dreiecks vorgegeben, so konstruiert man zunächst ein Achsenkreuz im Mittelpunkt des Kreises. Die vertikale Achse besitzt dann mit dem Umkreis die Schnittpunkte C und D. Anschließend wird ein Kreisbogen mit dem Radius des Umkreises um den Punkt D gezeichnet. Auf dem Umkreis ergeben sich damit die Schnittpunkte A und B. Werden nun die Punkte A und B mit einer geraden Linie verbunden, entsteht die erste Seite des gesuchten gleichseitigen Dreiecks ABC.

Abbildung 15.24:



Quelle: Eigene Darstellung

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

15.1.3.2 Gleichschenklige Dreiecke

Ein gleichschenkliges Dreieck ist ein Dreieck mit zwei gleich langen Seiten. Folglich sind auch die beiden Winkel gleich groß, die den gleich langen Seiten gegenüberliegen. Zur vollständigen Bestimmung werden zwei Bestimmungsstücke benötigt, davon zumindest eine Seite.[15.15]

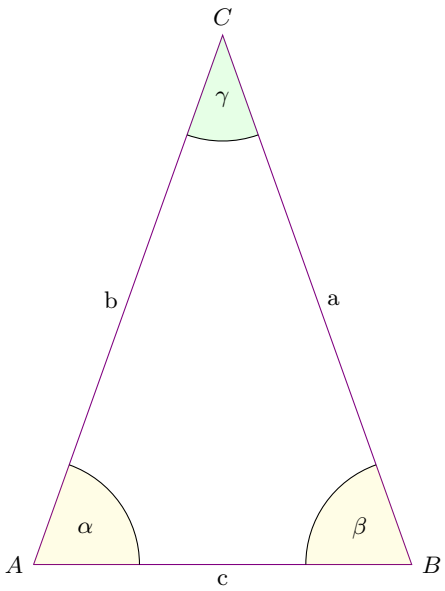
Die beiden gleich langen Seiten heißen Schenkel, die dritte Seite heißt Basis. Der der Basis gegenüberliegende Eckpunkt heißt Spitze. Die an die Basis anliegenden Winkel heißen Basiswinkel.

Jedes gleichschenklige Dreieck ist achsensymmetrisch. Es kann spitzwinklig, rechtwinklig oder stumpfwinklig sein. Schließt die Spitze den Winkel 36° oder 108° ein, wird es „Goldenes Dreieck“ erster bzw. zweiter Art genannt.

Formeln zum gleichschenkligen Dreieck

Seitenlänge	$a = b$ $c^2 = 2 \cdot a^2 \cdot (1 - \cos(8 \cdot \gamma))$ $c = 2 \cdot a \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$
Winkel	$\alpha = \beta, \gamma = 180° - 2\alpha$ $\gamma = \arccos\left(1 - \frac{c^2}{2 \cdot a^2}\right)$ $\gamma = 2 \arcsin\left(1 - \frac{c}{2 \cdot a}\right)$
Höhe	$h_c = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4} \cdot c^2}$
Flächeninhalt	$A = \frac{c}{2} \cdot \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}}$ oder $A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$
Umfang	$U = 2 \cdot a + c$

Abbildung 15.25:
Gleichschenkliges Dreieck



Quelle: Eigene Darstellung

[15.15] Wikipedia: https://de.wikipedia.org/wiki/Gleichschenkliges_Dreieck

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

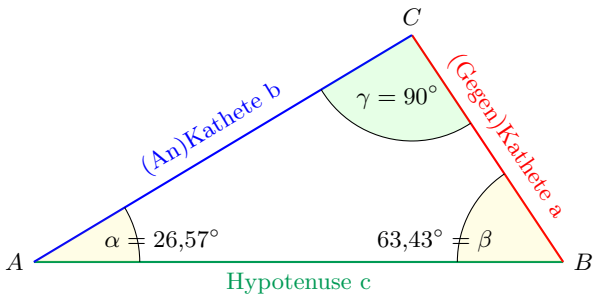
15.1.3.3 Rechtwinkliges Dreieck

Ein rechtwinkliges Dreieck ist ein Dreieck mit einem rechten Winkel.[15.16]

Als **Hypotenuse** bezeichnet man die längste Seite eines rechtwinkligen Dreiecks. Sie liegt dem rechten Winkel gegenüber.

Als **Kathete**[15.17] wird jede der beiden kürzeren Seiten in einem rechtwinkligen Dreieck bezeichnet. Die Katheten sind also die beiden Seiten des rechtwinkligen Dreiecks, die den rechten Winkel bilden. In Bezug auf einen der beiden spitzen Winkel (in der Skizze α) des Dreiecks unterscheidet man die Ankathete dieses Winkels (die dem Winkel anliegende Kathete) und die Gegenkathete (die dem Winkel gegenüberliegende Kathete).

Abbildung 15.26:
Rechtwinkliges Dreieck



Quelle: Eigene Darstellung

Satz 15.10: Satz des Pythagoras

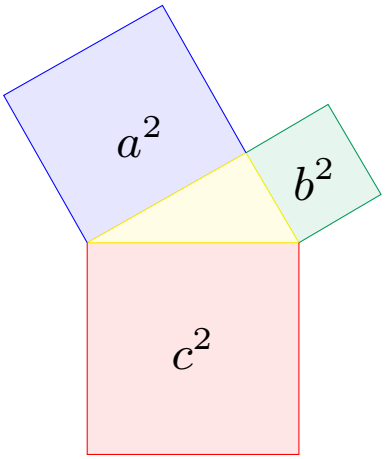
Die Beziehung zwischen den Längen der Katheten und der Hypotenuse beschreibt der Satz des Pythagoras, der auch als **Hypotenusensatz** bezeichnet wird.

Der Satz lautet: Sind a und b die Seitenlängen der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks und ist c die Seitenlänge der Hypotenuse, so gilt die Gleichung:

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{15.5}$$

Der Satz des Pythagoras ist ein Spezialfall des Kosinussatzes.

Abbildung 15.27:



Quelle: Eigene Darstellung

Anders formuliert besagt der Satz des Pythagoras, dass die Summe der Flächeninhalte der beiden Quadrate über den Katheten gleich dem Flächeninhalt des Quadrats über der Hypotenuse ist. Aus dieser Tatsache folgen der Katheten- und der Höhensatz.

[15.16] Wikipedia: https://de.wikipedia.org/wiki/Rechtwinkliges_Dreieck
[15.17] Aus dem griechischen káthetos, das Herabgelassene, Senkblei.

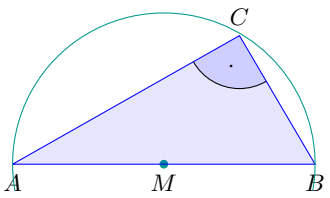
© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Satz 15.11: Satz des Thales

Der Satz von Thales besagt, dass jedes Dreieck, das in einem Halbkreis liegt, ein rechtwinkliges Dreieck ist. Der Mittelpunkt der Hypotenuse stellt das Zentrum des **Thaleskreises** dar, der gleichzeitig der **Umkreis** des rechtwinkligen Dreiecks ist.

Abbildung 15.28:



Quelle: Eigene Darstellung

Satz 15.12: Kathetensatz des Euklid

Die Verlängerung des über der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks errichteten Lots (Höhe des Dreiecks) teilt das Quadrat über der Hypotenuse in zwei Rechtecke.

Der Kathetensatz besagt, dass je eines der Rechtecke die gleich große Fläche wie je eines der Quadrate über den beiden Katheten hat.

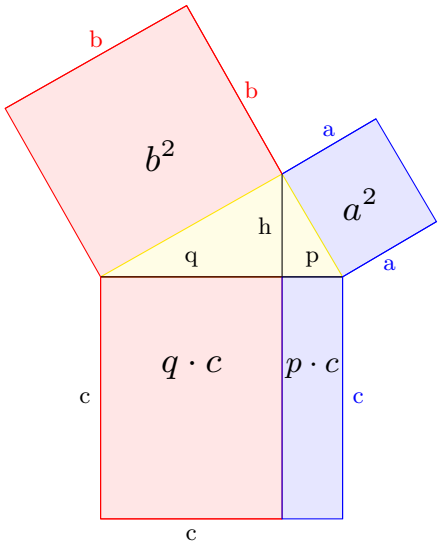
Seien a, b, c die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks, wobei c die Hypotenuse sei. Der Lotfußpunkt teilt die Hypotenuse in die Strecken p und q. Es gilt:

Das Quadrat über a ist flächeninhaltsgleich zum Rechteck mit den Seiten p und c, und das Quadrat über b ist flächeninhaltsgleich zum Rechteck mit den Seiten q und c.

$$a^2 = p \cdot c \tag{15.6}$$

$$b^2 = q \cdot c \tag{15.7}$$

Abbildung 15.29:



Quelle: Eigene Darstellung

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

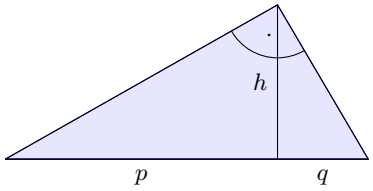
Satz 15.13: Höhensatz des Euklid

Der Höhensatz besagt, dass in einem rechtwinkligen Dreieck das Quadrat über der Höhe flächengleich dem Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten ist. Oder:

Seien a, b, c die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks und p und q diejenigen Teile der Hypotenuse c, die durch deren Teilung am Lotfußpunkt der Höhe h entstehen. Dann ist

$$h^2 = p \cdot q \tag{15.8}$$

Abbildung 15.30:



Quelle: Eigene Darstellung

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

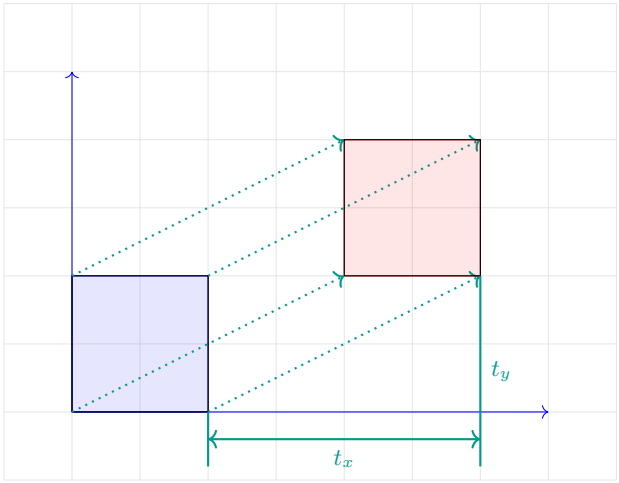
15.2 Elementare geometrische Transformationen

15.2.1 Translation (Parallelverschiebung)

Die Parallelverschiebung oder Translation ist eine geometrische Abbildung, die jeden Punkt der Zeichenebene oder des Raumes in derselben Richtung um dieselbe Strecke verschiebt. Sie kann durch einen Vektor, den sogenannten Verschiebungsvektor, gekennzeichnet werden.[15.18]

Parallelverschiebungen gehören zu den Bewegungen, da bei ihrer Anwendung Längen und Winkel erhalten bleiben. Als Bewegungen werden sie – vor allem die Parallelverschiebungen in der Ebene – auch zu den ***Kongruenzabbildungen*** gezählt.

Abbildung 15.31:



Quelle: Eigene Darstellung

[15.18] Wikipedia: https://de.wikipedia.org/wiki/Parallelverschiebung; Abruf am 29-JUL-2017.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

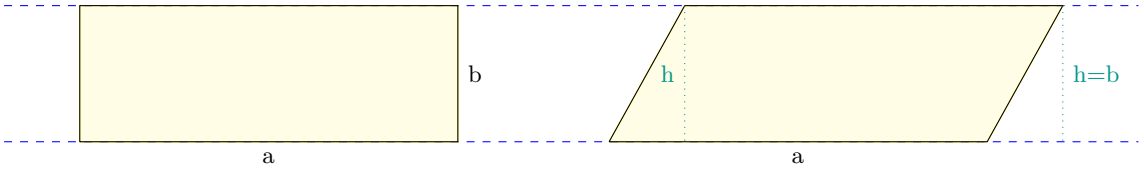
Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

15.2.2 Scherung

Unter einer **Scherung** oder auch **Transvektion** versteht man ursprünglich in der Geometrie der Ebene bestimmte affine Abbildungen der Ebene auf sich selbst, bei denen der Flächeninhalt erhalten bleibt.[15.19]

Bei einer Scherung bleibt eine Gerade der Ebene (die Fixpunktgerade oder Achse der Scherung) fix, das heißt, jeder Punkt dieser Geraden wird auf sich abgebildet. Alle anderen Punkte der Ebene werden parallel zur Achse verschoben, dabei ist die Länge des Verschiebungsvektors eines Punktes proportional zum Abstand dieses Punktes von der Achse. Alle Geraden, die parallel zur Achse sind, werden auf sich abgebildet, sind also Fixgeraden. Strecken auf diesen Geraden werden längentreu abgebildet.

Abbildung 15.32: Eine Scherung bildet ein Rechteck auf ein Parallelogramm ab



Quelle: Eigene Darstellung

Bei einer Scherung bleibt also der Abstand jedes Punktes zur Achse unverändert. Damit werden **Rechtecke** und Rechtecke, bei denen eine Seite parallel zur Achse ist, auf Rechtecke bzw. Rechtecke abgebildet, die (lotrecht zu der Seite, die parallel zur Achse ist) eine gleich lange Höhe haben (vgl. die Abbildung).

Bemerkenswert ist, dass zur Charakterisierung einer Scherung keine Abstands- oder Flächeninhaltsbegriffe benutzt werden müssen. Scherungen lassen sich so in jeder affinen Ebene definieren. Die in der Einleitung genannten Eigenschaften sind dann so zu präzisieren:

Ist in der Ebene ein **euklidischer Abstand** und ein mit diesem Abstand verträglicher Flächeninhalt definiert, dann bleiben bei einer Scherung mit Achse a

- der Abstand zwischen zwei Punkten, die auf a oder Parallelen zu a liegen,
- der Abstand zwischen zwei zu a parallelen Gerade
- der (orientierte) Flächeninhalt jeder messbaren Fläche

erhalten.

In der reellen Ebene kann man durch Wahl einer „Einheitsellipse“, oder gleichwertig durch Wahl eines affinen Koordinatensystems als Orthonormalbasis unterschiedliche euklidische Strukturen, d. h. unterschiedliche Winkel- und Abstandsbegriffe einführen. Eine Scherung hat nun die genannten Invarianzeigenschaften in Bezug auf jede dieser Strukturen, während zum Beispiel eine **Drehung** bezüglich einer euklidischen Struktur bezüglich einer anderen keine Drehung zu sein braucht. Diese Unabhängigkeit von der euklidischen Struktur teilen die Scherungen mit den **Parallelverschiebungen**.

[15.19] Wikipedia: https://de.wikipedia.org/wiki/Scherung_(Geometrie); Abruf am 29-JUL-2017.

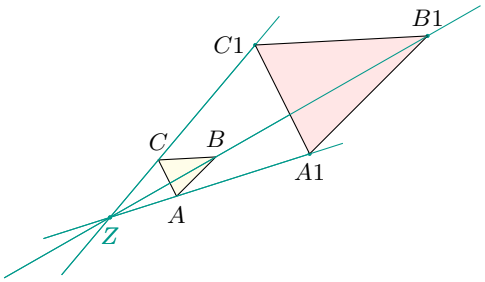
© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

15.2.3 Zentrische Streckung

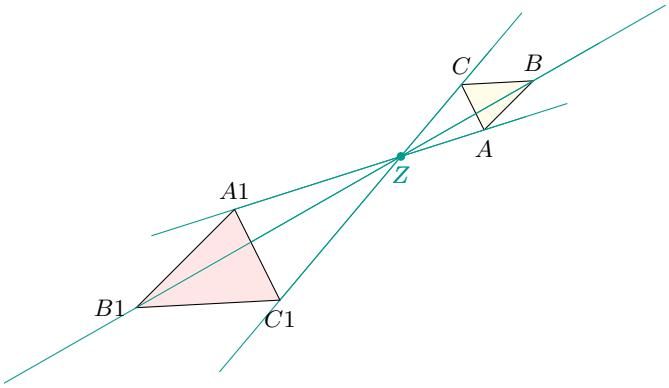
Unter einer zentrischen Streckung versteht man in der Geometrie eine Abbildung, die alle Strecken in einem bestimmten, gegebenen Verhältnis m vergrößert oder verkleinert, wobei die Bildstrecken jeweils zu den ursprünglichen Strecken parallel sind. Zentrische Streckungen sind spezielle Ähnlichkeitsabbildungen.[15.20]

Abbildung 15.33: Positiver Streckungsfaktor $m = 3$



Quelle: Eigene Darstellung

Abbildung 15.34: Negativer Streckungsfaktor $m = -2$



Quelle: Eigene Darstellung

Eigenschaften

- Zentrische Streckungen sind geraden-, kreis- und winkeltreu.
- Die Längenverhältnisse bleiben erhalten.
- Die Bildstrecke einer beliebigen Strecke hat die $|m|$-fache Länge.
- Eine beliebige geometrische Figur wird auf eine Figur mit dem m^2-fachen Flächeninhalt abgebildet.
- Ein beliebiger Körper wird auf einen Körper mit dem $|m|^3$-fachen Volumen abgebildet.
- Die zentrischen Streckungen mit einem bestimmten Zentrum bilden algebraisch gesehen eine Gruppe.
- Das Bild einer Geraden ist eine Parallele zu der Geraden.
- In vektorieller Schreibweise wird die zentrische Streckung mit Zentrum Z und Streckungsfaktor m beschrieben durch
  $P' = Z + m \cdot (P - Z) = m \cdot P + (1 - m) \cdot Z$
- Damit ist eine zentrische Streckung die Affinität, die durch die Matrix $m \cdot E_n$ und den Verschiebungsvektor $(1 - m) \cdot Z$ beschrieben wird.
- Auch die identische Abbildung wird als Streckung mit dem Streckfaktor $m = 1$ zu den Streckungen gezählt. Eine nichtidentische Streckung hat genau einen Fixpunkt, das ist ihr Streckzentrum, und ihre Fixgeraden sind genau die Geraden, die durch dieses Zentrum gehen.

[15.20] https://de.wikipedia.org/wiki/Zentrische_Streckung; Abruf 2020-07-29.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

16 Trigonometrie

Die Grundaufgabe der Trigonometrie besteht darin, aus drei Größen eines gegebenen Dreiecks (Seitenlängen, Winkelgrößen, Längen von Dreieckstransversalen usw.) andere Größen dieses Dreiecks zu berechnen. Als Hilfsmittel werden die trigonometrischen Funktionen (Winkelfunktionen, Kreisfunktionen, goniometrischen Funktionen) Sinus (sin), Kosinus (cos), Tangens (tan), Kotangens (cot), Sekans (sec) und Kosekans (csc) verwendet. Trigonometrische Berechnungen können sich aber auch auf kompliziertere geometrische Objekte beziehen, beispielsweise auf Polygone (Vielecke), auf Probleme der Stereometrie (Raumgeometrie) und auf Fragen vieler anderer Gebiete.[16.1]

16.1 Strahlensatz

Der **Strahlensatz** (man spricht auch vom ersten, zweiten und dritten Strahlensatz) oder **Vierstreckensatz** gehört zu den wichtigsten Aussagen der Elementargeometrie. Er befasst sich mit Streckenverhältnissen und ermöglicht es bei vielen geometrischen Überlegungen, unbekannte Streckenlängen auszurechnen.[16.2]

16.1.1 Allgemeine Formulierung

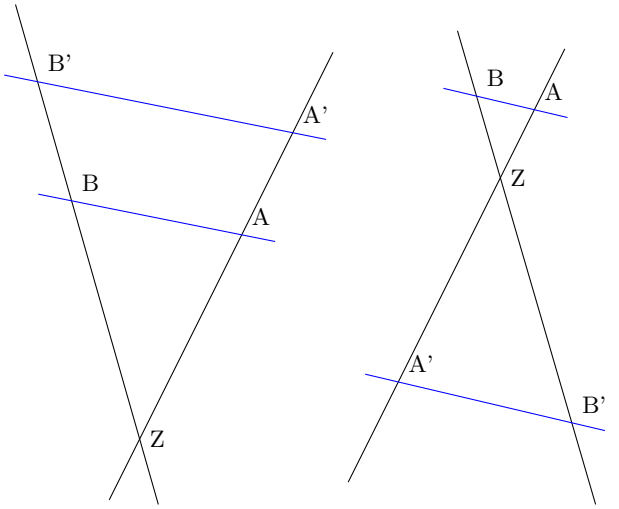
Wenn zwei durch einen Punkt (Scheitel) verlaufende Geraden von zwei Parallelen geschnitten werden, die nicht durch den Scheitel gehen, dann gelten die folgenden Aussagen:

[16.1] https://de.wikipedia.org/wiki/Trigonometrie; Abruf am 2017-08-01.
[16.2] https://de.wikipedia.org/wiki/Strahlensatz; Abruf 2017-07-30.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

1. Es verhalten sich je zwei Abschnitte auf der einen Geraden so zueinander wie die ihnen entsprechenden Abschnitte auf der anderen Geraden, also zum Beispiel
   ZA : AA' = ZB : BB' oder
   ZA : ZA' = ZB : ZB'.
2. Es verhalten sich die Abschnitte auf den Parallelen wie die ihnen entsprechenden, vom Scheitel aus gemessenen Strecken auf jeweils derselben Geraden
   (z. B. AB : A'B' = ZA : ZA' oder
   A'B' : AB = ZB' : ZB).
3. Es stehen je zwei Abschnitte auf den Parallelen, die einander entsprechen, in gleichem Verhältnis zueinander. Dieser Strahlensatz setzt im Gegensatz zu den ersten beiden Strahlensätzen mindestens drei Geraden voraus. Er ist hier nicht skizziert.



Die beiden Skizzen berücksichtigen, dass der Kreuzungspunkt Z außerhalb oder innerhalb der beiden parallelen Geraden liegen kann. Im ersten Fall spricht man gelegentlich von einer „V-Figur“ (linke Skizze), im zweiten von einer „X-Figur“ (rechte Skizze).

Der erste Strahlensatz bezieht sich also auf die Verhältnisse von Strahlenabschnitten, der zweite auf die Verhältnisse von Strahlen- und Parallelenabschnitten und der dritte auf die Verhältnisse von Parallelenabschnitten.

Regel 16.1: Umkehrung des Strahlensatzes

Ist Eigenschaft 1 erfüllt, so kann man auf parallele Geraden schließen. Ist dagegen Eigenschaft 2 gegeben, so ist ein entsprechender Schluss auf Parallelität nicht möglich.

Der Name Strahlensatz erklärt sich aus der Tatsache, dass man oft nur den Spezialfall betrachtet, in dem die beiden Parallelen auf derselben Seite des Scheitels liegen („V-Figur“). Denn dann benötigt man zur Formulierung keine zwei sich in einem Scheitel schneidenden Geraden, sondern lediglich zwei Strahlen mit gemeinsamem Ursprung.

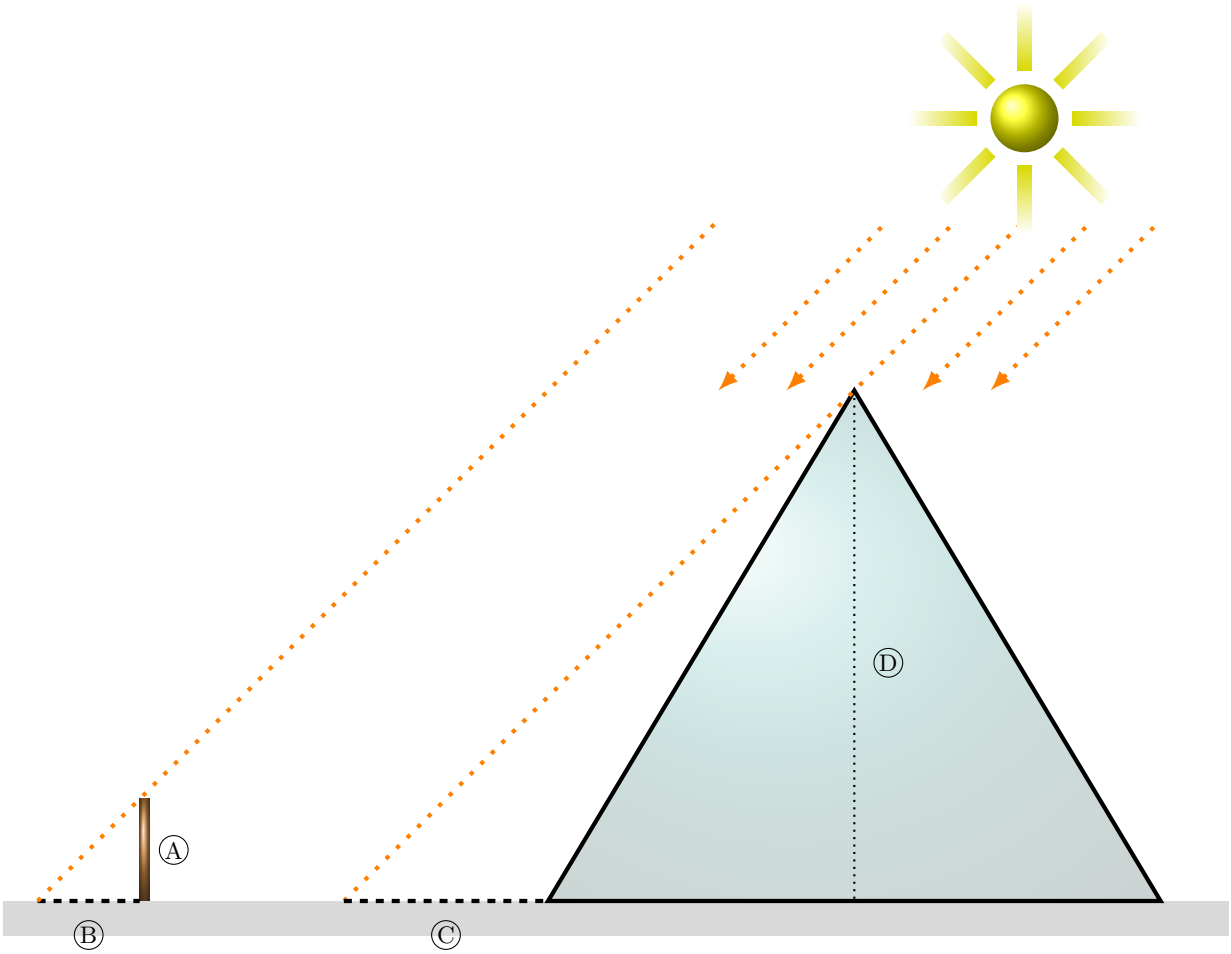
© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

16.1.2 Anwendungsbeispiel

Ein einfaches Beispiel für die Anwendung des Strahlensatzes soll auf den antiken griechischen Philosophen und Mathematiker **Thales von Milet**[16.3] zurückgehen. Dieser habe mit Hilfe eines Stabes durch Messung der Schattenlänge die Höhe der ägyptischen Cheopspyramide ermittelt. In anderen Sprachen wird der Strahlensatz daher oft auch als **Satz des Thales** bezeichnet.

Die folgende Beispielrechnung ermittelt die Höhe der Cheopspyramide mit Hilfe des Strahlensatzes, sie entspricht jedoch vermutlich nicht der exakten Berechnung des Thales selbst:



Zunächst bestimmt man die Seitenlänge der Pyramide und anschließend die Länge des Schattens eben jener. Anschließend steckt man einen Stab senkrecht in den Boden und vermisst dessen Höhe und dessen Schattenlänge. Man erhält dann die folgenden Werte:

- Höhe des Stabes: $A = 1{,}63\,\text{m}$
- Schattenlänge des Stabes: $B = 2{,}00\,\text{m}$
- Direkt messbare Schattenlänge der Pyramide: $65\,\text{m}$

[16.3] Thales von Milet (* wahrscheinlich um 624/23 v. Chr.; † zwischen 548 und 544 v. Chr.) war ein vorsokratischer Naturphilosoph, Geometer und Astronom des archaischen Griechenlands.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

- Seitenlänge der Pyramide: 230 m
- Gesamte Schattenlänge der Pyramide:

$$C = 65\,\text{m} + \frac{1}{2} \cdot 230\,\text{m} \tag{16.1}$$

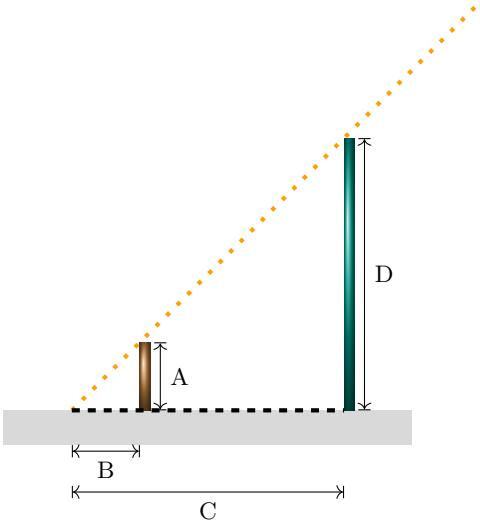
- Gesuchte Höhe der Pyramide: D

Mit Hilfe des Strahlensatzes (Skizze 2) stellt man die folgende Gleichung auf:

$$\frac{D}{A} = \frac{C}{B} \tag{16.2}$$

Die Länge der Seite C des Dreiecks setzt sich dabei aus der halben Seitenlänge und der Länge des Schattens der Pyramide zusammen. Umgestellt nach D erhielt man:

$$D - \frac{A \cdot C}{B} = \frac{163\,\text{m} \cdot \frac{1}{2} \cdot 230\,\text{m}}{2{,}00\,\text{m}} = 146{,}7\,\text{m} \tag{16.3}$$



© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

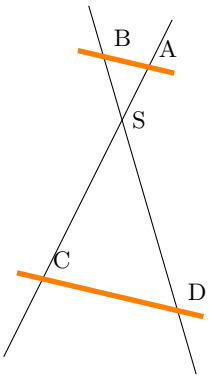
Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

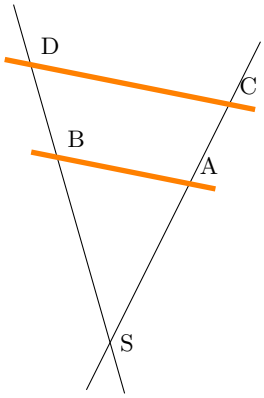
16.1.3 Der 1. Strahlensatz

Satz 16.1: 1. Strahlensatz

Werden 2 Geraden, die sich schneiden, von zwei Parallelen geschnitten: dann verhalten sich beliebige Abschnitte auf der einen Geraden wie die entsprechende Abschnitte auf der anderen Geraden.

Für beide Abbildungen gilt: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

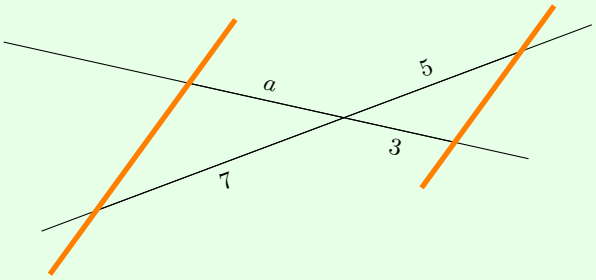




$$\frac{\overline{SA}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{SB}}{\overline{SD}}$$
$$\frac{\overline{SA}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{SB}}{\overline{BD}}$$

Beispiel 16.1: 1. Strahlensatz

Berechne die Strecke a (Angaben in cm).



$$\frac{a}{3} = \frac{7}{5} \qquad (16.4)$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{7}{5} \cdot 3 \qquad (16.5)$$
$$\Leftrightarrow a = 4{,}2 \qquad (16.6)$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

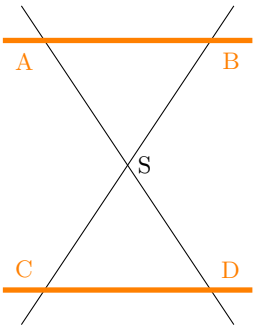
Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

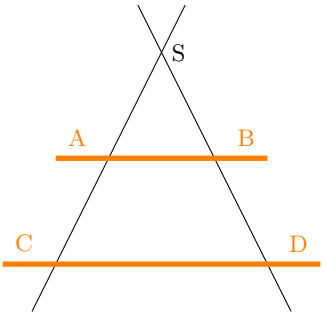
16.1.4 Der 2. Strahlensatz

Satz 16.2: 2. Strahlensatz

Werden 2 Geraden, die sich schneiden, von zwei Parallelen geschnitten: dann verhalten sich die Parallelabschnitte zwischen den Geraden zueinander wie die Abschnitte der vom Scheitelpunkt aus gemessenen Geradenstücke.

Für beide Abbildungen gilt: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$





$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SC}}$$

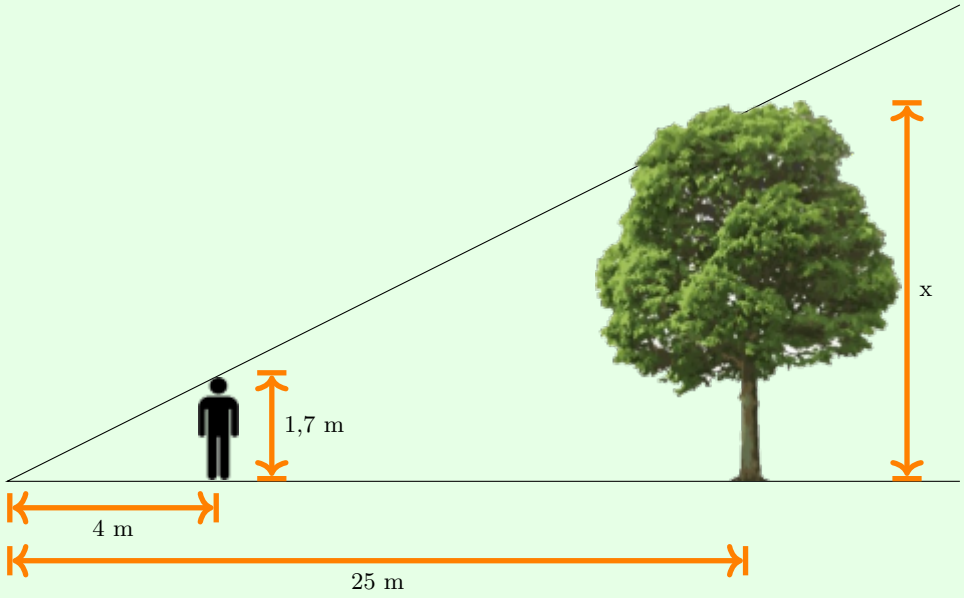
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{SB}}{\overline{SD}}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beispiel 16.2: 2. Strahlensatz

Berechnen Sie die Höhe des Baumes.



Berechnung mit Hilf des 2. Strahlensatzes:

$$\frac{x}{1{,}7} = \frac{25}{4} \qquad \Rightarrow x = \frac{25 \cdot 1{,}7}{4} = 10{,}6 \tag{16.7}$$

Der Baum ist 10,6 m hoch.

Weitere Übungen finden Sie bei (alle Links zuletzt geprüft am 2025-08-11):

http://www.mathe-trainer.de/Klasse9/Strahlensaetze/Block1/Aufgaben.htm

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

16.2 Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck

Besonders einfach ist die Trigonometrie des rechtwinkligen Dreiecks. Da die Winkelsumme eines Dreiecks 180° beträgt, ist der rechte Winkel eines solchen Dreiecks der größte Innenwinkel. Ihm liegt die längste Seite (als ***Hypotenuse*** bezeichnet) gegenüber. Die beiden kürzeren Seiten des Dreiecks nennt man ***Katheten***. Wenn man sich auf einen der beiden kleineren Winkel bezieht, ist es sinnvoll, zwischen der ***Gegenkathete*** (dem gegebenen Winkel gegenüber) und der ***Ankathete*** (benachbart zum gegebenen Winkel) zu unterscheiden. Man definiert nun:

$$\text{Sinus von } \alpha = \sin(\alpha) := \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

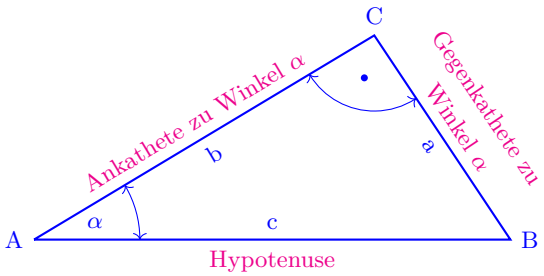
$$\text{Kosinus von } \alpha = \cos(\alpha) := \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\text{Tangens von } \alpha = \tan(\alpha) := \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\text{Kotangens von } \alpha = \cot(\alpha) := \frac{b}{a} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$$

$$\text{Sekans von } \alpha = \sec(\alpha) := \frac{c}{b} = \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Ankathete}}$$

$$\text{Kosekans von } \alpha = \csc(\alpha) := \frac{c}{a} = \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Gegenkathete}}$$



Dabei ist es nicht ganz selbstverständlich, dass diese Definitionen sinnvoll sind. Von dem betrachteten Dreieck sind nämlich nur die Größen der Winkel bekannt, nicht aber die Seitenlängen. Verschiedene rechtwinklige Dreiecke mit dem gegebenen Winkel sind aber immerhin untereinander ähnlich, sodass sie in ihren Seitenverhältnissen übereinstimmen.

Beispielsweise könnte eines dieser Dreiecke doppelt so lange Seiten haben als das andere. Die Brüche der genannten Definitionsgleichungen hätten in diesem Fall die gleichen Werte. Diese Werte hängen also nur vom gegebenen Winkel ab. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, von ***Funktionen der Winkel*** zu sprechen.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beispiel 16.3: Berechnung einer Seitenlänge

Die folgenden Zahlenwerte sind abgerundet. In einem Dreieck ABC sind folgende Größen gegeben:

$$b = 5{,}5\,\text{cm}; \qquad \alpha = 29^\circ; \qquad \gamma = 90^\circ \tag{16.8}$$

Aus diesen Angaben soll die Seitenlänge c ermittelt werden. Da die Ankathete von α bekannt und die Hypotenuse gesucht ist, wird die Kosinus-Funktion verwendet.

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{b}{\cos(\alpha)} = \frac{5{,}5\,\text{cm}}{\cos(29^\circ)} \approx 6{,}3\,\text{cm} \tag{16.9}$$

Beispiel 16.4: Berechnung einer Winkelgröße

Von einem Dreieck ABC ist bekannt:

$$a = 3{,}1\,\text{cm}; \qquad b = 5{,}5\,\text{cm}; \qquad \gamma = 90^\circ \tag{16.10}$$

Gesucht ist der Winkel β. Die beiden gegebenen Seiten a und b sind die Ankathete und die Gegenkathete von β. Daher ist es sinnvoll, die Tangens-Funktion einzusetzen.

$$\tan(\beta) = \frac{b}{a} = \frac{5{,}5\,\text{cm}}{3{,}1\,\text{cm}} \approx 1{,}8 \tag{16.11}$$

Während im letzten Beispiel für einen bekannten Winkel der Kosinuswert zu berechnen war, ist hier die Situation umgekehrt. Aus einem bekannten Tangenswert soll der zugehörige Winkel bestimmt werden. Man benötigt hierfür die Umkehrfunktion der Tangens-Funktion, die so genannte ***Arcustangens-Funktion*** (arctan). Mit dieser erhält man:

$$\beta \approx \arctan(1{,}8) \approx 61{,}0^\circ \tag{16.12}$$

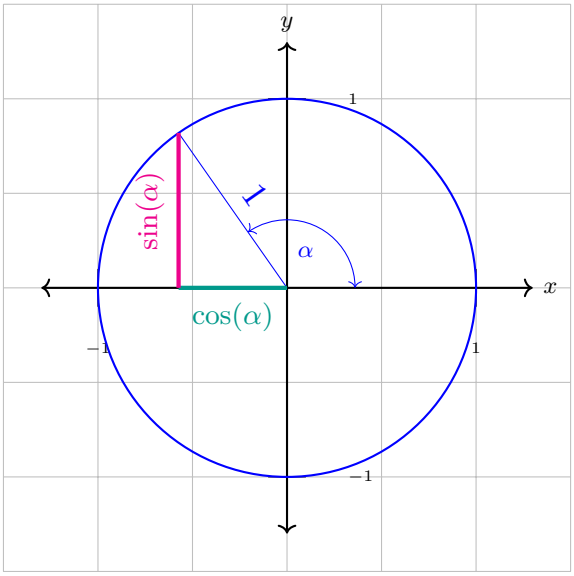
Übungsaufgaben hierzu finden Sie im Internet unter (alle Links zuletzt geprüft am 2025-08-11):
https://www.aufgabenfuchs.de/mathematik/flaeche/dreieck/trigonometrie.shtml
http://www.mathe-trainer.de/Klasse10/Trigonometrie/Aufgabensammlung.htm
https://www.frustfrei-lernen.de/mathematik/sinus-cosinus-tangens-winkelfunktion-trigonometrie-uebungen.html

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

16.3 Trigonometrische Funktionen am Einheitskreis

Die bisher verwendeten Definitionen sind nur für Winkel unter 90° brauchbar. Für viele Zwecke ist man jedoch an trigonometrischen Werten größerer Winkel interessiert. Der Einheitskreis, das ist ein Kreis mit Radius 1, erlaubt eine solche Erweiterung der bisherigen Definition. Zum gegebenen Winkel wird der entsprechende Punkt auf dem Einheitskreis bestimmt. Die x-Koordinate dieses Punkts ist der Kosinuswert des gegebenen Winkels, die y-Koordinate der Sinuswert.



Die oben gegebene Definition von Sinus- und Kosinuswert durch x- und y-Koordinate lässt sich problemlos auf Winkel über 90° ausdehnen.

Man erkennt dabei, dass für Winkel zwischen 90° und 270° die x-Koordinate und damit auch der Kosinus negativ ist, entsprechend für Winkel zwischen 180° und 360° die y-Koordinate und somit auch der Sinus.

Auch auf Winkel, die größer als 360° sind, sowie auf negative Winkel lässt sich die Definition damit ohne Weiteres übertragen.

Man beachte, dass in der modernen Herangehensweise die Beziehung zwischen Winkel und Sinus bzw. Kosinus dazu benutzt wird, um den Winkel zu definieren. Die Sinus- und Kosinusfunktion selbst werden über ihre Reihendarstellung eingeführt.

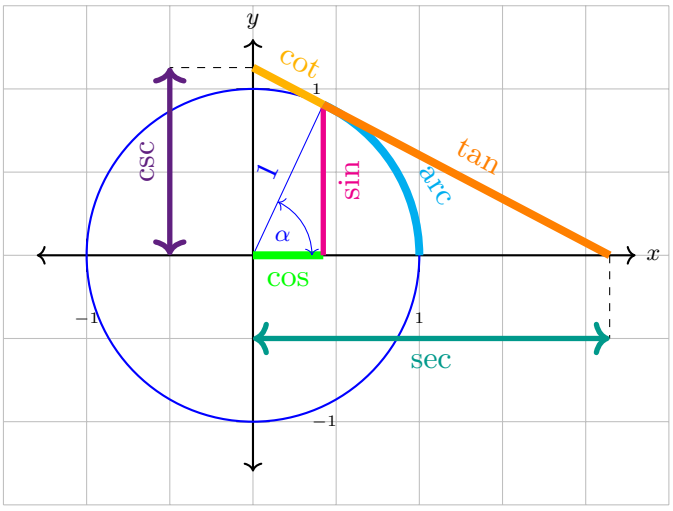
Die weiteren vier trigonometrischen Funktionen sind definiert durch:

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \tag{16.13}$$

$$\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \tag{16.14}$$

$$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)} \tag{16.15}$$

$$\csc(\alpha) = \frac{1}{\sin(\alpha)} \tag{16.16}$$



© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

17 Grundbegriffe der Vektorrechnung

17.1 Grundlagen

17.1.1 Einleitung

Im allgemeinen Sinn versteht man unter einem Vektor[17.1] ein Element eines **Vektorraums**, das heißt ein Objekt, das zu anderen Vektoren addiert und mit Zahlen, die als **Skalare** bezeichnet werden, multipliziert werden kann.[17.2]

Vektoren haben einen **Betrag** und eine **Richtung**.

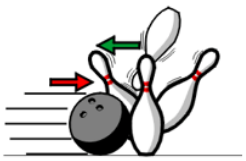
Begründet wurde die Vektorrechnung von Hermann Günter Graßmann[17.3], der 1844 seine lineare Ausdehnungslehre veröffentlichte, ein über dreihundert Seiten starkes Buch.

17.1.2 Physikalische Motivation

Physikalische Größen in der Anwendung, die neben einen **Betrag** auch noch eine **Richtung** haben und damit durch **Vektoren** beschrieben werden können, sind z. B.:

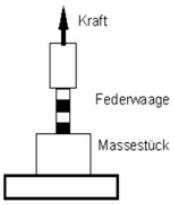
- Geschwindigkeit
- Beschleunigung
- Kraft
- elektrische Feldstärke
- ...

Abbildung 17.1:



Quelle: [SC17]

Abbildung 17.2:



Quelle: [SC17]

[17.1] (lat. vector „Träger, Fahrer“)

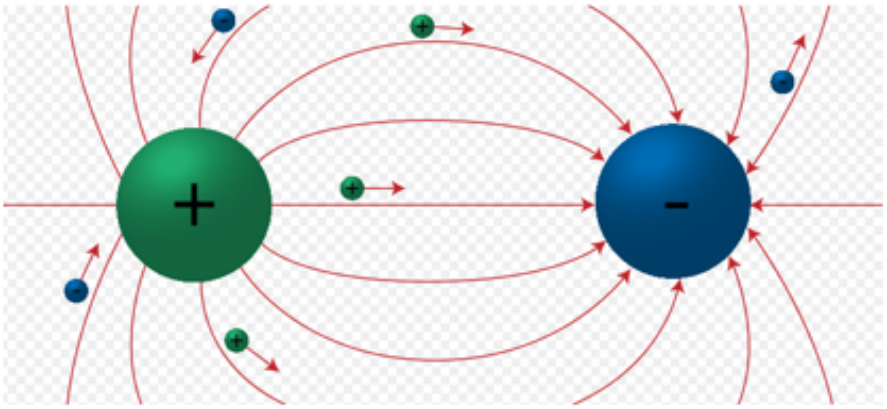
[17.2] https://de.wikipedia.org/wiki/Vektor; abgerufen am 2014-09-26

[17.3] Hermann Günther Graßmann (* 15. April 1809 in Stettin; † 26. September 1877 ebenda) war ein deutscher Mathematiker, Physiker und Sprachwissenschaftler. Er gilt als eigentlicher Begründer der Vektor- und Tensorrechnung.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Abbildung 17.3:



Quelle: [SC17]

Definition 17.1: Schreibweise von Vektoren

Vektoren werden üblicherweise mit kleinen lateinischen Buchstaben mit Pfeil geschrieben: z. B.

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \ldots \tag{17.1}$$

Manche Autoren (insbesondere aus der Physik) verwenden stattdessen kleine, fettgedruckte lateinische Buchstaben ohne Pfeil: z. B.

$$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \ldots \tag{17.2}$$

17.2 Koordinatensysteme

Definition 17.2: Koordinatensystem

Ein ***Koordinatensystem*** dient zur eindeutigen Bezeichnung der Position von Punkten und Objekten in einem geometrischen Raum.[17.4]

Eine Koordinate ist eine von mehreren Zahlen, mit denen man die Lage eines Punktes in einer Ebene oder in einem Raum angibt.

Der Koordinatenursprung bezeichnet den Punkt in einem Koordinatensystem, an dem alle Koordinaten den Wert Null annehmen. Er wird auch Nullpunkt oder „Pol“ genannt.

Durch den Ursprung verlaufen häufig, aber nicht zwingend die Koordinatenachsen.

Die Anzahl der zur Beschreibung der Position notwendigen Werte ist die **Dimension** des Raumes. In diesem Sinne bezeichnet man eine Ebene als zweidimensionalen Raum. Man fasst die Koordinaten eines n-dimensionalen Raumes dann auch als n-Tupel von reellen Werten auf.

[17.4] https://de.wikipedia.org/wiki/Koordinatensystem; abgerufen am 2016-08-04

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Definition 17.3: Schreibweise, Transposition

n-Tupel werden als ***Spaltenvektoren*** notiert. Um in Skripten oder Büchern Platz zu sparen, verwendet man häufig auch die ***transponierte Form***:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \tag{17.3}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

17.2.1 Dimensionen von Koordinatensystemen

Abbildung 17.4:
Eindimensionale Vektoren

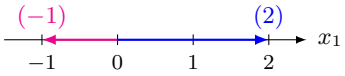


Abbildung 17.5:
Zweidimensionale Vektoren

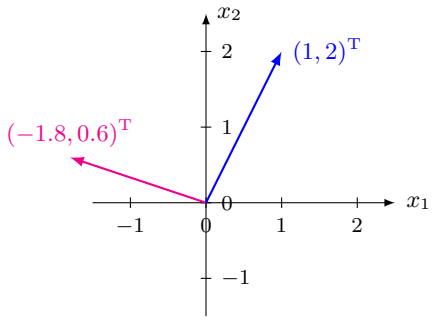
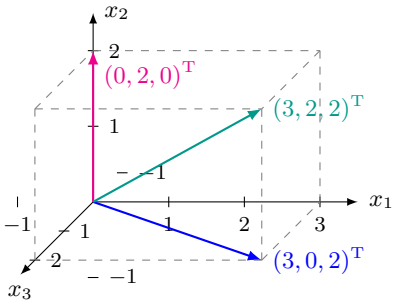


Abbildung 17.6:
Dreidimensionale Vektoren



$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} :\Leftrightarrow \vec{x} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + x_3 \cdot \vec{e}_3 \qquad (17.4)$$

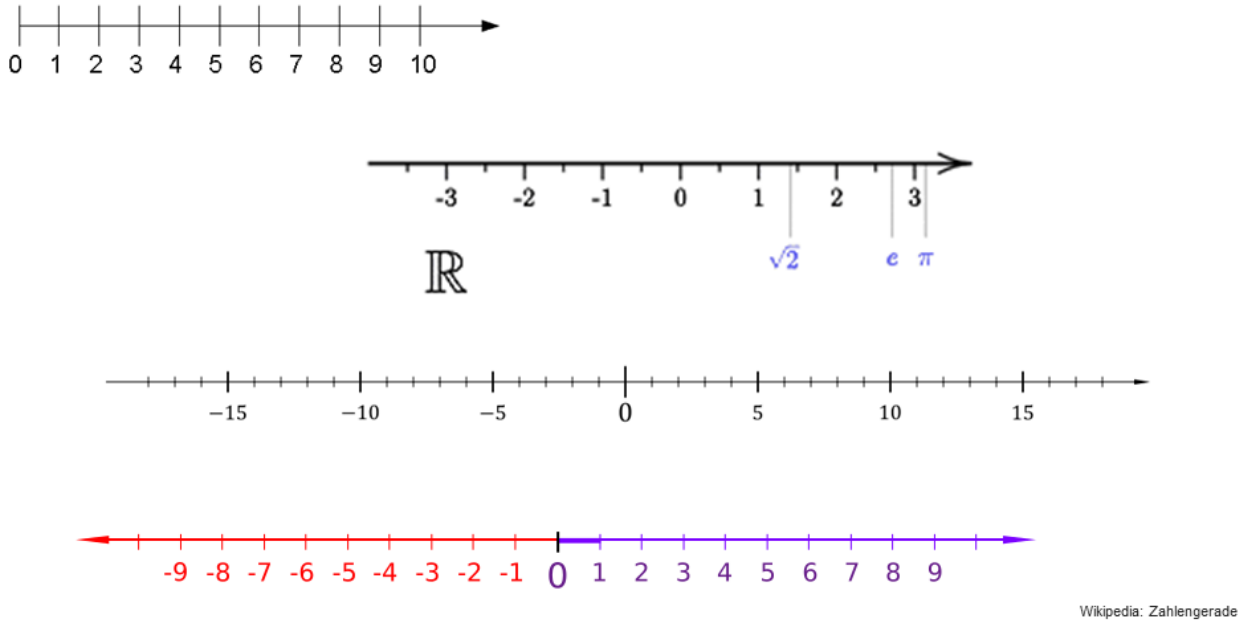
kartesische Basisvektoren: $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

17.2.2 Eindimensionale Koordinatensysteme

Der Zahlenstrahl oder die Zahlengerade sind eindimensionale Koordinatensysteme.



Wikipedia: Zahlengerade

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

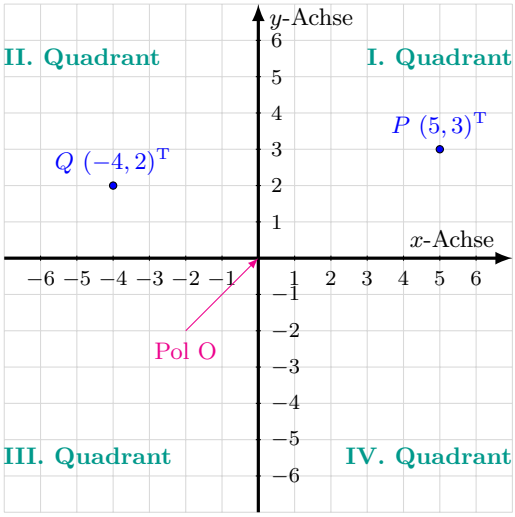
Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

17.2.3 Kartesische Koordinatensysteme

Ein **kartesisches Koordinatensystem** ist ein **orthogonales Koordinatensystem**.[17.5] Es ist nach dem latinisierten Namen Cartesius des französischen Mathematikers René Descartes[17.6] benannt, der das Konzept der „kartesischen Koordinaten“ bekannt gemacht hat. Im zwei- und dreidimensionalen Raum handelt es sich um das am häufigsten verwendete Koordinatensystem, da sich viele geometrische Sachverhalte in diesem Koordinatensystem anschaulich und übersichtlich beschreiben lassen.

Die beiden Richtungsachsen im ebenen kartesischen Koordinatensystem stehen **orthogonal** aufeinander, schneiden sich also im 90°-Winkel. Die Koordinatenlinien sind Geraden in konstantem Abstand voneinander. Geht man von der mathematischen Rechtshändigkeit aus, so bezeichnet man die horizontale Achse als **Abszissenachse** oder kurz **Abszisse** (von lat. linea abscissa „abgeschnittene Linie“) oder Rechtsachse. Die vertikale Achse heißt **Ordinatenachse** oder kurz **Ordinate** (von lat. linea ordinata „geordnete Linie“) oder Hochachse.

Abbildung 17.7: Kartesisches Koordinatensystem



Quelle: Eigene Abbildung, nach https://de.wikipedia.org/wiki/Kartesisches_Koordinatensystem; abgerufen am 2017-09-11

Den Schnittpunkt der beiden Richtungsachsen bezeichnet man auch als **Ursprung** oder **Pol** O des Koordinatensystems.[17.7]

Im **dreidimensionalen Raum** kommt noch eine dritte Achse hinzu, die räumliche Achse, z-Achse, **Applikate**[17.8] (in der Geographie: Kote) genannt wird.

Meistens liegen hier x- und y-Achse in der Ebene, und die z-Achse dient der Höhenanzeige.

Wie im zweidimensionalen Fall sind auch bei dreidimensionalen geodätischen Koordinatensystemen die x- und y-Achse vertauscht, während die z-Achse wie auch beim mathematischen Koordinatensystem nach oben zeigt.

[17.5] https://de.wikipedia.org/wiki/Vektor; abgerufen am 2017-09-11

[17.6] René Descartes (latinisiert Renatus Cartesius; * 31. März 1596 in La Haye en Touraine; † 11. Februar 1650 in Stockholm) war ein französischer Philosoph, Mathematiker und Naturwissenschaftler. Descartes gilt als der Begründer des modernen frühneuzeitlichen Rationalismus.

[17.7] Großes „O“ vol lat. Origo = Ursprung, Herkunft, Abkunft, Abstammung; nicht mit der Ziffer „0“ zu verwechseln!

[17.8] lat. applico: Etwas verbinden, hinzufügen, auf etwas richten

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Häufig werden die Achsen nicht mit $x, y, (z)$ bezeichnet, sondern mit $x_1, x_2, (x_3)$; dies hat den Vorteil, dass man dieses System leicht auf beliebige Dimensionen erweitern („n-dimensionales Koordinatensystem“) und bei Berechnungen mit dem Summenzeichen arbeiten kann, wie beispielsweise bei der Berechnung der **euklidischen Norm** eines n-dimensionalen Vektors, der im $\mathbb{R}^n$ durch $(x_1, x_2, ..., x_n)^{\mathrm{T}}$ gegeben ist:

$$||\vec{x}|| = ||(x_1, x_2, ..., x_n)^{\mathrm{T}}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \tag{17.5}$$

CAD-Systeme bezeichnen die kartesischen Koordinatenachsen im $\mathbb{R}^3$ i. d. R. mit x, y, z; allgemein in der Mathematik (sowie bei Anwendungen wie FEM-Berechnungen) wird meistens x_1, x_2, x_3 verwendet.

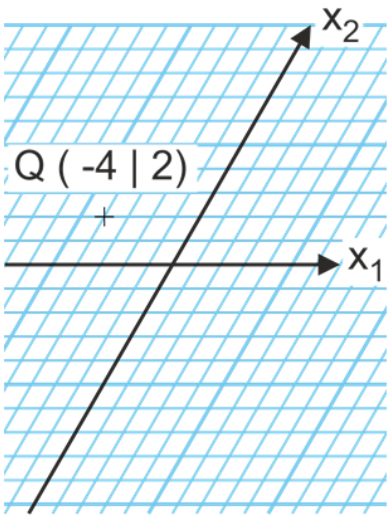
17.2.4 Krummlinige Koordinatensysteme

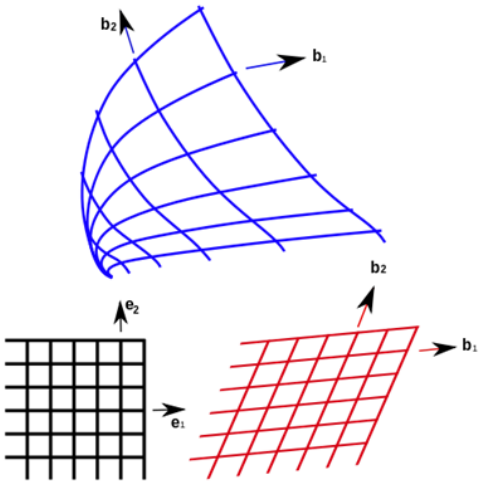
Krummlinige Koordinatensysteme

Hierzu gehören neben Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinatensysteme (siehe unten) auch alle Arten nicht-kartesischer Koordinatensysteme.

Anwendungen:

Spezialfälle





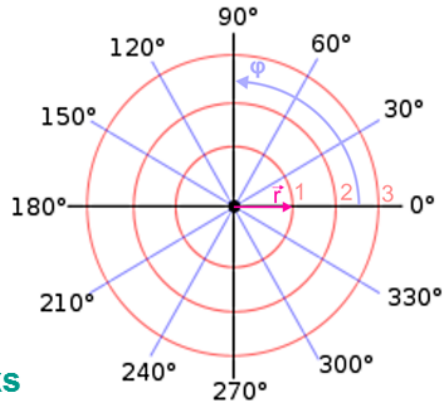
Wikipedia: Krummlinige Koordinaten

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

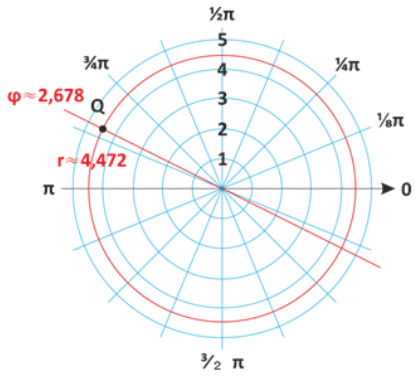
Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

17.2.5 Polarkoordinaten

Ein Polarkoordinatensystem wird durch einen Einheitsvektor $\vec{r}$ und einen Winkel φ aufgespannt.



Jeder Punkt ist ein-eindeutig durch die Angabe der Entfernung r und der Richtung φ vom Pol definiert.

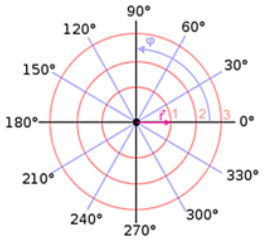


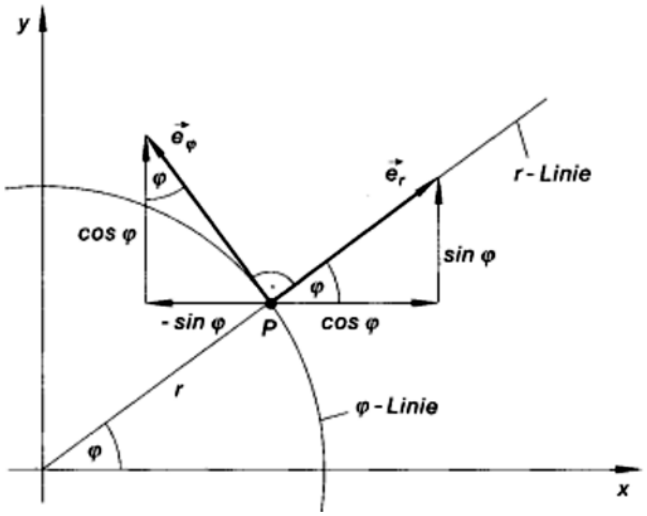
Im Beispiel links ist der Punkt Q mit den kartesischen Koordinaten (-4 | 2) eingezeichnet.

Man nennt r den Radius und φ den Azimut von Q.

Wikipedia: Polarkoordinaten

Die Basisvektoren in Polarkoordinaten sind $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\varphi$.
→ Radial- und Tangentialkomponente.





$$\vec{e}_r = \vec{e}_x \cdot \cos\varphi + \vec{e}_y \cdot \sin\varphi$$
$$\vec{e}_\varphi = -\vec{e}_x \cdot \sin\varphi + \vec{e}_y \cdot \cos\varphi$$

Papula; Wikipedia: Polarkoordinaten

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

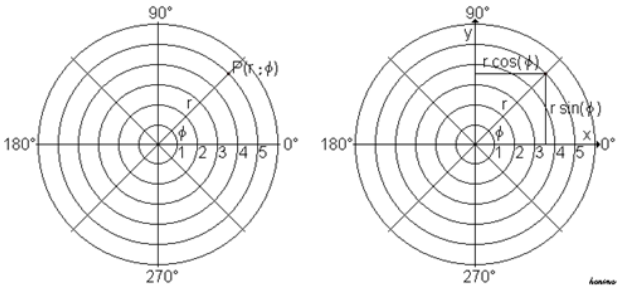
Umrechnung kartesische Koordinaten ← → Polarkoordinaten

Polar → Kartesisch:

$$x = r \cdot \cos\varphi$$
$$y = r \cdot \sin\varphi$$

Kartesisch → Polar

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = \arctan\frac{y}{x}$$



ACHTUNG! Fallunterscheidungen:

→ atan2(x,y)
→ arctan2(x,y)

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & \text{für } x > 0 \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi & \text{für } x < 0 \text{ und } y \geq 0 \\ \arctan\frac{y}{x} - \pi & \text{für } x < 0 \text{ und } y < 0 \\ +\frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0 \text{ und } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0 \text{ und } y < 0 \end{cases}$$

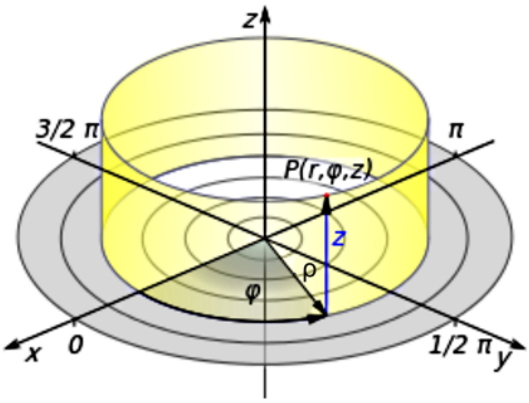
Wikipedia: Polarkoordinaten

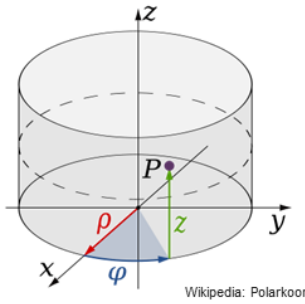
Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

17.2.6 Zylinderkoordinaten

Zylinderkoordinaten

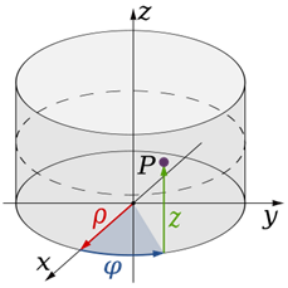
Zylinderkoordinaten oder zylindrische Koordinaten sind im Wesentlichen ebene Polarkoordinaten, die um eine dritte Koordinate ergänzt sind. Diese dritte Koordinate beschreibt die Höhe eines Punktes senkrecht über (oder unter) der Ebene des Polarkoordinatensystems und wird im Allgemeinen mit z bezeichnet. Die Koordinate ρ beschreibt jetzt nicht mehr den Abstand eines Punktes vom Koordinatenursprung, sondern von der z-Achse.

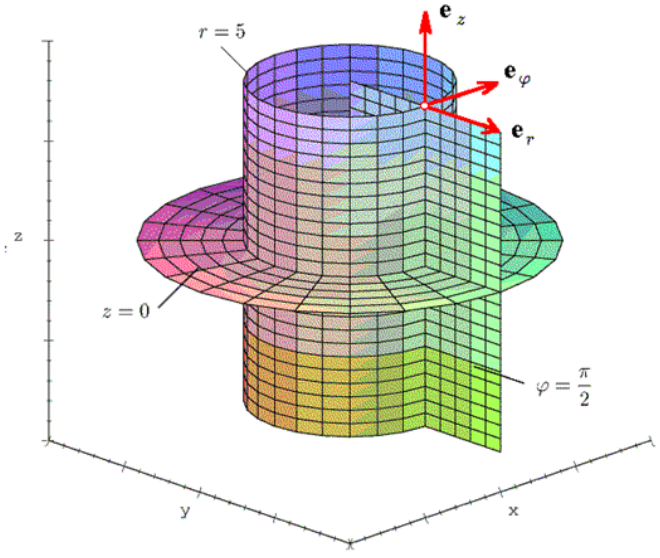




Wikipedia: Polarkoordinaten

Die Basisvektoren des zylindrischen Koordinatensystems sind:





$$\overrightarrow{e_\rho} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{e_\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

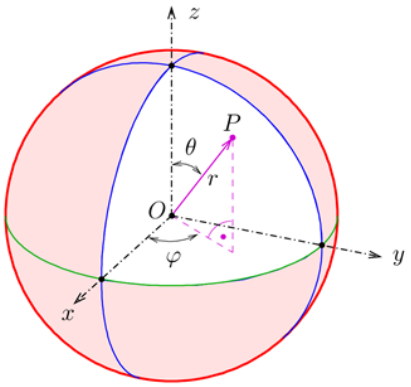
$$\overrightarrow{e_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wikipedia: Polarkoordinaten
Unterlagensammlung der TU München

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

17.2.7 Kugelkoordinaten

Kugelkoordinaten



In Kugelkoordinaten oder räumlichen Polarkoordinaten wird ein Punkt durch seinen Abstand vom Ursprung r und durch zwei Winkel φ und θ angegeben.

Man nennt

Die Ebene z=0 die Äquatorebene

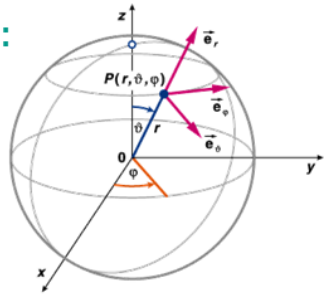
r den Radius (Abstand OP)

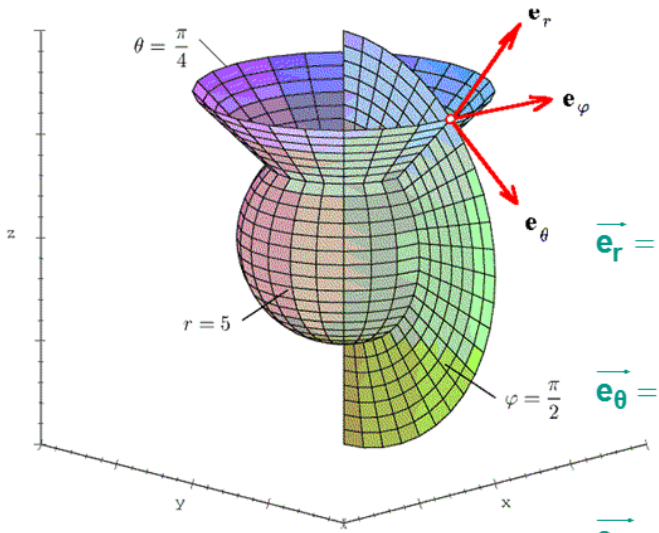
θ den Polar- oder Poldistanzwinkel (Winkel zwischen OP und z)

φ den Azimutwinkel (Winkel zwischen der Projektion von OP auf die Ebene z=0 und x)

Wikipedia: Polarkoordinaten

Die Basisvektoren des Kugelkoordinatensystems sind:





$$\overrightarrow{e_r} = \begin{pmatrix} \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{e_\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot \cos\varphi \\ \cos\theta \cdot \sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{e_\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wikipedia: Polarkoordinaten
Unterlagensammlung der TU München

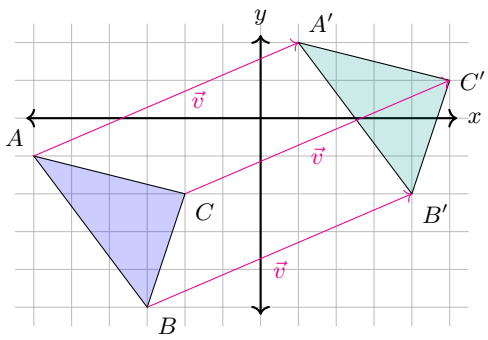
Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

17.3 Einführung in die Vektorrechnung

Ein **Vektor**[17.9] ist in der Mathematik ein Objekt, das zu seinesgleichen addiert und mit Zahlen (allgemein mit Skalaren) multipliziert werden kann.[17.10]

Begründet wurde die Vektorrechnung von Hermann Günter Graßmann, der 1844 seine Lineare Ausdehnungslehre veröffentlichte, ein über dreihundert Seiten starkes Buch.[17.11] Als Vorläufer gelten u. a. René Descartes und August Ferdinand Möbius, ein Schüler von Carl Friedrich Gauß. Nahezu zeitgleich entwickelte William Rowan Hamilton seine ähnliche Theorie[17.12] der Quaternionen, die er 1853 in dem Buch Lectures on Quaternions[17.13] und 1866 in dem Werk Elements of Quaternions[17.14][17.15] publizierte. In Deutschland wurde die Vektorrechnung insbesondere durch Vorlesungen und Bücher von Alfred Bucherer, August Föppl, Carl Runge, Fischer, v. Ignatowsky und Richard Gans verbreitet.

In der Geometrie versteht man unter einem Vektor ein Objekt, das eine Parallelverschiebung in der Ebene oder im Raum beschreibt. Eine Verschiebung kann durch einen Pfeil, der einen Urbildpunkt mit seinem Bildpunkt verbindet, dargestellt werden. Pfeile, die parallel, gleich lang und gleich gerichtet sind, beschreiben dieselbe Verschiebung und stellen somit denselben Vektor dar.



Zum Beispiel beschreiben im Bild rechts der Pfeil von A nach A', der Pfeil von B nach B' und der Pfeil von C nach C' dieselbe Verschiebung um 7 Einheiten nach rechts und 3 Einheiten nach oben.

Sie repräsentieren alle denselben Vektor $\vec{v} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$

[17.9] lat. vector „Träger, Fahrer“

[17.10] https://de.wikipedia.org/wiki/Vektor; abgerufen am 2017-09-11

[17.11] Hermann Günter Graßmann: Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik: Dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert. O. Wigand, 1844.

[17.12] Josiah Willard Gibbs: Quaternions and the Ausdehnungslehre. In: Nature. Band 44, Nr. 1126, 1891, S. 79–82

[17.13] W. R. Hamilton: Lectures on Quaternions. Hodges and Smith, Dublin 1853.

[17.14] W. R. S. Hamilton: Elements of Quaternions: Vol.: 1. Longmans, Green & Company, 1866

[17.15] W. R. S. Hamilton, C. J. Joly: Elements of quaternions. Vol.: 2. Longmans, Green & Company, 1901.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

17.3.1 Parallelverschiebung

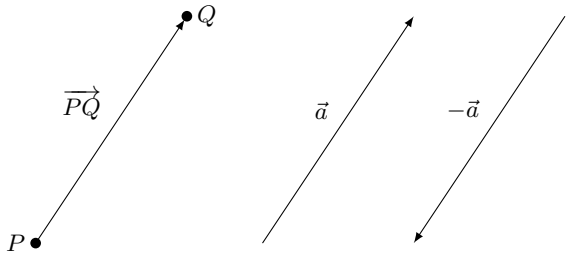
Zu je zwei Punkten P und Q des Raumes (der Ebene) gibt es genau eine Parallelverschiebung (des Raumes, der Ebene), die P nach Q bringt (abbildet). Diese Verschiebung wird mit $\vec{PQ}$ bezeichnet und heißt **Vektor** von P nach Q.

(„Vektor“ bedeutet so viel wie „Träger“: $\overrightarrow{PQ}$ „trägt“ P nach Q).

Abstand des Punktes P von Q: Länge des Vektors

Zwei gleich lange und gleich gerichtete Pfeile im Raum repräsentieren denselben Vektor. Freie Vektoren können frei im Raum parallel verschoben werden und sind nicht an einen festen Anfangspunkt gebunden.

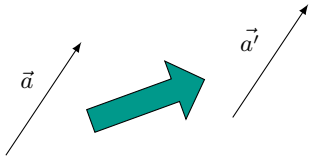
Schreibweise: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$



entgegengesetzt gerichteter Vektor gleicher Länge

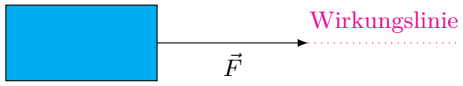
Freie Vektoren

können beliebig in der Ebene und im Raum verschoben werden



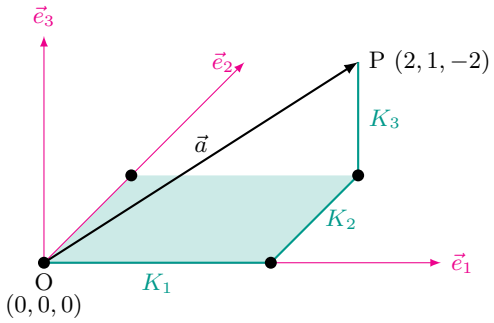
Liniengebundene Vektoren

Die Kraft, die an einem Körper angreift, stellt einen liniengebundenen Vektor dar. Dieser darf entlang seiner Wirkungslinie beliebig verschoben werden, nicht aber parallel dazu.



Ortsgebundene Vektoren

Ein ortsgebundener Vektor, auch Ortsvektor genannt, hat einen festen Angriffspunkt und darf nicht verschoben werden.

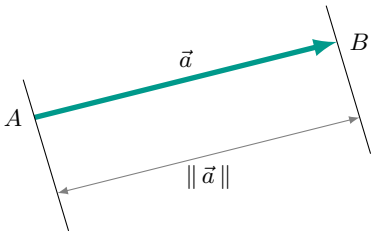


© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

17.3.2 Rechenarten für Vektoren

Ein Pfeil ist eine gerichtete Strecke, das heißt, eine Strecke, bei der eine Reihenfolge der Endpunkte festgelegt ist. Zwei Pfeile heißen äquivalent, wenn sie parallel, gleich lang und gleichgerichtet sind. Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Pfeile der Ebene bzw. des Raums. Die Äquivalenzklassen heißen Vektoren.



Man kann einen Vektor auch als eine Verschiebe-Abbildung auffassen:

Der Vektor $\vec{a}$ im Beispiel bildet den Punkt A durch eine Verschiebung in der Ebene auf den Punkt B ab.

Die Länge des Vektors $\vec{a}$ nennt man seinen **Betrag**. Man schreibt: $\| \vec{a} \|$ [17.16].

Definition 17.4: Euklidische Norm[17.17]

Die euklidische Norm, Standardnorm oder 2-Norm ist eine in der Mathematik häufig verwendete Vektornorm. Im zwei- und dreidimensionalen euklidischen Raum entspricht die euklidische Norm der anschaulichen Länge oder dem Betrag eines Vektors und kann mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden.

Allgemeiner wird die euklidische Norm auch für reelle und komplexe Vektorräume beliebiger endlicher Dimension definiert und ist dann die vom Standardskalarprodukt abgeleitete Norm.

Sie ist in kartesischen Koordinaten definiert durch:

$$\| \vec{x} \| = \| (x_1, x_2, ..., x_n)^{\mathrm{T}} \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \tag{17.6}$$

[17.16] In der Schulmathematik verwendet man in der Regel lediglich einzelne Betragsstriche und definiert die Länge eines Vektors durch den Ausdruck $|\vec{a}|$ – dies kann jedoch zu Mißverständnissen führen (ein „Betrag“ ist im $\mathbb{R}^n, n > 1$ nicht definiert). Die Verwendung der doppelten Betragsstriche $\| \vec{a} \|$ sorgt für Klarheit, weswegen diese Schreibweise üblicherweise in der Hochschulmathematik anzutreffen ist.

[17.17] In der Physik wird der Betrag eines Vektors manchmal dadurch gekennzeichnet, dass man die Betragsstriche und den Vektorpfeil weglässt: $v := \| \vec{v} \|$. Werden Vektoren im Text fettgeschrieben, wird manchmal auch nur der Fettdruck weggelassen: $v := \| \boldsymbol{v} \|$. Die natürliche Länge eines Vektors wird auch euklidische Norm oder 2-Norm des Vektors genannt und, um sie von anderen Vektornormen zu unterscheiden, mit $|\vec{v}|_2$ oder $\| \vec{v} \|_2$ bezeichnet.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

17.3.2.1 Ortsvektor

Als **Ortsvektor** (auch Radiusvektor oder Positionsvektor) eines Punktes bezeichnet man in der Mathematik und in der Physik einen Vektor, der von einem festen Bezugspunkt zu diesem Punkt (Ort) zeigt.

In der elementaren und in der synthetischen Geometrie können diese Vektoren als Klassen von verschiebungsgleichen Pfeilen oder gleichwertig als Parallelverschiebungen definiert werden.

Ortsvektoren ermöglichen es, für die Beschreibung von Punkten, von Punktmengen und von Abbildungen die Vektorrechnung zu benutzen. Legt man ein kartesisches Koordinatensystem zugrunde, dann wählt man in der Regel den Koordinatenursprung als Bezugspunkt für die Ortsvektoren der Punkte. In diesem Fall stimmen die Koordinaten eines Punktes bezüglich dieses Koordinatensystems mit den Koordinaten seines Ortsvektors überein.

In der analytischen Geometrie werden Ortsvektoren verwendet, um Abbildungen eines affinen oder euklidischen Raums zu beschreiben und um Punktmengen (wie zum Beispiel Geraden und Ebenen) durch Gleichungen und Parameterdarstellungen zu beschreiben.

In der Physik werden Ortsvektoren verwendet, um den Ort eines Körpers in einem euklidischen Raum zu beschreiben.[17.18]

Abbildung 17.8: Zwei Punkte und ihre Ortsvektoren

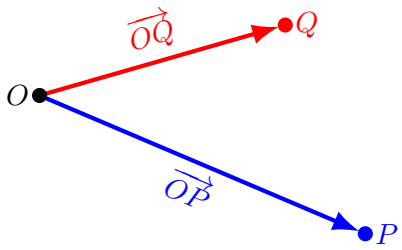
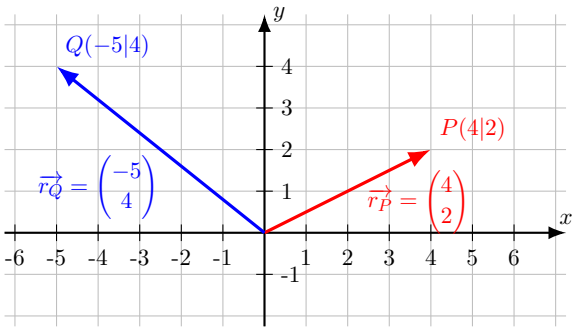


Abbildung 17.9: Im kartesischen Koordinatensystem



Der **Ortsvektor** $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ vom Pol O zum Punkt P $(4|2)$ lässt sich dann so schreiben:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und analog } \vec{q} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{17.7}$$

[17.18] wikipedia https://de.wikipedia.org/wiki/Ortsvektor, abgerufen 2020-07-25.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

17.3.2.2 Addition und Subtraktion

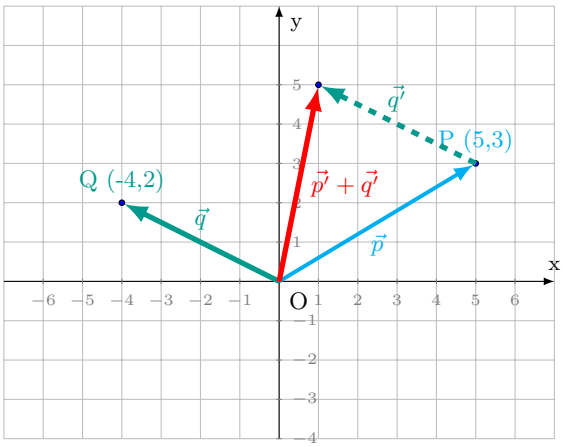
Vektoren addiert man durch „Aneinanderhängen“:

$$\vec{p}+\vec{q}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} \tag{17.8}$$

Für den Betrag (= Länge) gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$$\|\vec{p}+\vec{q}\| = \left\|\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}\approx 5,1 \tag{17.9}$$

Abbildung 17.10: Addition im kartesischen Koordinatensystem



Addition und **Subtraktion** von Vektoren werden also komponentenweise ausgeführt:

$$\vec{p}\pm\vec{q}=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}\pm\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_1\pm q_1\\p_2\pm q_2\\p_3\pm q_3\end{pmatrix} \qquad \text{und Dreiecksungl. } \|\vec{p}+\vec{q}\| \le \|\vec{p}\|+\|\vec{q}\| \tag{17.10}$$

Es gelten das Assoziativ- und das Kommutativgesetz:

Abbildung 17.11: Addition

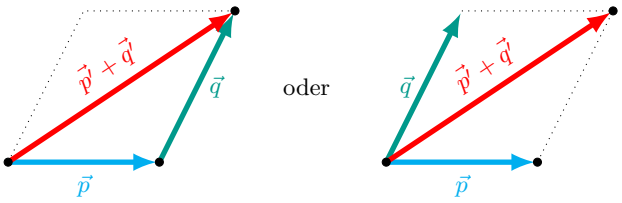
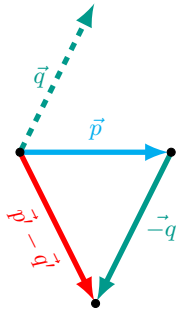


Abbildung 17.12: Subtraktion



© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

17.3.2.3 Betrag, Euklidische Norm

Definition 17.5: Betrag

Die Länge eines Vektors $\vec{p}$ nennt man seinen ***Betrag***, genauer seine ***Euklidische Norm***:

$$\|\vec{p}\| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} \quad \text{, falls } \vec{p} = p_1 \cdot \vec{e}_1 + p_2 \cdot \vec{e}_2 + p_3 \cdot \vec{e}_3 \text{ [17.19]} \tag{17.11}$$

Satz 17.1: Rechenregeln

$$\|\vec{0}\| = 0 \tag{17.12}$$

$$\|\alpha \cdot \vec{p}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{p}\| \quad \text{insbesondere:} \quad \|\vec{p}\| = \|-\vec{p}\| \tag{17.13}$$

$$\|\vec{p} + \vec{q}\| \leq \|\vec{p}\| + \|\vec{q}\| \quad \text{(Dreiecksungleichung)} \tag{17.14}$$

Definition 17.6: Einheitsvektor

Ein Vektor vom Betrag 1 heißt ***Einheitsvektor***.
Zu $\vec{p} \neq \vec{0}$ gehört der Einheitsvektor $\vec{p}_0$ in Richtung $\vec{p}$:

$$\vec{p}_0 = \frac{1}{\|\vec{p}\|} \cdot \vec{p} \tag{17.15}$$

Beispiel 17.1: Beispiel

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \tag{17.16}$$

$$\vec{p} + \vec{q} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{17.17}$$

$$5 \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix} \tag{17.18}$$

$$\|\vec{p}\| = \sqrt{13} \tag{17.19}$$

[17.19] $\vec{e}_i$ sind die Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

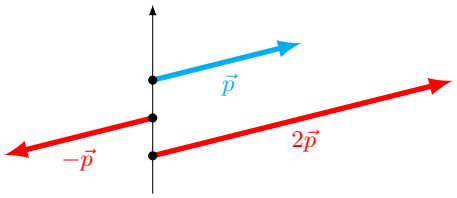
17.3.2.4 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

Multiplikation mit einem **Skalar**:

$$r \cdot \vec{p} = r \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot p_1 \\ r \cdot p_2 \\ r \cdot p_3 \end{pmatrix} \tag{17.20}$$

$$\|r \cdot \vec{p}\| = |r| \cdot \|\vec{p}\| \tag{17.21}$$

Abbildung 17.13: Multiplikation



Es gelten die **Distributivgesetze**:[17.20]

$$r \cdot (\vec{p} + \vec{q}) = r \cdot \vec{p} + r \cdot \vec{p} \tag{17.22a}$$

$$(r + s) \cdot \vec{p} = r \cdot \vec{p} + s \cdot \vec{p} \tag{17.22b}$$

Zu einer reellen Zahl $\alpha \geq 0$ und einem Vektor $\vec{p}$ bezeichnet $\alpha \cdot \vec{p}$ denjenigen Vektor, der dieselbe Richtung wie $\vec{p}$ hat, aber die α–fache Länge. Im Falle $\alpha < 0$ setzt man $\alpha \cdot \vec{p} := -|\alpha| \cdot \vec{p}$

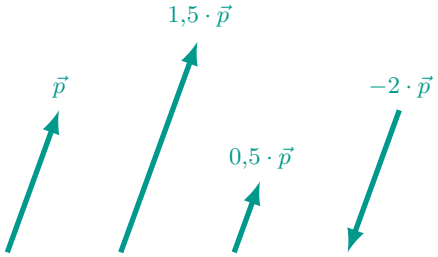
Satz 17.2: Rechenregeln

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{p}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{p} \tag{17.23}$$

$$\alpha \cdot (\vec{p} + \vec{q}) = \alpha \cdot \vec{p} + \alpha \cdot \vec{q} \tag{17.24}$$

$$(\alpha + \beta) \cdot \vec{p} = \alpha \cdot \vec{p} + \beta \cdot \vec{p} \tag{17.25}$$



[17.20] Quelle: [SC17]

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

17.3.2.5 Skalarprodukt

Definition 17.7: Skalarprodukt

Das ***Skalarprodukt*** (auch ***inneres Produkt***) ist eine mathematische Verknüpfung, die zwei Vektoren eine Zahl (einen ***Skalar***) zuordnet.

Satz 17.3: Skalarprodukt

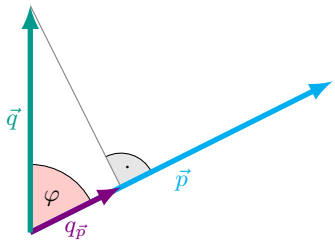
$$\vec{p},\vec{q} \qquad (\text{mit } \alpha := \angle(\vec{p},\vec{q})):$$
$$\vec{p}\cdot\vec{q} := \begin{cases} \|\vec{p}\| \cdot \|\vec{q}\| \cdot \cos\alpha & \text{falls } \vec{p}\neq 0 \text{ und } \vec{q}\neq 0 \\ 0 & \text{falls } \vec{p}=0 \text{ oder } \vec{q}=0 \text{ oder } \vec{p}\perp\vec{q} \end{cases} \tag{17.26}$$

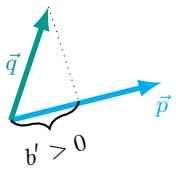
Für das Skalarprodukt existieren mehrere Schreibweisen: $\vec{p}\cdot\vec{q}$, $\langle\vec{p},\vec{q}\rangle$, $\vec{p}\bullet\vec{q}$

$$\vec{p}\cdot\vec{q} = \|\vec{p}\| \cdot \|\vec{q}\| \cdot \cos\sphericalangle\vec{p},\vec{q} \tag{17.27}$$

$$\vec{p}\cdot\vec{q} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = p_1\cdot q_1 + p_2\cdot q_2 + p_3\cdot q_3 \tag{17.28}$$

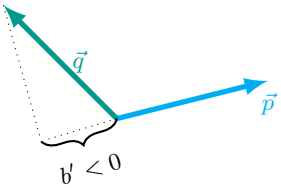
$$\vec{p}\cdot\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = \|\vec{p}\|^2 \tag{17.29}$$





Es gelten das Kommutativ- und das Distributivgesetz:

$$\vec{p}\cdot\vec{q} = \vec{q}\cdot\vec{p} \tag{17.30}$$



und

$$\vec{p}\cdot(\vec{q}+\vec{z}) = \vec{p}\cdot\vec{q} + \vec{p}\cdot\vec{z} \tag{17.31}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Winkel zwischen Vektoren:

Satz 17.4:

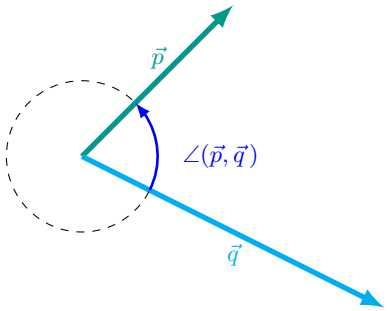
Es gilt:

$\angle(\vec{p},\vec{q}) = -\angle(\vec{q},\vec{p}), \quad \angle(\vec{p},t\cdot\vec{p}) = 0 \text{ für } t>0$

$\angle(\vec{p},t\cdot\vec{p}) = \pi \text{ für } t<0$

$\angle(-\vec{p},\vec{q}) = \pi - \angle(\vec{p},\vec{q})$

$\angle(\vec{p},\vec{q}) = \frac{\pi}{2} \text{ falls } \vec{p}\perp\vec{q}$



Satz 17.5:

$\vec{p}\cdot\vec{q} = \vec{q}\cdot\vec{p}$	(Kommutativgesetz)
$(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{z} = \vec{p}\cdot\vec{z}+\vec{q}\cdot\vec{z}$	(Distributivgesetz)
$(\lambda\cdot\vec{p})\cdot\vec{q} = \vec{p}\cdot(\lambda\cdot\vec{q}) = \lambda\cdot\vec{p}\cdot\vec{q}$	(für $\lambda\in\mathbb{R}$)
$\vec{p}\cdot\vec{q} = 0 \Leftrightarrow \vec{p}\perp\vec{q}$	(Orthogonalitätstest)
$\|\vec{p}\| = \sqrt{\vec{p}\cdot\vec{p}}$	

Beispiel 17.2: Beispiele

Die Vektoren $\vec{e}_i$ einer kartesischen Basis sind stets Einheitsvektoren und paarweise orthogonal

$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 = \vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 = \vec{e}_3\cdot\vec{e}_3 = 1$ und $\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 = \vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 = \vec{e}_3\cdot\vec{e}_1 = 0$

Wegen $\|\vec{e}_i\| = 1$ gilt für einen bestimmten Vektor $\vec{p} = \sum_{i=1}^{3} p_i\cdot\vec{e}_i$:

$$\vec{p}\cdot\vec{e}_i = \|\vec{p}\|\cdot\cos\angle(\vec{p},\vec{e}_i) = p_i \qquad (i=1,2,3)$$

$$\Rightarrow \vec{p} = \sum_{i=1}^{3}(\vec{p}\cdot\vec{e}_i)\cdot\vec{e}_i \tag{17.32}$$

und

$$\sum_{i=1}^{3}\cos^2\angle(\vec{p},\vec{e}_i) = 1 \tag{17.33}$$

Für Vektoren $\vec{p},\vec{q}$ bezüglich einer kartesischen Basis $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ folgt aus den Rechenregeln:

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Satz 17.6: Regeln

a) $\vec{p} \cdot \vec{q} = \sum_{i=1}^{3} p_i \cdot q_i, \qquad \| \vec{p} \| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$

b) $\cos \angle(\vec{p}, \vec{q}) = \dfrac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{\| \vec{p} \| \cdot \| \vec{q} \|}$, falls $\vec{p}, \vec{q} \neq 0$

c) Richtungscosinus $\cos \angle(\vec{p}, \vec{e}_i) = \dfrac{p_i}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}} \quad (i = 1, 2, 3)$

Beispiel 17.3: Beispiel

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{q} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \vec{p} \cdot \vec{q} = 0 \Rightarrow \vec{p} \perp \vec{q}, \quad \vec{p} \cdot \vec{z} = 2,$$

$$\| \vec{p} \| = \sqrt{20}, \quad \| \vec{z} \| = \sqrt{2} \;\Rightarrow\; \cos(\vec{p}, \vec{z}) = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

17.3.2.6 Orthogonale Zerlegung

In der Physik ist häufig für vom Ort unabhängige Kräfte eine Zerlegung eines Kraftvektors in eine bestimmte Richtung notwendig.

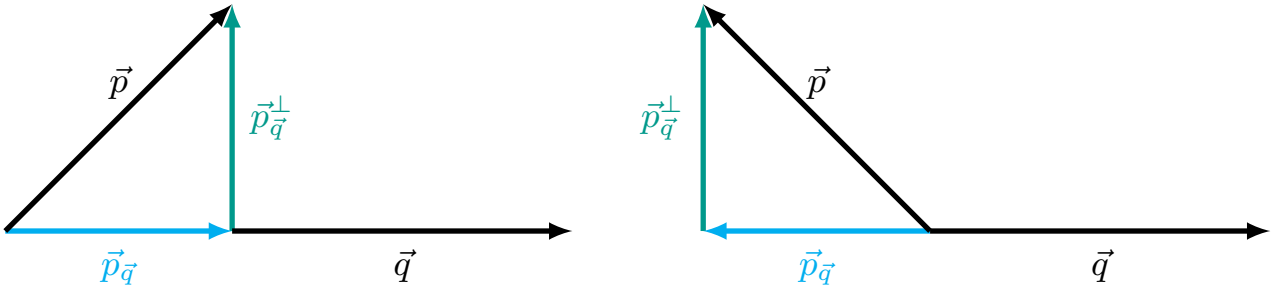
Satz 17.7: Orthogonale Zerlegung

Orthogonale Zerlegung von $\vec{p}$ längs $\vec{q}$, falls $\vec{q} \neq 0$:

$$\vec{p} = \vec{p}_{\vec{q}} + \vec{p}_{\vec{q}}^{\perp} \quad \text{mit} \tag{17.34}$$

$$\vec{p}_{\vec{q}} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{\|\vec{q}\|^2} \cdot \vec{q} \quad \text{in Richtung } \vec{q} \text{ und} \tag{17.35}$$

$$\vec{p}_{\vec{b}}^{\perp} = \vec{p} - \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{\|\vec{q}\|^2} \cdot \vec{q} \quad \text{orthogonal zu } \vec{q}. \tag{17.36}$$



Beispiel 17.4:

Orthogonale Zerlegung von $\vec{p}$ längs $\vec{q}$:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \vec{p} \cdot \vec{q} = -6, \quad \|\vec{q}\|^2 = 9 \tag{17.37}$$

$$\vec{p}_{\vec{q}} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{\|\vec{q}\|^2} \cdot \vec{q} = \frac{-6}{9} \cdot \vec{q} = -\frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{17.38}$$

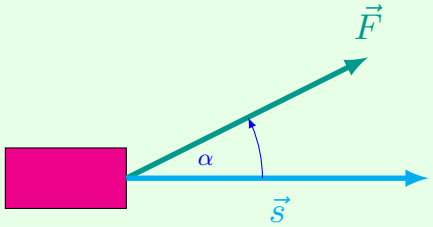
$$\vec{p}_{\vec{q}}^{\perp} = \vec{p} - \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{\|\vec{q}\|^2} \cdot \vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \tag{17.39}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beispiel 17.5: Anwendungsbeispiel des Skalarprodukts in der Physik

An einem Wagen greife eine konstante Kraft $\vec{F}$ an, die mit der Fahrtrichtung den Winkel α bildet.
Gesucht ist die Arbeit, die von $\vec{F}$ bei einer Fortbewegung des Wagens um eine Strecke $\vec{s}$ geleistet wird.



Es gilt allgemein:

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}(s) \cdot \mathrm{d}\vec{s} \tag{17.40}$$

Da $\vec{F}$ konstant ist und nicht vom Ort abhängt, und außerdem eine lineare gleichförmige Bewegung vorliegt, können wir das Integral durch ein simples Produkt ersetzen:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{s}\| \cdot \cos(\alpha) \tag{17.41}$$

Eine zum Weg senkrechte Kraft leistet keine Arbeit. Daher folgt:

$$W = \| \vec{F}_{\vec{s}} \| \cdot \| \vec{s} \| \tag{17.42}$$

Die Projektion von $\vec{F}$ auf $\vec{s}$ ist

$$\| \vec{F}_{\vec{s}} \| = \| \vec{F} \| \cdot \cos(\alpha) \tag{17.43}$$

$$\Rightarrow W = \| \vec{F} \| \cdot \| \vec{s} \| \cdot \cos(\alpha) = \vec{F} \cdot \vec{s} \tag{17.44}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

18 Ebene analytische Geometrie

18.1 Einführung

Die ***analytische Geometrie*** (auch ***Vektorgeometrie***) ist ein Teilgebiet der Geometrie, das algebraische Hilfsmittel (vor allem aus der linearen Algebra) zur Lösung geometrischer Probleme bereitstellt. Sie ermöglicht es in vielen Fällen, geometrische Aufgabenstellungen rein rechnerisch zu lösen, ohne die Anschauung zu Hilfe zu nehmen.[18.1]

Demgegenüber wird Geometrie, die ihre Sätze ohne Bezug zu einem Zahlensystem auf einer axiomatischen Grundlage begründet, als synthetische Geometrie bezeichnet.

Die Verfahren der analytischen Geometrie werden in allen Naturwissenschaften angewendet, vor allem aber in der Physik, wie zum Beispiel bei der Beschreibung von Planetenbahnen. Ursprünglich befasste sich die analytische Geometrie nur mit Fragestellungen der ebenen und der räumlichen (euklidischen) Geometrie. Im allgemeinen Sinn jedoch beschreibt die analytische Geometrie affine Räume beliebiger Dimension über beliebigen Körpern.

Die analytische Geometrie wurde von dem französischen Mathematiker und Philosophen René Descartes begründet. Wesentliche Erweiterungen sind Leonhard Euler zu verdanken, der sich insbesondere mit den Kurven bzw. Flächen zweiter Ordnung befasste. Die Entwicklung der Vektorrechnung (unter anderem durch Hermann Graßmann) ermöglichte die heute übliche Vektorschreibweise.

David Hilbert hat nachgewiesen, dass die dreidimensionale analytische Geometrie vollständig äquivalent ist zu der (synthetischen) euklidischen Geometrie in der von ihm präzisierten Form. In praktischer Hinsicht ist sie dieser weit überlegen. In der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts wurde deshalb die Ansicht vertreten, Geometrie in der Art, wie sie seit Euklid gelehrt wurde, sei nur noch von geschichtlichem Interesse.

[18.1] https://de.wikipedia.org/wiki/Analytische_Geometrie; Abruf 2020-07-27.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

18.2 Koordinatensysteme

Definition 18.1: Zu Koordinatensystemen

Ein ***Koordinatensystem*** dient zur eindeutigen Bezeichnung der Position von Punkten und Objekten in einem geometrischen Raum.[18.2]

Eine ***Koordinate*** ist eine von mehreren Zahlen, mit denen man die Lage eines Punktes in einer Ebene oder in einem Raum angibt.

Der ***Koordinatenursprung*** bezeichnet den Punkt in einem Koordinatensystem, an dem alle Koordinaten den Wert Null annehmen. Er wird auch ***Nullpunkt*** oder ***Pol*** genannt.

Durch den Ursprung verlaufen häufig, aber nicht zwingend die ***Koordinatenachsen***.

Die Anzahl der zur Beschreibung der Position notwendigen Werte ist die ***Dimension*** des Raumes. In diesem Sinne bezeichnet man eine Ebene als ***zweidimensionalen Raum***. Man fasst die Koordinaten eines n-dimensionalen Raumes dann auch als n-Tupel von reellen Werten auf.

Wir verwenden in dieser Einführung lediglich kartesische Koordinaten:

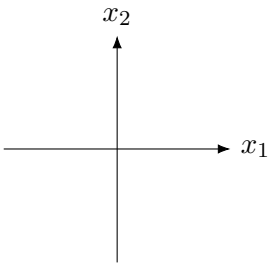
[18.2] https://de.wikipedia.org/wiki/Koordinatensystem; Abruf 2018-07-12.

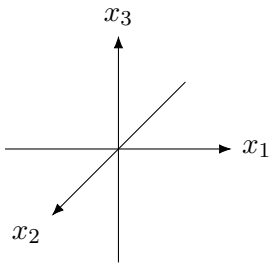
© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

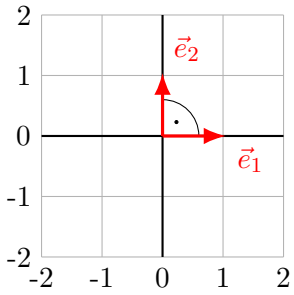
Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Definition 18.2: Kartesische Koordinaten

Ein ***kartesisches Koordinatensystem*** ist ein ***orthogonales Koordinatensystem***.







Es wird durch ***orthonormale Einheitsvektoren*** $\vec{e}_i$ aufgespannt.

Diese nennt man auch ***Basisvektoren***:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\mathbb{R}^2) \qquad \text{bzw.} \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\mathbb{R}^3) \tag{18.1a}$$

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\mathbb{R}^2) \qquad \text{bzw.} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\mathbb{R}^3) \tag{18.1b}$$

$$\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\mathbb{R}^3) \tag{18.1c}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

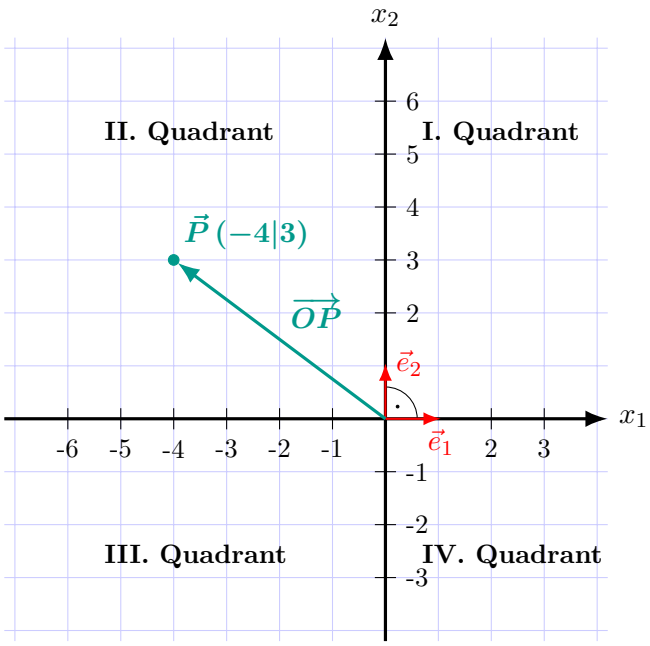
Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

18.3 Darstellung von Punkten

Damit ist ein Punkt P eindeutig durch seinen ***Ortsvektor*** $\overrightarrow{OP}$ bestimmt.

Im Beispiel rechts gilt:

$$\vec{P} := \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{18.2}$$



© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

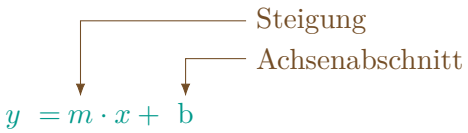
Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

18.4 Darstellung von Geraden

18.4.1 Darstellung als Funktion

18.4.1.1 Steigung-Achsenabschnitt-Form

Aus der Schulmathematik her ist die Darstellung einer Geraden in der ***Steigung-Achsenabschnitt-Form*** bekannt:

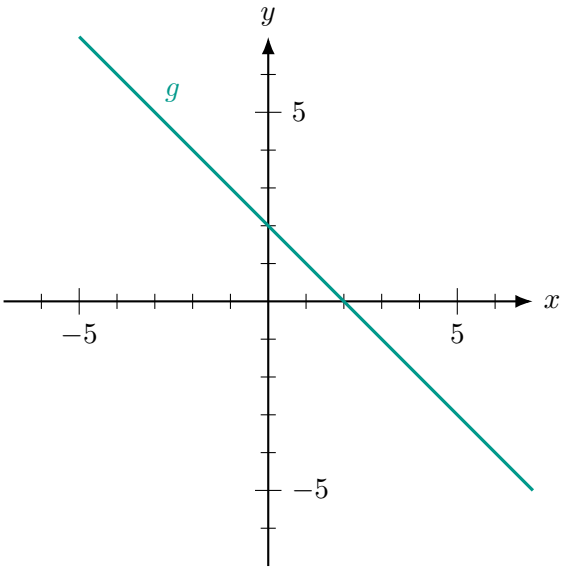


Im Beispiel rechts gilt für die Gerade g:

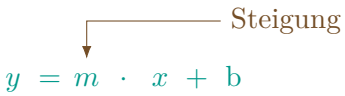
$$g: \; y = -x + 2 \tag{18.3}$$

Die Konstruktion von g kann z. B. über eine Wertetabelle erfolgen:

x	-5	-4	-3	$\cdots$	0	$\cdots$	4	5	6
y	7	6	5	$\cdots$	2	$\cdots$	-2	-3	-4

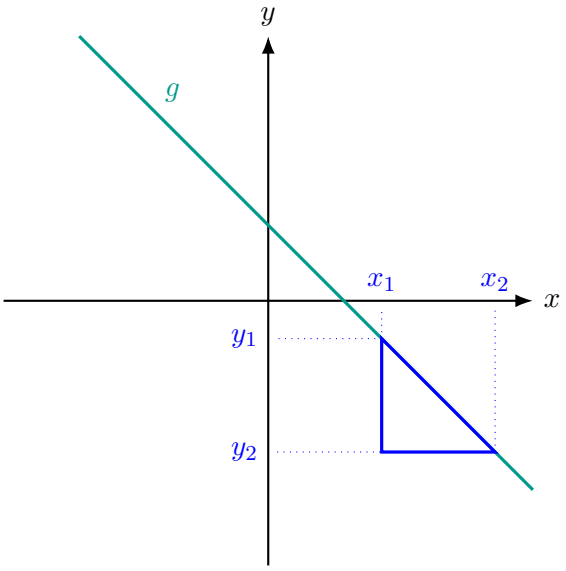


Steigung:



Das „m“ ist die ***Steigung*** der Geraden. Sie errechnet sich anhand des ***Steigungsdreiecks***:

$$m: \; \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{18.4}$$



Für unsere Beispielsgerade g entnehmen wir aus der Wertetabelle zwei beliebige Punkte, z. B.:

x	$\cdots$	3	$\cdots$	6	$\cdots$
y	$\cdots$	-1	$\cdots$	-4	$\cdots$

Damit errechnet sich die Steigung unserer Geraden g zu:

$$m_g = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4 - (-1)}{6 - 3} = \frac{-3}{3} = -1 \tag{18.5}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

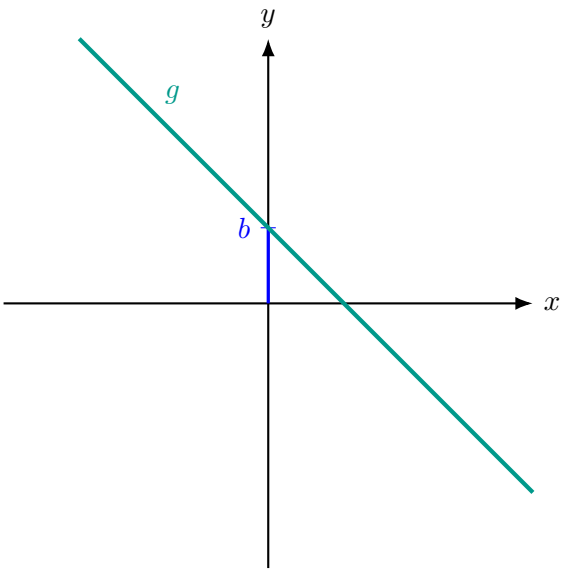
Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Achsenabschnitt:

$$y = m \cdot x + \underbrace{b}_{\text{Achsenabschnitt}}$$

Das „b“ ist der ***Achsenabschnitt*** der Geraden. Er kann z. B. aus der Wertetabelle an der Stelle $x = 0$ entnommen, oder berechnet werden:

$$y = m \cdot x + b \Leftrightarrow b = y - m \cdot x \qquad (18.6)$$



Für unsere Beispielsgerade g entnehmen wir aus der Wertetabelle einen beliebigen Punkt; hier sind z. B. zwei mögliche Punkte dargestellt:

x	⋯	0	⋯	3	⋯
y	⋯	2	⋯	-1	⋯

Aus dem ersten Punkt $(0|2)$ lässt sich b direkt ablesen: $b = 2$.

Aus dem zweiten Punkt $(3|-1)$ lässt sich b berechnen:

$$b = y - m \cdot x = \underbrace{-1}_{y} - \underbrace{(-1)}_{m} \cdot \underbrace{3}_{x} = -1 + 3 = 2 \qquad (18.7)$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

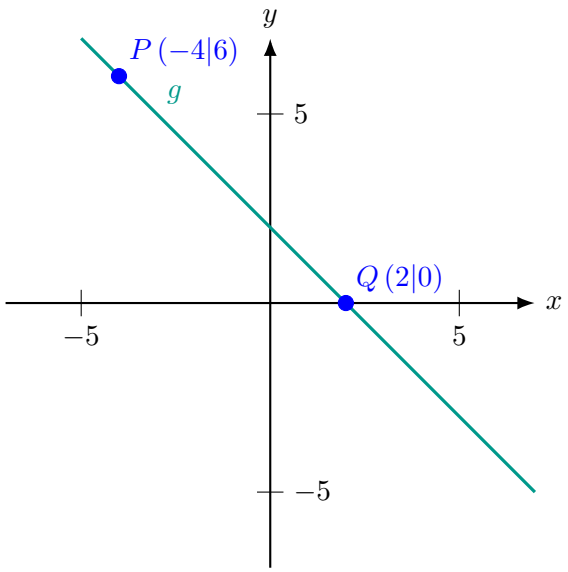
Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

18.4.1.2 Zwei-Punkte-Form

Bei der ***Zwei-Punkte-Form*** sind zwei Punkte der gesuchten Geraden gegeben. Nach einem Grundaxiom aus der Euklidischen Geometrie ist eine Gerade durch zwei auf ihr liegende Punkte vollständig und eindeutig definiert.

Beispielsweise seien von der gesuchten Geraden g diese zwei Punkte P und Q bekannt:

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	2	$\cdots$
y	$\cdots$	6	$\cdots$	0	$\cdots$



Die gesuchte Funktionsgleichung der Geraden g lässt sich nun analog zur oben behandelten Steigung-Achsenabschnitt-Form ermitteln (Steigung über Steigungsdreieck, Achsenabschnitt durch Einsetzen eines Punktes).

Alternativ kann die Lösung auch durch das Aufstellen eines linearen Gleichungssystems (LGS) erfolgen:

$$y = m\cdot\ x \qquad + b \quad \Rightarrow \tag{18.8a}$$

$$6 = m\cdot\ (-4) \quad + b \tag{18.8b}$$

$$0 = m\cdot\ 2 \qquad + b \tag{18.8c}$$

Das Auflösen dieses LGS ergibt die gesuchte Geradengleichung:

$$m = -1;\ \ b = 2 \Rightarrow \quad y = -x + 2 \tag{18.8d}$$

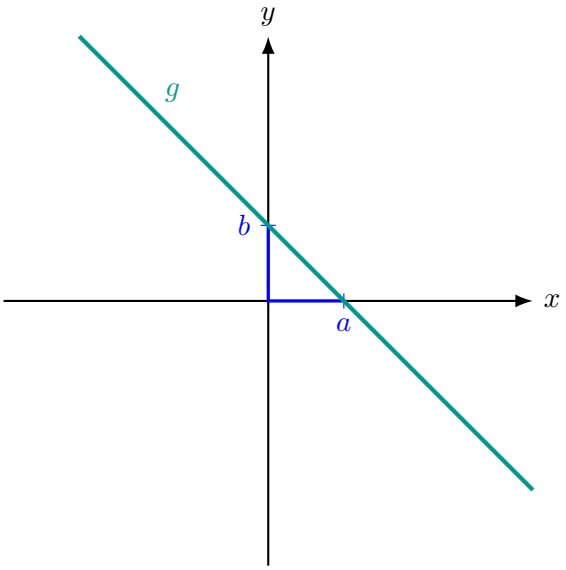
© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

18.4.1.3 Achsenabschnittsform

Eine Gerade lässt sich auch in der ***Achsenabschnittsform*** darstellen:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (a, b \neq 0) \tag{18.9}$$



Dabei ist a der Achsenabschnitt auf der x-Achse, und b der bereits bekannte Achsenabschnitt auf der y-Achse.

Der Vorteil dieser Darstellung: Durch die beiden Achsenabschnitte sind zwei Punkte bekannt; die Gerade lässt sich sofort zeichnen.

Die Berechnung des „neuen“ Abschnitts a gelingt einfach nach einer kurzen Äquivalenzumformung:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = b \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right) = -\frac{b}{a} \cdot x + b \tag{18.10}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

18.4.2 Analytische Darstellung

Um von den anschaulichen Begriffen, wie Gerade oder Raum wegzukommen und um auf die allgemeinere Abstraktionsebene n-dimensionaler Räume zu kommen, ersetzen wir zunächst die aus der Schulmathematik bekannten x, y-Koordinaten durch Koordinaten der Form $x_1 \cdot \vec{e}_1, x_2 \cdot \vec{e}_2$.

Dies erlaubt alsdann die Schreibweise mit Vektoren, und damit eine einfache Erweiterung unserer anschaulichen, zweidimensionalen Zeichnungsebene auf beliebige, n-dimensionale Vektorräume.

In der analytischen Geometrie ist eine Gerade eindeutig bestimmt durch

1. einen Punkt $\vec{P}$ auf ihr, dem sogenannten ***Aufpunkt***, und
2. allen beliebigen Vielfachen eines ***Richtungsvektors*** $\vec{R}$.

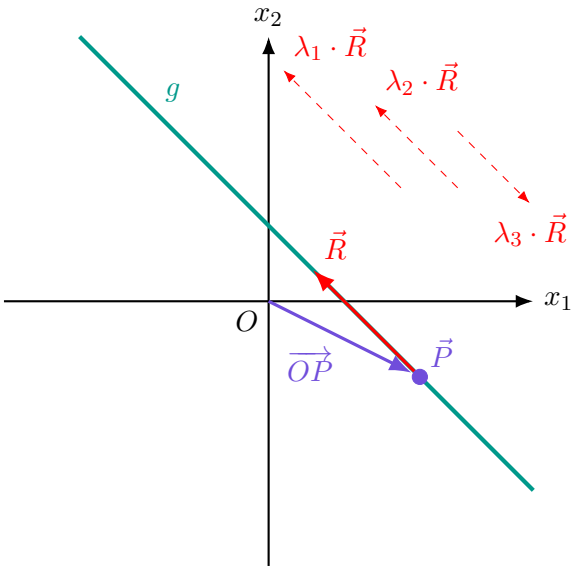
Damit schreibt man:

$$g := \vec{P} + \lambda \cdot \vec{R} \tag{18.11}$$

Dabei ist $\vec{P} = \overrightarrow{OP}$ der ***Ortsvektor*** des Aufpunktes P und $\vec{R}$ ein (beliebiger) Richtungsvektor der Geraden g.

Man nennt Gleichung [18.11] die ***Parameterdarstellung*** oder ***Parameterform*** der Geraden g. Dabei ist $\lambda \in \mathbb{R}$ der ***Parameter***.

In der Skizze sind oben rechts beispielsweise drei verschiedene Vielfache des Richtungsvektors $\vec{R}$ eingezeichnet.



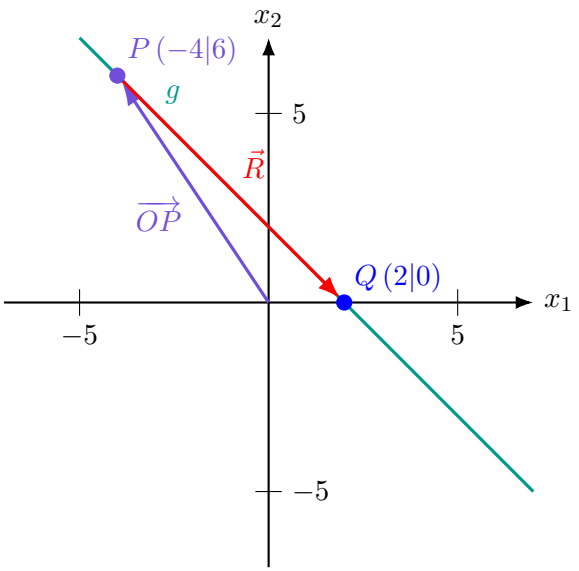
© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

18.4.2.1 Zwei-Punkte-Form

Beispielsweise seien von der gesuchten Geraden g diese zwei Punkte P und Q bekannt:

x	...	-4	...	2	...
y	...	6	...	0	...



Die gesuchte Parameterform der Geraden g lässt sich nun einfach durch Einsetzen der gegebenen Punkte ermitteln:

$$\vec{R} = \vec{Q} - \vec{P} \quad (\text{oder } \vec{P} - \vec{Q}) \tag{18.12a}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} \tag{18.12b}$$

Damit erhalten wir:

$$g = \vec{P} + \lambda \cdot \vec{R} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} \tag{18.13a}$$

Da es nur auf die Richtung, aber nicht auf die Länge des Richtungsvektors $\vec{R}$ ankommt, können wir „kürzen“:

$$g = \vec{P} + \lambda \cdot \vec{R} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{18.13b}$$

genau so gut hätten wir $\vec{Q}$ als Aufpunkt nehmen können:

$$g = \vec{Q} + \lambda \cdot \vec{R} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{18.13c}$$

18.4.2.2 Koordinatenform

Eine Gerade wird in der ***Koordinatenform*** dargestellt durch den Ausdruck:

$$k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2 = c \qquad \text{oder vektoriell:} \qquad \vec{k} \cdot \vec{x} = c \tag{18.14}$$

Diese allgemeine Koordinatenform hat den Vorteil, dass sie bezüglich aller Koordinaten symmetrisch ist: Keine Koordinate wird bevorzugt (bei den üblichen kartesischen Koordinaten ist x die unabhängige, und y die abhängige Variable).

Speziell für $c = 1$ ist die Koordinatenform identisch mit der Achsenabschnittsform, wie man durch einen Vergleich der Darstellungen sofort erkennen kann.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

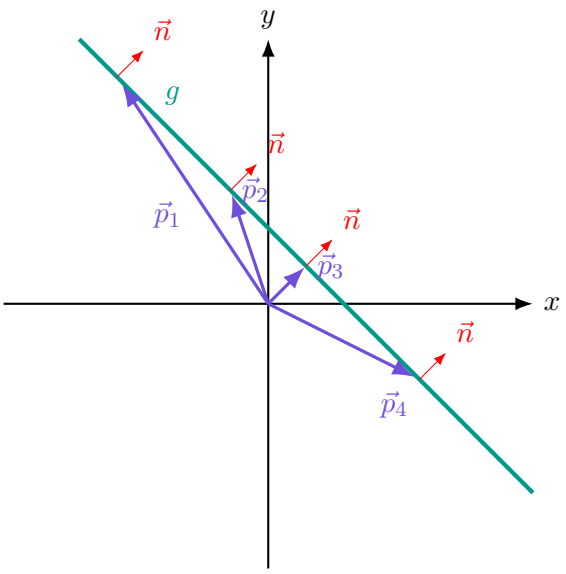
18.4.2.3 Normalenform

In der ***Normalenform*** wird eine Gerade in der Ebene durch einen Stützvektor $\vec{p}$ und einen Normalenvektor $\vec{n}$ beschrieben. Eine Gerade besteht dann aus denjenigen Punkten in der Ebene, deren Ortsvektoren $\vec{x}$ die Gleichung

$$\begin{aligned} & (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{p} \cdot \vec{n} \end{aligned} \tag{18.15}$$

erfüllen.

Bei der ***Hesseschen Normalform*** zeigt der Stützvektor $\vec{p}$ in Richtung der Normalen $\vec{n}$.



18.4.3 Schnittpunkt zweier Geraden

Gegeben seien die beiden Geraden

$$g := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{18.16a}$$

und

$$h := \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{18.16b}$$

Gesucht ist der Schnittpunkt der beiden Geraden g und h. Der Schnittpunkt muss beide Geradengleichungen erfüllen, also setzen wir gleich:

$$g = h \tag{18.17a}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{18.17b}$$

Wir erhalten ein LGS mit zwei Gleichungen für die beiden unbekannten Parameter λ und μ:

$$\Rightarrow 0 + 1 \cdot \lambda = -3 + 1 \cdot \mu \tag{18.17c}$$

$$\wedge -1 + 2 \cdot \lambda = 5 - 1 \cdot \mu \tag{18.17d}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Das Lösen dieses LGS ergibt den gesuchten Schnittpunkt $\vec{S}$:

$$\Leftrightarrow \mu = 4 \Rightarrow \vec{S} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{18.17e}$$

18.4.3.1 Sonderfälle:

Das LGS $g = h : \vec{P}_g + \lambda \cdot \vec{R}_g = \vec{P}_h + \mu \cdot \vec{R}_h$ hat keine Lösung. Dies ist immer dann der Fall, wenn die beiden Richtungsvektoren $\vec{R}_g$ und $\vec{R}_h$ ***kollinear*** sind, und die Geraden g und h keinen gemeinsamen Punkt haben (d.h., die beiden Geraden g und h sind dann zueinander ***parallel***).

Das LGS $g = h : \vec{P}_g + \lambda \cdot \vec{R}_g = \vec{P}_h + \mu \cdot \vec{R}_h$ hat unendlich viele Lösungen. Dies ist immer dann der Fall, wenn die beiden Richtungsvektoren $\vec{R}_g$ und $\vec{R}_h$ ***kollinear*** sind und die Geraden g und h mindestens einen gemeinsamen Punkt haben (d.h., die beiden Geraden g und h haben dann unendlich viele gemeinsame Punkte, sie sind ***identisch***: $g = h$.)

18.4.3.2 Erweiterung auf den reellen Anschauungsraum

Bei der Erweiterung auf $\mathbb{R}^3$ führt das Schnittpunktproblem auf ein LGS von drei Gleichungen mit nur 2 Unbekannten, also auf ein ***überbestimmtes*** Gleichungssystem. Damit dieses eine Lösung hat, muss eine der drei Gleichungen linear von den anderen zwei abhängen.

Zusätzlich zu den beiden oben beschriebenen Fällen kommt im $\mathbb{R}^3$ ein dritter Fall hinzu: Die beiden Richtungsvektoren sind nicht kollinear, das Gleichungssystem hat jedoch trotzdem keine Lösung. In diesem Fall bezeichnet man die beiden Geraden als ***windschief***.

Beispiel: Gegeben seien die beiden Geraden g und h zu:

$$g = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{18.18a}$$

$$h = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \tag{18.18b}$$

Es ergibt sich das LGS

$$5 + 2 \cdot \lambda = 3 + 0 \cdot \mu \tag{18.18c}$$

$$2 + 1 \cdot \lambda = 0 + 1 \cdot \mu \tag{18.18d}$$

$$0 + 2 \cdot \lambda = 1 - 3 \cdot \mu \tag{18.18e}$$

Dieses LGS hat die eindeutige Lösung $\lambda = -1$ und $\mu = 1$; Einsetzen von z. B. λ in g:

$$S = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{18.18f}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

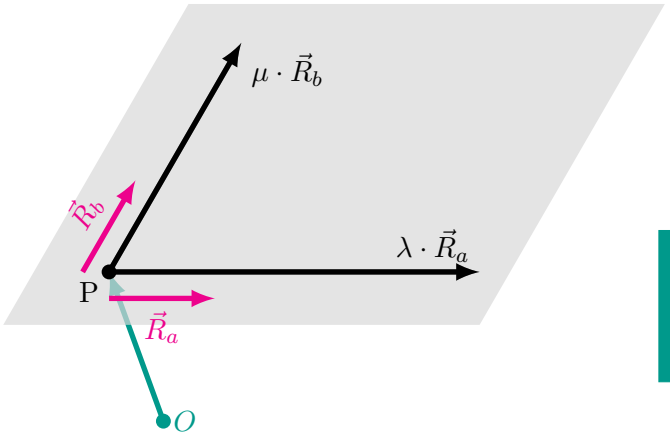
Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

18.5 Darstellung von Ebenen

Punkt-Richtungs-Form

Analog zur Geraden wird die Parameterform der Ebene definiert.

Eine Ebene wird durch sämtliche Linearkombinationen zweier nicht-kollinearer Richtungsvektoren $\vec{R}_a$ und $\vec{R}_b$ aufgespannt. Zusammen mit einem Aufpunkt $\vec{P}$ ist die Ebene vollständig definiert:

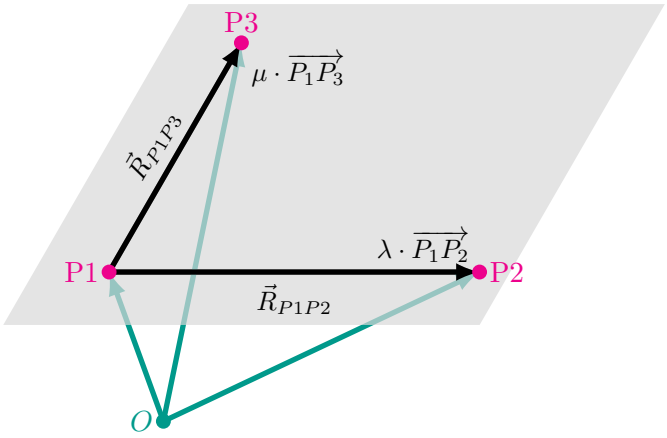


$$E = \vec{P} + \lambda \cdot \vec{R}_a + \mu \cdot \vec{R}_b \tag{18.19}$$

Drei-Punkte-Form

Hier erhält man die beiden Richtungsvektoren aus zwei beliebigen Verbindungsvektoren der drei Punkte der Ebene P_1, P_2 und P_3.

Als Aufpunkt kann ebenfalls ein beliebiger der drei Punkte gewählt werden. Beispiel:



$$E = \vec{P_1} + \lambda \cdot \overrightarrow{P_1P_2} + \mu \cdot \overrightarrow{P_1P_3} \tag{18.20}$$

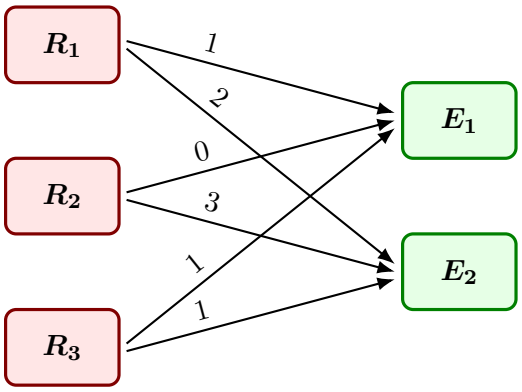
© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

19 Grundbegriffe der Matrizenrechnung

19.1 Motivierendes Einführungsbeispiel

Eine Firma stellt aus den drei Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 zwei Endprodukte E_1 und E_2 her. Die nachfolgende Abbildung (ein sog. ***Gozinthograph***) zeigt, in welchen Mengen die Rohstoffe jeweils in die Endprodukte eingehen.

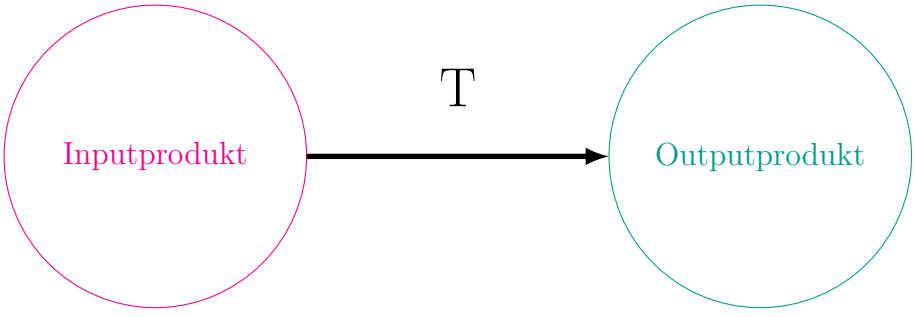


In **Tabellenform** dargestellt, ergibt dies:

		Verbrauch für 1 ME von	
		E_1	E_2
von ME der Produktionsfaktoren	R_1	1	2
	R_2	0	3
	R_3	1	1

Zur Produktion für jede Mengeneinheit von E_j $(j = 1, 2)$ werden a_{ij} Mengeneinheiten von $R_i (i = 1, 2, 3)$ verbraucht.

Praxisbeispiel:



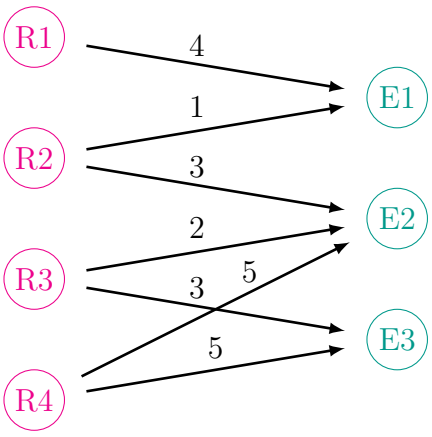
z. B. Rohstoff — z. B. Endprodukt

T: Produktkoeffizient / Transferzahl

Fragestellung: Wie viele Einheiten des Inputproduktes werden für das Outputprodukt benötigt?

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Teilbedarfsdiagramm und Tabelle mit Rohstoffen (R) und Endprodukten (E)



Gozintograph

	E1	E2	E3
R1	4	0	0
R2	1	3	0
R3	0	2	3
R4	0	5	5

Tabelle

Von der Tabelle zur Matrix

	E1	E2	E3
R1	4	0	0
R2	1	3	0
R3	0	2	3
R4	0	5	5

Tabelle

$\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Matrix

Definition 19.1: Matrix

Eine Matrix ist ein rechteckiges Schema, dessen Elemente meist Zahlen sind. Des Weiteren kommen z. B. Variablen oder Funktionen als Elemente der Matrix in Frage.[19.1]

Eine Matrix besteht aus m Zeilen und n Spalten und wird (m, n)-Matrix genannt. Die **Dimension** einer Matrix mit m Zeilen und n Spalten ist $m \times n$.

Die Position eines Elementes - z. B. a_{ij} - wird mit einem **Doppelindex** gekennzeichnet.

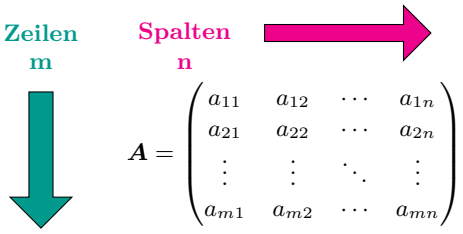
Dabei gibt der erste Index i die Zeile und der zweite Index j die Spalte an, in der das Element steht.

[19.1] https://www.mathebibel.de/matrizenrechnung-grundlagen; abgerufen am 2017-10-01.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Matrix m × n



$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- m Anzahl der Zeilen
  i -> Zeilenindex
- n Anzahl der Spalten
  j -> Spaltenindex
- a_{ij} Elemente oder Komponenten der Matrix $\boldsymbol{A}$

Definition 19.2: Quadratische Matrizen

Eine Matrix heißt ***quadratisch***, falls $m = n$ gilt.

Beispiel 19.1: Matrizen

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ist eine 2×3-Matrix mit Einträgen in $\mathbb{R}$ (oder in $\mathbb{C}$).

Der Eintrag an der Stelle $i = 2, j = 1$ ist $a_{21} = 4$.

b) Die Matrix $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 + \mathrm{j} & 1 - \mathrm{j} \\ 2 \cdot \mathrm{j} & 42 \end{pmatrix}$ ist eine quadratische 2×2-Matrix über $\mathbb{C}$.[**Sche20**]

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Definition 19.3: Spezielle Matrizen: Vektoren

- Ist bei einer $m \times n$-Matrix $m = 1$, also

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{1\times n} \tag{19.1}$$

  So nennt man $\boldsymbol{A}$ einen ***Zeilenvektor***.

- Ist bei einer $m \times n$-Matrix $n = 1$, also

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times 1} \tag{19.2}$$

  So nennt man $\boldsymbol{A}$ einen ***Spaltenvektor***.

  Anstatt $\mathbb{K}^{m\times 1}$ schreibt man kürzer $\mathbb{K}^m$.

- Man nennt bei einer $m \times n$-Matrix $\boldsymbol{A}$
  - $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ den j-ten ***Spaltenvektor*** von $\boldsymbol{A}$ und
  - $\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$ den i-ten ***Zeilenvektor*** von $\boldsymbol{A}$.[**Sche20**]

Beispiel 19.2: Zeilen- und Spaltenvektoren

Zeilenvektoren:

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\mathrm{j} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{1\times 3}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$

Spaltenvektoren:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} 1+\mathrm{j} \\ 3 \\ \sqrt{2}\cdot\mathrm{j} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$[**Sche20**]

Schreibweisen:

a) Für Matrizen verwenden wir Großbuchstaben: $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \dots$

b) Menge aller $m \times n$ Matrizen:

$$M(m \times n; \mathbb{K}) := \{(a_{ij})_{m\times n} \,|a_{ij} \in \mathbb{K}, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\} \tag{19.3}$$

mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

c) **Element** einer Matrix: Die (reelle oder komplexe) Zahl in der i-ten Zeile und j-ten Spalte der Matrix $\boldsymbol{A}$ wird mit a_{ij} bezeichnet, d.h.:

- Matrix „Großbuchstabe“;
- Element „entsprechender Kleinbuchstabe“.

Vertauscht man in einer Matrix $\boldsymbol{A}$ alle Zeilen und Spalten, erhält man die **transponierte** Matrix $\boldsymbol{A}^T$:[**Sche20**]

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m \times n$ Matrix — **transponierte** $n \times m$ Matrix

Dabei gilt:

$$(a_{ij})^T := (a_{ji}) \quad \forall (i,j) \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{A}^T)^T = \boldsymbol{A} \tag{19.4}$$

Konjugiert man in einer komplexwertigen Matrix $\boldsymbol{A}$ alle Elemente, erhält man die **konjugiert komplexe** Matrix $\overline{\boldsymbol{A}}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \overline{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \dots & \overline{a}_{1n} \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ \overline{a}_{m1} & \dots & \overline{a}_{mn} \end{pmatrix}$$

$m \times n$ Matrix — **konjugiert komplexe** $m \times n$ Matrix

Dabei gilt:

$$\overline{(a_{ij})} := (\overline{a}_{ij}) \quad \forall (i,j) \quad \Rightarrow \quad \overline{\left(\overline{\boldsymbol{A}}\right)} = \boldsymbol{A} \tag{19.5}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beispiel 19.3: Beispiele

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A}^T \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \tag{19.6}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{B}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\boldsymbol{B}^T\right)^T = \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \tag{19.7}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathrm{j} & 1+\mathrm{j} \\ 2-\mathrm{j} & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{\boldsymbol{C}} = \begin{pmatrix} -\mathrm{j} & 1-\mathrm{j} \\ 2+\mathrm{j} & 1 \end{pmatrix} \tag{19.8}$$

Vektoren sind eigentlich Matrizen:

Matrizen mit nur einer Spalte ($n \times 1$-Matrizen) heißen **Spaltenvektoren**, kurz **Vektoren**:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

Matrizen mit nur einer Zeile ($1 \times n$-Matrizen) heißen **Zeilenvektoren**:

$$\vec{p}^T = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\text{(Spalten-)Vektor } \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{Zeilenvektor } \vec{p}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

19.1.1 Spezielle Matrizen

Quadratische Matrix $A = (a_{ij})_{n\times n}$**[Sche20]**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M(n \times n; \mathbb{K})$$

Hauptdiagonale

obere (untere) Dreiecksmatrix $a_{ij} = 0 \quad \forall i > j \quad (i < j)$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ & a_{22} & & & \\ & & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{0} & & & a_{n-1n-1} & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & \mathbf{0} & \\ \vdots & & \ddots & & \\ & & & a_{n-1n-1} & \\ a_{n1} & a_{n2} & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrix $a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$**[Sche20]**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \alpha_{n-1} \\ & & & & \alpha_n \end{pmatrix} := \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad (\alpha_k \in \mathbb{K}, 1 \leq k \leq n)$$

Einheitsmatrix $\boldsymbol{E}$ $\quad a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$ und $a_{ij} = 1 \quad \forall i = j$

$$\boldsymbol{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(n \times n; \mathbb{K})$$

Nullmatrix 0 $\quad a_{ij} = 0 \quad \forall i, j$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Symmetrische Matrix $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j$

$$\text{Beispiel: } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^T$$

Schiefsymmetrische Matrix $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^T \Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i, j \quad \Rightarrow a_{ii} = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$

$$\text{Beispiel: } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{A}^T \textbf{[Sche20]}$$

Adjungierte Matrix $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^T \Leftrightarrow a_{ij}^* = \overline{a}_{ji} \quad \forall i, j$

$$\text{Beispiel: } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{j} & 1+\mathrm{j} \\ 2-\mathrm{j} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} -\mathrm{j} & 2+\mathrm{j} \\ 1-\mathrm{j} & 1 \end{pmatrix}$$

Hermitesche Matrix $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^* \Leftrightarrow a_{ij} = \overline{a}_{ji} \quad \forall i, j$

$$\text{Beispiel: } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{j} \\ -\mathrm{j} & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^*$$

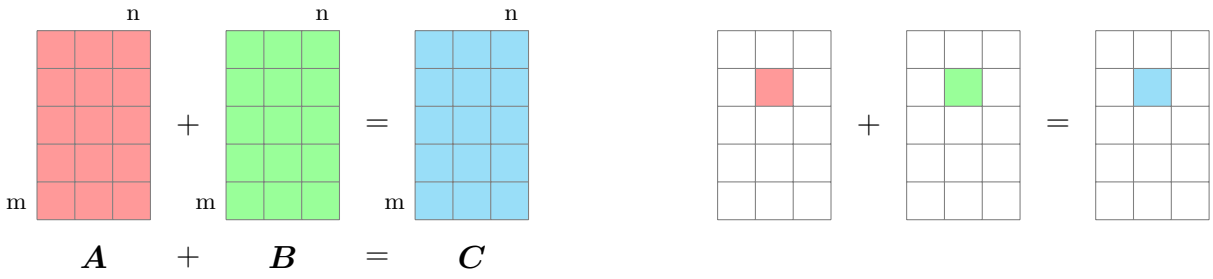
© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

19.1.2 Rechenoperationen mit Matrizen

19.1.2.1 Matrizenaddition und -subtraktion

Zwei Matrizen können addiert werden, wenn sie vom gleichen Typ sind.



Definition 19.4: Matrixaddition

Seien $\boldsymbol{A} = (a_{ij}), \boldsymbol{B} = (b_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ zwei $m \times n$-Matrizen.

Dann ist die ***Summe*** von $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ die Matrix:

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} := (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \tag{19.9}$$

Beispiel 19.4: Matrixaddition

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -4 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \tag{19.10}$$

Satz 19.1: Eigenschaften der Matrixaddition

Die Matrizenaddition ist kommutativ: $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$

Die Matrizenaddition ist assoziativ: $\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C}$

Für die Transponierte einer Matrixsumme gilt: $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T$

Mit der Matrizenmultiplikation ist die Matrizenaddition distributiv:

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C} \tag{19.11}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} \tag{19.12}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beispiel 19.5: Matrixaddition

$$\text{Gegeben seien } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} : \tag{19.13}$$

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1+4 & 2+2 & 3+1 \\ 2+2 & 3+4 & 4+2 \\ 3+3 & 4+2 & 5+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 6 & 8 \end{pmatrix} \tag{19.14}$$

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1-4 & 2-2 & 3-1 \\ 2-2 & 3-4 & 4-2 \\ 3-3 & 4-2 & 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

19.1.2.2 Multiplikation mit einem Skalar

Definition 19.5: Multiplikation mit einem Skalar

Sei $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ eine $m \times n$-Matrix und $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Skalar.

Dann ist die ***Multiplikation mit einem Skalar*** (oder kurz ***S-Multiplikation***) die Matrix:

$$\lambda \cdot \boldsymbol{A} := \lambda\boldsymbol{A} := (\lambda \cdot a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \cdots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \cdots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix} \tag{19.15}$$

Satz 19.2: Eigenschaften der S-Multiplikation

Für Matrizen $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{m\times n}$ und Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$; $\lambda, \mu \neq 0$ gilt:

$$\lambda \cdot \boldsymbol{A} := (\lambda \cdot a_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} \cdot \lambda)_{m\times n} = \boldsymbol{A} \cdot \lambda \tag{19.16}$$

$$(\lambda \cdot \mu) \cdot \boldsymbol{A} = \lambda \cdot (\mu \cdot \boldsymbol{A}) = \mu \cdot (\lambda \cdot \boldsymbol{A}) \quad \text{(Assoziativgesetz)} \tag{19.17}$$

$$(\lambda + \mu) \cdot \boldsymbol{A} = \lambda \cdot \boldsymbol{A} + \mu \cdot \boldsymbol{A} \quad \text{(Distributivgesetz)} \tag{19.18}$$

$$\lambda \cdot (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \lambda \cdot \boldsymbol{A} + \lambda \cdot \boldsymbol{B} \quad \text{(Distributivgesetz)} \tag{19.19}$$

Beispiel 19.6: S-Multiplikation

Sei $\lambda = 3$ und $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\lambda \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 & 3\cdot 3 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 3 & 3\cdot 4 \\ 3\cdot 3 & 3\cdot 4 & 3\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 9 & 12 \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix} \tag{19.20}$$

Bei der Skalarmultiplikation wird also wiederum jeder Eintrag der Matrix mit dem Skalar multipliziert.[19.2] Beispielsweise erhält man für eine reelle (2×2)-Matrix.

$$\lambda \cdot \boldsymbol{A} := (\lambda \cdot a_{ij})_{i=1,\ldots,m;\, j=1,\ldots,n} \tag{19.21}$$

$$\lambda \cdot \boldsymbol{A} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \cdots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \cdots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix} \tag{19.22}$$

[19.2] https://de.wikipedia.org/wiki/Skalarmultiplikation; abgerufen am 2017-10-01.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

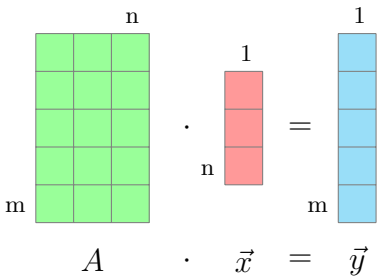
Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beispiel:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} \tag{19.23}$$

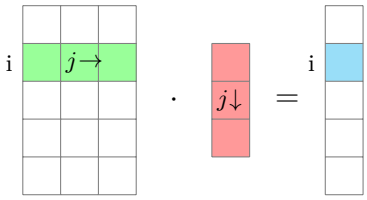
19.1.2.3 Multiplikation mit einem Vektor

Das Matrix-Vektor-Produkt ist das Produkt einer Matrix mit einem Vektor.[19.3] Die Spaltenzahl der Matrix muss mit der Zahl der Komponenten des Vektors übereinstimmen. Das Ergebnis ist dann wieder ein Vektor, dessen Elemente durch komponentenweise Multiplikation und Summation der Einträge der entsprechenden Zeile der Matrix mit den Elementen des Ausgangsvektors ermittelt werden.



$$\vec{y} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{19.24}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n \end{pmatrix} \tag{19.25}$$



Oder:
$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \tag{19.26}$$

Beispiel:
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} \tag{19.27}$$

[19.3] https://de.wikipedia.org/wiki/Matrix-Vektor-Produkt; angerufen am 2017-09-29

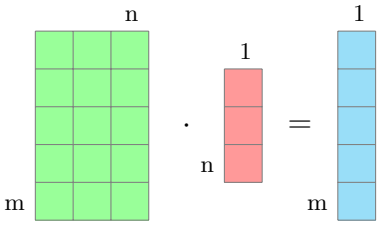
Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

19.1.2.4 Matrizenmultiplikation

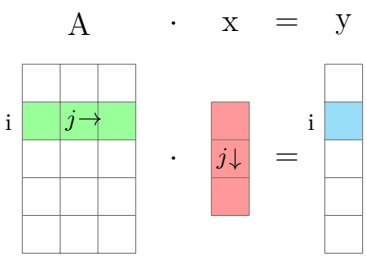
Um zwei Matrizen miteinander multiplizieren zu können, muss die Spaltenzahl der ersten Matrix mit der Zeilenzahl der zweiten Matrix übereinstimmen. Das Ergebnis einer Matrizenmultiplikation wird dann **Matrizenprodukt**, **Matrixprodukt** oder **Produktmatrix** genannt.[19.4]

Das Matrizenprodukt ist wieder eine Matrix, deren Einträge durch komponentenweise Multiplikation und Summation der Einträge der entsprechenden Zeile der ersten Matrix mit der entsprechenden Spalte der zweiten Matrix ermittelt werden.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj} \tag{19.28}$$



$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{lm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

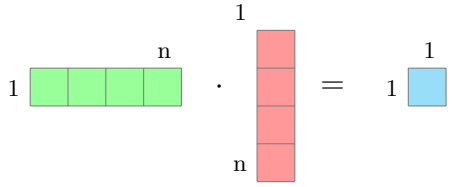


$$\begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \cdots + a_{1m} \cdot b_{m1} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + \cdots + a_{1m} \cdot b_{m2} & \cdots & a_{11} \cdot b_{1n} + a_{12} \cdot b_{2n} + \cdots + a_{1m} \cdot b_{mn} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + \ldots + a_{2m} \cdot b_{m1} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + \ldots + a_{2m} \cdot b_{m2} & \cdots & a_{21} \cdot b_{1n} + a_{22} \cdot b_{2n} + \cdots + a_{2m} \cdot b_{mn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} \cdot b_{11} + a_{l2} \cdot b_{21} + \cdots + a_{lm} \cdot b_{m1} & a_{l1} \cdot b_{12} + a_{l2} \cdot b_{22} + \cdots + a_{lm} \cdot b_{m2} & \cdots & a_{l1} \cdot b_{1n} + a_{l2} \cdot b_{2n} + \cdots + a_{lm} \cdot b_{mn} \end{pmatrix} \tag{19.29}$$

Spezialfälle bei der Matrizenmultiplikation:

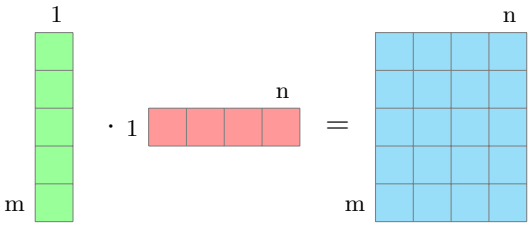
Zeilenvektor mal Spaltenvektor
$\rightarrow 1 \times 1 -$ Matrix $\rightarrow$ Skalarprodukt

$$x^T \cdot y \tag{19.30}$$



Spaltenvektor mal Zeilenvektor
$\rightarrow m \times n -$ Matrix

$$x \otimes y = x \cdot y^T \tag{19.31}$$

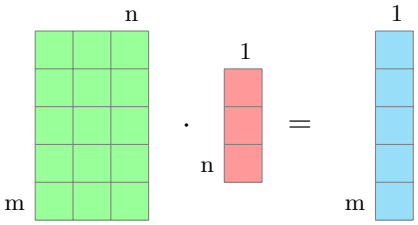


[19.4] https://de.wikipedia.org/wiki/Matrizenmultiplikation; abgerufen am 2017-10-01.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

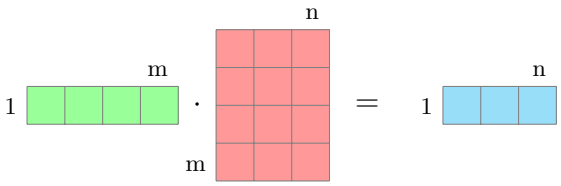
Matrix mal Vektor

$$\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \vec{y} \tag{19.32}$$



Vektor mal Matrix

$$\vec{x}^T \cdot \boldsymbol{A} = \vec{y}^T \tag{19.33}$$



Beispiel 19.7: Beispiel einer Matrizenmultiplikation

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1+2\cdot 0+1\cdot 4 & 3\cdot 2+2\cdot 1+1\cdot 0 \\ 1\cdot 1+0\cdot 0+2\cdot 4 & 1\cdot 2+0\cdot 1+2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} \tag{19.34}$$

Praktische Hilfe: Das **Falk'sche Schema**.[19.5][19.6]

Das Falk'sche Schema ist eine Tabelle, die eine optische Hilfe bei der Matrizenmultiplikation von Hand bietet. Der linke Faktor, die $m \times r$-Matrix, wird links von der $m \times n$-Ergebnismatrix und der rechte Faktor, die $r \times n$-Matrix, wird oberhalb der Ergebnismatrix platziert.

Wo sich die i-te Zeile des linken Multiplikanden und die j-te Spalte des rechten Multiplikanden kreuzen, wird das entsprechende Skalarprodukt eingetragen.

Beispiel 19.8: Beispiel einer Matrizenmultiplikation mittels des Falk-Schema [19.7]

Gegeben sind die Matrizen

$$\boldsymbol{A}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{B}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \tag{19.35}$$

Es soll das Produkt $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ ermittelt werden. $\boldsymbol{C}$ ist eine (3×2)-Matrix.

[19.5] https://de.wikipedia.org/wiki/Falksches_Schema; abgerufen am 2017-10-01.
[19.6] Sigurd Falk (* 06. Mai 1921 in Peine; † Mai oder Juni 2016 war ein deutscher Bauingenieur und Hochschullehrer, der an der TU Braunschweig lehrte.
[19.7] https://de.wikipedia.org/wiki/Falksches_Schema; abgerufen am 2017-10-09

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Zunächst wird das Falksche Schema aufgestellt, indem die Matrizen höhenversetzt nebeneinander geschrieben werden (in der ursprünglichen Ausrichtung, also ohne Kippen oder Drehen).

			Spalte j	
			1	2
			-1	1
Zeile i			1	-2
1	1	4		
2	2	5		
3	3	-6		

Die erste Zeile von $\boldsymbol{A}$ wird elementweise mit der ersten Spalte von $\boldsymbol{B}$ multipliziert: $1\cdot(-1)+4\cdot 1=3$ und ergibt das Element $c_{11}=3$.

			Spalte j	
			1	2
			-1	1
Zeile i			1	-2
1	1	4	3	
2	2	5		
3	3	-6		

Die erste Zeile von $\boldsymbol{A}$ wird elementweise mit der zweiten Spalte von $\boldsymbol{B}$ multipliziert: $1\cdot 1+4\cdot 1=3$ und ergibt das Element $c_{12}=-7$.

			Spalte j	
			1	2
			-1	1
Zeile i			1	-2
1	1	4	3	-7
2	2	5		
3	3	-6		

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Analog wird mit den weiteren Zeilen verfahren. Zum Schluss wird die dritte Zeile von $\boldsymbol{A}$ elementweise mit der zweiten Spalte von $\boldsymbol{B}$ multipliziert: $3 \cdot 1 + (-6) \cdot (-2) = 3$ und ergibt das Element $c_{32} = 15$.

			Spalte j	
			1	2
			-1	1
Zeile i			1	-2
1	1	4	3	−7
2	2	5	3	−8
3	3	-6	−9	15

Satz 19.3: Rechenregeln für die Matrizenmultiplikation

Für verkettbare Matrizen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{C}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:**[Sche20]**

Die Matrizenmultiplikation ist assoziativ:

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} \tag{19.36}$$

Die Matrizenmultiplikation ist verträglich mit der Multiplikation von Skalaren:

$$\lambda \cdot (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}) = (\lambda \cdot \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} \cdot (\lambda \cdot \boldsymbol{C}) \tag{19.37}$$

Die Matrizenmultiplikation ist bezüglich der Matrizenaddition distributiv:

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} \tag{19.38}$$
$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C} \tag{19.39}$$

Die Matrizenmultiplikation ist n i c h t kommutativ:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \quad \text{i. A.} \tag{19.40}$$

Für die Transponierten gilt:

$$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{A}^T \tag{19.41}$$

Definition 19.6: Einheitsmatrix

Als ***Einheitsmatrix*** bezeichnet man eine quadratische Matrix der Form:

$$\boldsymbol{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Es gilt: } \det(\boldsymbol{E}_n) = |\boldsymbol{E}_n| = 1 \text{ und rang } (\boldsymbol{E}_n) = n \quad \forall\, n \tag{19.42}$$

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Definition 19.7: Nullmatrix

Als **Nullmatrix** bezeichnet man eine Matrix der Form:

$$\mathbf{0}_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{19.43}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

20 Folgen und Reihen

20.1 Folgen

Eine Folge oder Sequenz ist eine Auflistung von endlich oder unendlich vielen, fortlaufend nummerierten Objekten.

Wir beschäftigen uns hier nur mit Objekten, die Zahlen sind.

Beispiel 20.1: Beispiel für eine Folge mit unendlich vielen Elementen:

Die Folge der natürlichen Zahlen. Das erste Element dieser Folge ist die 1. Das 2. Element ist die 2. Das dritte Element ist die 3. ... Das n. Element ist n.

Man schreibt:

$$a_1 = 1 \tag{20.1a}$$
$$a_2 = 2 \tag{20.1b}$$
$$\dots$$
$$a_{n-1} = n - 1 \tag{20.1c}$$
$$a_n = n \tag{20.1d}$$
$$a_{n+1} = n + 1 \tag{20.1e}$$
$$\dots$$

Beispiel 20.2: Beispiel für eine Folge mit endlich vielen Elementen:

Die Folge der ohne Rest durch 7 teilbaren Zahlen, die kleiner als 50 sind. Das 1. Element ist die 7, das 2. die 14, 3. $\to$ 21, 4. $\to$ 28, 5. $\to$ 35, 6. $\to$ 42, 7. $\to$ 49.

Man schreibt:

$$a_1 = 7 \tag{20.2a}$$
$$a_2 = 14 \tag{20.2b}$$
$$a_3 = 21 \tag{20.2c}$$
$$\dots$$
$$a_6 = 42 \tag{20.2d}$$
$$a_7 = 49 \tag{20.2e}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

20.1.1 Bildungsgesetz für Folgen

Zu den praktisch interessierenden Folgen kann man meistens ein ***Bildungsgesetz*** angeben. Dieses Bildungsgesetz besagt, wie man das n. Glied der Folge berechnen kann.

Bildungsgesetze können u. a. ***explizit*** oder ***rekursiv*** angegeben werden. Betrachten wir diese beiden Möglichkeiten anhand des Beispiels „Folge der ohne Rest durch 7 teilbaren natürlichen Zahlen“:

Es gibt mehrere Möglichkeiten eine Folge anzugeben:

- Aufzählung aller Folgenglieder (nur für endliche Folgen möglich)
- Funktion
- Reihe
- Rekursion
- Algorithmus

Eine endliche Folge kann man angeben, indem man sämtliche Folgenglieder nennt. Bei einer unendlichen Folge geht das nicht, stattdessen muss man das Bildungsgesetz der Folge in anderer Form mitteilen.

Explizit dargestelltes Bildungsgesetz:

$$a_i = 7 \cdot i$$

Rekursiv dargestelltes Bildungsgesetz:

$$a_1 = 7$$

$$a_{i+1} = a_i + 7$$

Hierbei bezeichnet a_i das i-te Glied der Folge ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$ bzw. $i = 0, 1, 2, \ldots, \infty$).

In der Mathematik beginnt i mit sehr wenigen Ausnahmen mit 0 oder 1, meistens mit 0.

Achtung! Wenn man programmiert, liegt hier eine häufige Quelle von Programmierfehlern: Von 1 bis 10 sind es 10 „Stück“, von 0 bis 10 dagegen 11 „Stück“. Es gibt Programmiersprachen, bei denen man explizit angeben kann, ob man die Nummerierung bei 0 oder bei 1 beginnen lassen will (Beispiel: Basic – Befehl „OPTION BASE 0“ bzw. „OPTION BASE 1“).

Man schreibt die Liste der Folgenglieder in runde Klammern:

Endliche Folgen:
$(a_i)_{(i=1,\ldots,n)} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ bzw. $(a_i)_{(i=0,\ldots,n)} = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Unendliche Folgen:
$(a_i)_{(i\in\mathbb{N})} = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ bzw. $(a_i)_{(i\in\mathbb{N}_0)} = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

20.1.2 Spezielle Folgen

Arithmetische Folgen: Bei ***arithmetischen Folgen*** ist die Differenz zweier benachbarter Folgenglieder konstant.

Beispiel 20.3:

Die Folge der geraden Zahlen
$(a_i)_{(i\in\mathbb{N})} = (2, 4, 6, 8, \ldots); a_i = 2 \cdot i$

Beispiel 20.4:

Die Folge der ungeraden Zahlen
$(a_i)_{(i\in\mathbb{N}_0)} = (1, 3, 5, 7, \ldots); a_i = 2 \cdot i + 1$

Wir schreiben die Differenz zweier benachbarter Glieder mit $d = a_{i+1} - a_i$ und das erste Folgenelement mit a_0 und können damit sofort das Bildungsgesetz angeben:

Rekursiv: a_0 ist gegeben; $a_{i+1} = a_i + d$

Explizit: $a_i = a_0 + d \cdot i$

Geometrische Folgen: Bei ***geometrischen Folgen*** ist der Quotient zweier benachbarter Folgenglieder konstant.

Beispiel 20.5:

Die Folge der Zweierpotenzen
$(a_i)_{(i\in\mathbb{N}_0)} = (1, 2, 4, 8, 16, \ldots); a_i = 2^i$

Wir schreiben den Quotienten zweier benachbarter Glieder mit $q = \frac{a_{i+1}}{a_i}$ und das erste Folgenelement mit a_0 und können damit sofort das Bildungsgesetz angeben:

Rekursiv: a_0 ist gegeben; $a_{i+1} = a_i \cdot q$

Explizit: $a_i = a_0 \cdot q^i$

Potenzfolgen: Bei ***Potenzfolgen*** liefert eine Potenzfunktion die Folgenglieder. Potenzfolgen lassen sich immer auf arithmetische Folgen zurückführen; man bezeichnet sie deswegen auch als ***arithmetische Folgen höherer Ordnung***.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beispiel 20.6:

Die Folge der Quadratzahlen
$(a_i)_{(i\in\mathbb{N}_0)} = (1, 4, 9, 16, 25, \ldots); a_i = i^2$

Diese Folge ist eine arithmetische Folge zweiter Ordnung, wie man sofort sehen kann, wenn man die zwei **Differenzfolgen** aufschreibt:

Quadratzahlen	1		4		9		16		25		36		49	...
1.Differenzfolge		3		5		7		9		11		13		...
2.Differenzfolge			2		2		2		2		2		2	...

Alternierende Folgen: Bei alternierenden Folgen wechselt das Vorzeichen mit jedem Folgenglied.

Beispiel 20.7:

$(a_i)_{(i\in\mathbb{N})} = (1, -1, 1, -1, 1, \ldots); a_i = (-1)^i$

Konstante Folgen: Folgen, deren Glieder alle übereinstimmen, werden ***konstante Folgen*** genannt.

Beispiel 20.8:

$(a_i)_{(i\in\mathbb{N})} = (5, 5, 5, 5, 5, \ldots); a_i = 5$

Nullfolgen: Eine unendliche Folge, deren Glieder gegen 0 konvergieren, heißt ***Nullfolge***.

Man schreibt mit dem Limes-Operator lim: $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = 0$

Beispiel 20.9:

$(a_i)_{(i\in\mathbb{N})} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots); \quad a_i = \frac{1}{2^i}; \quad \lim\limits_{i\to\infty} a_i = 0$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

20.1.3 Eigenschaften von Folgen

Beschränktheit:

Eine Folge heißt ***nach oben beschränkt***, wenn es eine Zahl S gibt, für die gilt: $a_i < S$ für alle i. Die kleinste derartige Zahl S nennt man das ***Supremum*** der Folge (a_i).

Eine Folge heißt ***nach unten beschränkt***, wenn es eine Zahl I gibt, für die gilt: $a_i > I$ für alle i. Die größte derartige Zahl I nennt man das ***Infimum*** der Folge (a_i).

Eine sowohl nach oben als auch nach unten beschränkte Folge nennt man eine ***beschränkte Folge***.

Beispiel 20.10: Beschränktheit

Die Folge (1, 1.1, 1.11, 1.111, 1.1111, ...) mit dem Bildungsgesetz $a_{i+1} = a_i + 10^{-i-1}$ ist beschränkt, denn sie hat offensichtlich das Infimum 1 und das Supremum $1{,}\overline{1}$.

Monotonie:

Eine Folge heißt ***monoton steigend***, wenn für alle i gilt: $a_{i+1} \geq a_i$.

Eine Folge heißt ***streng monoton steigend***, wenn für alle i gilt: $a_{i+1} > a_i$.

Eine Folge heißt ***monoton fallend***, wenn für alle i gilt: $a_{i+1} \leq a_i$.

Eine Folge heißt ***streng monoton fallend***, wenn für alle i gilt: $a_{i+1} < a_i$.

Alternierende Folgen können nicht monoton sein.

Grenzwert:

Eine unendliche Folge kann einen Grenzwert haben; das ist der Wert, dem sich die Folgenglieder immer weiter annähern. Oben haben wir mit der Nullfolge bereits ein Beispiel gegeben. Man sagt, die Folge **konvergiere** gegen diesen Grenzwert.

Jede beschränkte und monotone Folge hat einen Grenzwert, gegen den sie konvergiert.

Die Beschränktheit einer Folge ist eine **notwendige**, aber **nicht hinreichende** Bedingung für ihre Konvergenz (Gegenbeispiel: Die alternierende Folge $(a_i)_{(i\in\mathbb{N})} = (1, -1, 1, -1, 1, \ldots); a_i = (-1)^i$ ist beschränkt, konvergiert aber nicht).

Monotonie ist für sich genommen keine Bedingung für die Konvergenz einer Folge. Beispiel: Die alternierende Folge $(a_i)_{(i\in\mathbb{N})} = (-1, 1/2, -1/3, 1/4, -1/5, \ldots); a_i = \frac{1}{i}\cdot(-1)^i$ ist nicht monoton, konvergiert aber offensichtlich gegen den Grenzwert 0.

Beschränktheit und Monotonie sind zusammen genommen also nicht **notwendig**, aber **hinreichend** für die Konvergenz einer Folge.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Häufungspunkte:

Manchmal haben unendliche Folgen einen oder mehrere Werte, in deren Umgebung sich unendlich viele Folgenglieder befinden. Solche Werte nennt man Häufungspunkte der Folge.

Beispiel 20.11: Häufungspunkte

Die alternierende Folge $(a_i)_{(i\in N)} = (1, -1, 1, -1, 1, \ldots); a_i = (-1)^i$ hat die beiden Häufungspunkte -1 und +1.

Die Folge $(a_i)_{(i\in\mathbb{N})} = (1, 5, 2, 5, 3, 5, 4, 5, 5, 5, 6, 5, 7, 5, 8, 5, 9, 5, \ldots)$ hat einen Häufungspunkt bei +5.

Die Folge $(a_i)_{(i\in\mathbb{N})} = (3/2, 5/2, 4/3, 7/3, 5/4, 9/4, \ldots)$ hat die beiden Häufungspunkte 1 und 2.

Ein Häufungspunkt einer konvergenten Folge ist ihr Grenzwert.

Wenn es in einer unendlichen Folge eine konvergente unendliche Teilfolge gibt, so ist der Grenzwert der konvergierenden Teilfolge ein Häufungspunkt der Folge.

Ein elementar wichtiger Satz ist der Satz von Bolzano und Weierstraß:

Satz 20.1: Satz von Bolzano-Weierstraß

Der ***Satz von Bolzano-Weierstraß*** kann auf mehrere (zueinander äquivalente) Arten formuliert werden:

- Jede beschränkte Folge komplexer Zahlen (mit unendlich vielen Gliedern) enthält (mindestens) eine konvergente Teilfolge.
- Jede beschränkte Folge komplexer Zahlen (mit unendlich vielen Gliedern) hat (mindestens) einen Häufungspunkt.
- Jede beschränkte Folge reeller Zahlen hat einen größten und einen kleinsten Häufungspunkt.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

20.2 Reihen

Konvergierende Reihen haben in der höheren Mathematik eine fundamentale Bedeutung. Die Beschäftigung mit Reihen und insbesondere ihrem Konvergenzverhalten hat letztendlich zur Begründung der mathematischen Teildisziplin der Analysis geführt. Ohne die Analysis wäre weder unser heutiger Stand der mathematischen Beschreibung alltäglicher Vorgänge in Natur und Technik möglich, noch die numerische Berechnung der elementaren Funktionen wie z. B. des Sinus, oder des Logarithmus naturalis im Computer.

Definition 20.1: Reihe

Eine Reihe ist eine Folge, deren Glieder die Partialsummen einer unendlichen Folge sind. Damit ist das n. Glied einer Reihe die Summe der n ersten Glieder der zugrundeliegenden Folge.

Prinzipiell gelten für Reihen dieselben Eigenschaften, wie wir sie oben für Folgen definiert haben.

Von besonderer praktischer Bedeutung sind konvergente unendliche Reihen. Der Grenzwert einer konvergenten Reihe wird die **Summe** oder einfach der **Wert** der Reihe genannt.

Sei (a_i) eine beliebige unendliche Folge.

Dann nennt man $s_n := a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ die n-te Partialsumme der Folge (a_i) [20.1] .

Anstatt $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ schreibt man als Abkürzung auch: $\sum_{i=0}^{n} a_i$. Das große griechische Sigma ist das Summenzeichen, und man liest das „Summe für $i = 0$ bis n über a_i“).

Damit kann man für den Grenzwert einer Reihe schreiben:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \tag{20.3}$$

Wenn in einem gegebenen Kontext die Grenzen und der **Summationsindex** i klar sind, wird diese Schreibweise häufig abgekürzt: $\sum_i a_i$ oder einfach nur $\sum a_i$.

Von Carl Friedrich Gauß ist diese Anekdote überliefert:[20.2]

Eines Tages im Jahr 1786 benötigte der Braunschweiger Volksschul-Lehrer Büttner einige Minuten Zeit. Um sich diese zu verschaffen, stellte er seiner Klasse diese Aufgabe:
„Rechnet alle Zahlen von 1 bis 100 zusammen.“ Bis auf einen Schüler begannen alle fleißig, zusammen zu zählen. 1+2=3. 3+3=6. 6+4=10. 10+5=15. ...
Ein Schüler jedoch schrieb nach wenigen Sekunden das richtige Ergebnis 5050 auf seine Schiefertafel und legte diese Herrn Büttner mit den Worten aufs Pult: „Ligget se“.

[20.1] Der Operator := bedeutet: Es wird per Definition gleich gesetzt

[20.2] Johann Carl Friedrich Gauß (latinisiert Carolus Fridericus Gauss; * 30. April 1777 in Braunschweig; † 23. Februar 1855 in Göttingen) war ein deutscher Mathematiker, Astronom, Geodät und Physiker. Wegen seiner überragenden wissenschaftlichen Leistungen galt er bereits zu seinen Lebzeiten als Princeps Mathematicorum („Fürst der Mathematiker“).

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Dieser Schüler war der neunjährige Carl Friedrich Gauß.
Wie hat er das gemacht?
Nun – erstens hat sich Carl Friedrich Gauß selber die Multiplikation beigebracht, denn diese stand in der Klasse noch gar nicht auf dem Lehrplan.
Zweitens war Gauß ein begnadeter Kopfrechner.
Drittens – und das ist hier entscheidend – erkannte Gauß, dass man statt mühselig zu rechnen 1+2=3. 3+3=6. 6+4=10. 10+5=15. … sich klar machen kann:
1+100=101. 2+99=101. 3+98=101. 4+97=101. … 48+53=101. 49+52=101. 50+51=101. Damit ist das gesuchte Ergebnis $50 \cdot 101 = 5050$.
Damit hat der neunjährige Gauß als Erster eine Summenformel für eine Reihe entdeckt.

Beispiel 20.12: Der „kleine Gauß“

Bei dieser Anekdote können wir die Aufgabe des Volksschul-Lehrers Büttner „Rechnet alle Zahlen von 1 bis 100 zusammen“ wie folgt schreiben:

$$1+2+3+4+\ldots+100=\sum_{i=1}^{100} i = 50 \cdot 101 = 5.050 \tag{20.4}$$

Die geniale Lösung des Carl Friedrich Gauß lässt sich allgemein als Summenformel dieser Reihe so darstellen:

$$1+2+3+4+\cdots+n=\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2} \tag{20.5}$$

Eine weitergehende Behandlung der Theorie der Reihen sprengt den Scope eines mathematischen Brückenkurses. Deswegen seien hier exemplarisch lediglich einige in der Praxis relevante besondere unendliche Reihen aufgelistet.

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2 \cdot k + 1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots \tag{20.6}$$

$$\sin x = \sum_{(k=0)}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2 \cdot k+1}}{(2 \cdot k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots \tag{20.7}$$

$$\mathrm{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots \approx 2{,}71828 \tag{20.8}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

21 Funktionen einer reellen Variablen

21.1 Relationen und Funktionen

Unter einer **Relation** versteht man allgemein eine Vorschrift, mittels der aus Elementen einer Quellmenge und Elementen einer Zielmenge Paare gebildet werden. Die Quellmenge nennt man auch **Definitionsmenge**, die Zielmenge nennt man auch **Wertemenge**.

Quell- und Zielmenge können, müssen aber nicht notwendigerweise die gleichen Elemente haben.

Die Menge aller denkbaren Paare aus je einem Element der Quell- und der Zielmenge ist das **kartesische** Produkt (oder die **Potenzmenge**) der beiden Mengen. Man schreibt: $P = Q \times Z$ und meint damit:

Definition 21.1: Kartesisches Produkt

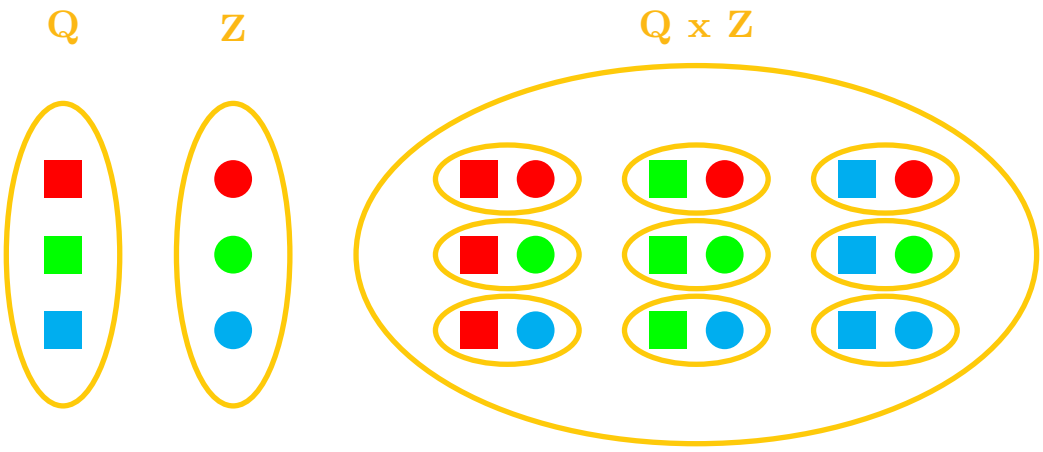
Sei Q eine Menge mit den Elementen $q_1, q_2, \ldots, q_m$ und Z eine Menge mit den Elementen $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Dann:

$$Q \times Z := \{(q_1 z_1), (q_2 z_1), \ldots (q_m z_1), (q_1 z_2), (q_2 z_2), \ldots, (q_m, z_n)\} = \{(q_i z_j) | q_i \in Q, z_j \in Z\} \tag{21.1}$$

Kartesisches Produkt zweier Mengen

Diese Abbildung 21.1 verdeutlicht dies anhand eines einfachen Beispiels:

Abbildung 21.1: Kartesisches Produkt zweier Mengen



Quelle: Eigene Darstellung

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beispiel einer Relation

Im rechten Beispiel wird die Relation

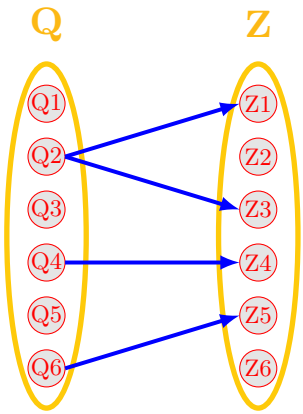
$R = (q_2 z_1), (q_2 z_3), (q_4 z_4), (q_6 z_5)$ visualisiert.

Man schreibt hierfür allgemein formal:

$R : Q \to Z, q \mapsto R(q)$

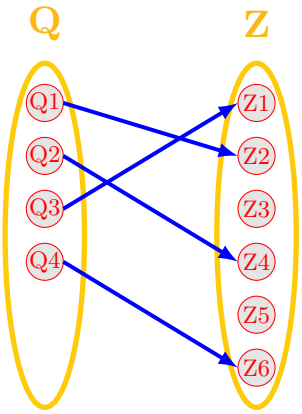
Dabei ist $R(q)$ die Vorschrift, nach der den Elementen q_i der Quellmenge die Elemente z_j der Zielmenge zugeordnet werden.

Abbildung 21.2: Relation



Quelle: Eigene Darstellung

Abbildung 21.3: Funktion



Quelle: Eigene Darstellung

Beispiel einer Funktion

Eine Relation, bei der jedem Element der Quellmenge genau ein Element der Zielmenge zugeordnet ist, heißt Funktion. Die Abbildung 21.3 zeigt ein Beispiel.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

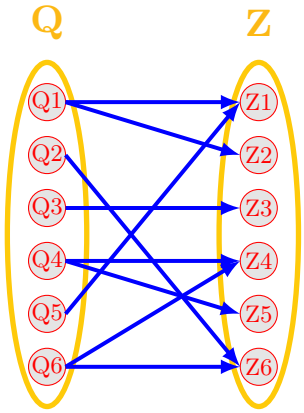
Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Die Abbildungen 21.4 und 21.5 zeigen zwei Beispiele für Relationen, die keine Funktionen sind.

In Abbildung 21.4 links gibt es Elemente der Quellmenge, denen mehrere Elemente der Zielmenge zugeordnet sind (z. B. Q_1)

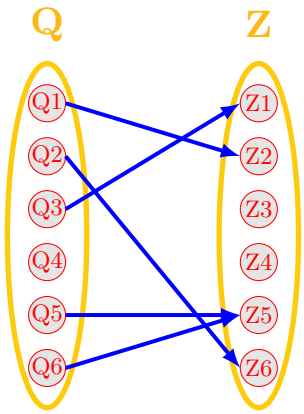
In Abbildung 21.5 rechts gibt es Elemente der Quellmenge, denen kein Element der Zielmenge zugeordnet ist (Q_4).

Abbildung 21.4: Zuordnung mehrere Elemente



Quelle: Eigene Darstellung

Abbildung 21.5: kein Element ist der Zielmenge zugeordnet



Quelle: Eigene Darstellung

Regel 21.1: Relation und Funktion

Ganz allgemein gilt:

Eine ***Relation*** R zwischen zwei Mengen Q und Z ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts der beiden Mengen Q und Z:

$$R : Q \to Z, q \mapsto R(q) \subseteq Q \times Z \tag{21.2}$$

Eine ***Funktion*** F zwischen zwei Mengen Q und Z ist eine echte Teilmenge des kartesischen Produkts der beiden Mengen Q und Z:

$$F : Q \to Z, q \mapsto F(q) \subset Q \times Z \tag{21.3}$$

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

21.1.1 Algebraische Funktionen

Definition 21.2: Algebraische Funktion

Ist f eine Funktion und sind Q und Z Zahlenmengen (z. B. $\mathbb{R}$), dann nennt man f eine ***algebraische Funktion*** und schreibt:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) \tag{21.4}$$

Beispiel 21.1: Algebraische Funktion

Für die in der Schulmathematik meistens nicht ganz so exakt dargestellte Funktion $y = x^2$ schreibt man korrekt

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 \tag{21.5}$$

oder

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto y = x^2 \tag{21.6}$$

Für die Aufgabe „Zeichne den Graph der Funktion $y = x^2$ für x-Werte zwischen -3 und 3 in einem kartesischen Koordinatensystem“ würde man die Funktion exakt so darstellen:

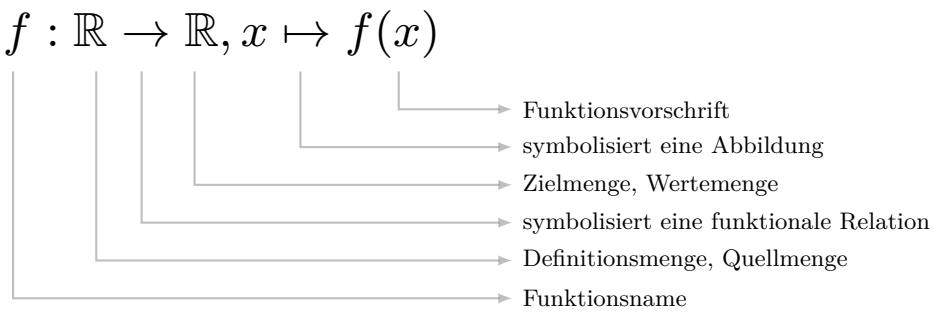
$$f : [-3, 3] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto y = x^2 \tag{21.7}$$

Wenn vorher vereinbart ist, dass das Universum $\mathbb{R}$ ist (was in der Praxis meistens der Fall ist), lässt man die Teilmengenrelation weg und schreibt hierfür verkürzt:

$$f : [-3, 3] \to \mathbb{R}, x \mapsto y = x^2 \tag{21.8}$$

In der Abbildung 21.6 unten sind die einzelnen Teile dieser formalen Schreibweise nochmals bezeichnet:

Abbildung 21.6: Formale Beschreibung einer Funktion



Quelle: Eigene Darstellung

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Die Abb. 21.6 zeigt, dass man Folgen und Reihen als Funktionen auffassen kann, die eine Relation zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ bilden:

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, i \mapsto a_i \tag{21.9}$$

Umgekehrt ist die Gaußklammer-Funktion (Abrundungs-Funktion) eine Funktion, die eine Relation zwischen R und Z bildet:

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, x \mapsto \lfloor x \rfloor \tag{21.10}$$

21.2 Der Graph einer algebraischen Funktion

Als ***Funktionsgraph*** oder kurz ***Graph*** G_f (seltener: ***Funktionsgraf*** oder ***Graf***) einer Funktion f bezeichnet man in der Mathematik die Menge aller geordneten Paare $(x, f(x))$ aus den Elementen x der Definitionsmenge und den zugehörigen Funktionswerten $f(x)$.[21.1]

Mitunter können diese Paare als Punkte in der Zeichenebene oder im Anschauungsraum interpretiert werden; sie werden dann auch ***Kurve***, ***Kurvenverlauf*** oder ebenfalls ***Funktionsgraph*** genannt.

Definition 21.3:

Der ***Graph*** einer Funktion $f : D \to Z, x \mapsto f(x)$ mit der Definitionsmenge D und der Zielmenge Z ist die Menge

$$G_f := \Big\{ ((x, f(x)) \in D \times Z \mid x \in D \Big\} \tag{21.11}$$

Der Graph ist somit eine spezielle Teilmenge des kartesischen Produkts aus Definitions- und Zielmenge. Er besteht aus allen Paaren, bei denen die erste Komponente ein Element der Definitionsmenge und die zweite Komponente das diesem Element durch die Funktion zugeordnete Element der Zielmenge ist.



Hinweis 21.1: Unterschied Funktionsgraph und Darstellung einer Funktion im Koordinatensystem

Nicht zu verwechseln ist der so definierte Graph (Menge aus Zahlenpaaren) mit der zeichnerischen (graphischen) Darstellung in einem Koordinatensystem (Interpretation der Zahlenpaare als Koordinaten jeweils eines Punktes).

Die zeichnerische Darstellung ist eine ***Visualisierung*** oder ***visuelle Repräsentation*** der Funktion – die umgangssprachliche Bezeichnung einer derartigen zeichnerischen Darstellung als „Graph“ ist unpräzise!

[21.1] https://de.wikipedia.org/wiki/Funktionsgraph; abgerufen am 28-AUG-2016.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

21.2.1 Koordinatensysteme

Koordinatensysteme sind Hilfsmittel der Mathematik; sie dienen zur eindeutigen Bezeichnung der Position von Punkten und Objekten in einem geometrischen Raum. Sie werden in vielen Wissenschaften und in der Technik verwendet. Auch im Alltag werden Koordinatensysteme häufig verwendet:

- Längen- und Breitengrade bilden ein geographisches Koordinatensystem der Erde.
- In Spielnotationen wie bei „Schiffe versenken“ oder beim Schachbrett und in Tabellenkalkulationen werden Felder mit Koordinaten wie B3 bezeichnet.
- Wanderkarten und Stadtpläne sind meist in Koordinaten-Quadrate eingeteilt. In der Quadratestadt Mannheim bilden die Innenstadtstraßen das Koordinatensystem.
- Die Lage von Hydranten wird durch ein vom Hinweisschild ausgehendes Koordinatensystem beschrieben.

Das am häufigsten verwendete Koordinatensystem – dies gilt besonders für die Schulmathematik – ist das **kartesische Koordinatensystem**.

21.2.1.1 Das ebene kartesische Koordinatensystem

Ein kartesisches Koordinatensystem ist ein orthogonales[21.2] Koordinatensystem.[21.3] Es ist nach dem latinisierten Namen Cartesius des französischen Mathematikers René Descartes[21.4] benannt, der das Konzept der „kartesischen Koordinaten“ bekannt gemacht hat.

Im zwei- und dreidimensionalen Raum handelt es sich um das am häufigsten verwendete Koordinatensystem, da sich viele geometrische Sachverhalte in diesem anschaulich und übersichtlich beschreiben lassen.

Die beiden Richtungsachsen stehen orthogonal aufeinander, schneiden sich also im 90°-Winkel. Die Koordinatenlinien sind Geraden in konstantem Abstand voneinander. Geht man von der mathematischen Rechtshändigkeit aus, so bezeichnet man die horizontale Achse als **Abszissenachse** oder kurz **Abszisse** (von lat. linea abscissa „abgeschnittene Linie“) oder Rechtsachse. Die vertikale Achse heißt **Ordinatenachse** oder kurz **Ordinate** (von lat. linea ordinata „geordnete Linie“) oder Hochachse.

In der Schulmathematik bezeichnet man die Abszisse meistens einfach mit „x-Achse“ und die Ordinate mit „y-Achse“, weil das ebene kartesische Koordinatensystem dort überwiegend zur Visualisierung des Graphen einer Funktion dient.

Für einen Punkt P mit den Koordinaten x_P und y_P schreibt man $P(x_P|y_P)$ oder auch $P = (x_P, y_P)$.

[21.2] In der Elementargeometrie nennt man zwei Geraden oder Ebenen **orthogonal**, wenn sie einen rechten Winkel, also einen Winkel von 90° einschließen.

[21.3] https://de.wikipedia.org/wiki/Kartesisches_Koordinatensystem; abgerufen am 2016-08-28

[21.4] René Descartes (latinisiert Renatus Cartesius; * 31. März 1596 in La Haye en Touraine; † 11. Februar 1650 in Stockholm) war ein französischer Philosoph, Mathematiker und Naturwissenschaftler. Descartes gilt als der Begründer des modernen frühneuzeitlichen Rationalismus.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

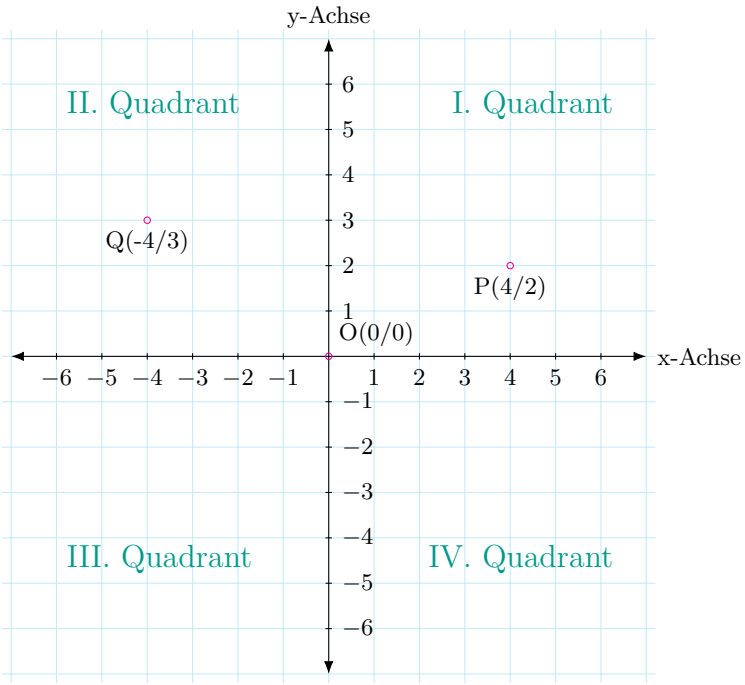
Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Der Punkt $O = (0|0)$, in dem sich die beiden Achsen treffen, wird **Koordinatenursprung** oder **Origo** (lat. „Ursprung“) genannt[21.5].

Rechts ist in Abbildung 21.7 ein Beispiel für ein ebenes (2-dimensionales) kartesisches Koordinatensystem mit 2 Punkten P und Q.

Die vier **Quadranten** werden ausgehend vom Quadrant, in dem sowohl x aus auch y positiv sind, im mathematisch positiven Sinn durchnummeriert.

Abbildung 21.7: Kartesisches Koordinatensystem



Quelle: Eigene Darstellung

[21.5] Beachte: In $O = (0|0)$ ist O der große Buchstabe O (von „Origio“), nicht die Null!

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

21.2.1.2 Polarkoordinatensystem

In der Mathematik und Geodäsie[21.6] versteht man unter einem Polarkoordinatensystem (auch: Kreiskoordinatensystem) ein zweidimensionales Koordinatensystem, in dem jeder Punkt in einer Ebene durch den Abstand von einem vorgegebenen festen Punkt und den Winkel zu einer festen Richtung festgelegt wird.[21.7]

Der feste Punkt wird als **Pol** bezeichnet; er entspricht dem Ursprung bei einem kartesischen Koordinatensystem. Der vom Pol in der festgelegten Richtung ausgehende Strahl heißt **Polarachse**. Der Abstand vom Pol wird meist mit r oder ϱ bezeichnet und heißt **Radius** oder **Radialkoordinate**, der Winkel wird mit φ oder θ bezeichnet und heißt **Winkelkoordinate**, **Polarwinkel** oder **Azimut**.

Polarkoordinaten bilden einen Spezialfall von orthogonalen krummlinigen Koordinaten. Sie sind hilfreich, wenn sich das Verhältnis zwischen zwei Punkten leichter durch Winkel und Abstände beschreiben lässt als dies mit x- und y-Koordinaten der Fall wäre.

In der Geodäsie sind Polarkoordinaten die häufigste Methode zur Einmessung von Punkten (Polarmethode). In der Funknavigation wird das Prinzip oft als „Rho-Theta“ (für Distanz- und Richtungsmessung) bezeichnet.

In der Mathematik wird die Winkelkoordinate im mathematisch positiven Drehsinn (Gegenuhrzeigersinn) gemessen. Wird gleichzeitig ein kartesisches Koordinatensystem benutzt, so dient in der Regel dessen Koordinatenursprung als Pol und die x-Achse als Polarachse.

Die Winkelkoordinate wird also in der Mathematik von der x-Achse aus in Richtung der y-Achse positiv gemessen.



Hinweis 21.2:

In der Geodäsie und in der Navigation wird das Azimut von der Nordrichtung (= nach oben) aus im Uhrzeigersinn gemessen!

[21.6] Die **Geodäsie** ist die Wissenschaft von der Ausmessung und Abbildung der Erdoberfläche

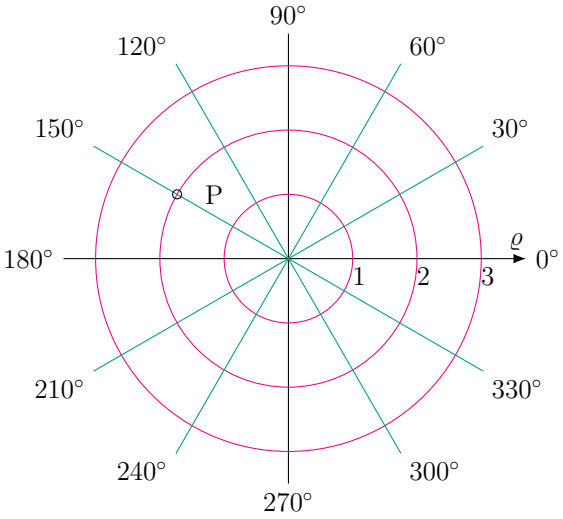
[21.7] https://de.wikipedia.org/wiki/Polarkoordinaten; abgerufen am 2016-08-28.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Im Beispiel Abbildung 21.8 ist ein Polarkoordinatensystem gezeigt, in das ein Punkt P mit seinen Koordinaten $\varrho_P = 2$ und $\varphi_P = 150°$ eingetragen ist.

Abbildung 21.8: Polarkoordinatensystem



Quelle: Eigene Darstellung

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

21.2.2 Graphische Darstellung von Funktionsgraphen

Für die Visualisierung einer Funktion fasst man üblicherweise die Menge der Zahlenpaare, die den Graphen der Funktion bilden $\left(\{(x, f(x)) \in D \times Z | x \in D\}\right)$, je Zahlenpaar als die Koordinaten eines Punktes in einem meistens kartesischen Koordinatensystem auf.

Für das konkrete Zeichnen „von Hand“ erstellt man sich eine Wertetabelle.

Beispiel 21.2: Beispiel 1

$$f : [-5; 5] \subset \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = y = x^2 \tag{21.12}$$

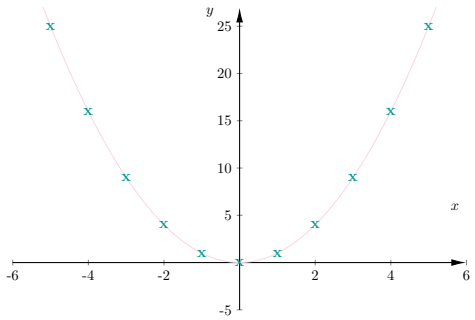
Diese Funktion bildet eine Teilmenge der ganzen Zahlen auf die Menge der reellen Zahlen ab. In der visuellen Darstellung des Funktionsgraphen treten deswegen nur einzelne, isolierte Punkte auf.

Wertetabelle:

$x =$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x) =$	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

Graphische Darstellung: Siehe rechts, Abbildung 21.9

Abbildung 21.9: Beispiel 1



Quelle: Eigene Darstellung

Beispiel 21.3: Beispiel 2

$$f : \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = y = \sqrt{x} \tag{21.13}$$

(Zeichnung bis $x = 20$ ausführen!)

Diese Funktion bildet eine Teilmenge der reellen Zahlen auf die Menge der reellen Zahlen ab. Die visuelle Darstellung des Funktionsgraphen ist deswegen eine durchgezogene, „lückenlose“ Linie. In der Wertetabelle berechnet man sich einige Punkte, trägt diese dann in das Koordinatensystem ein und versucht daraus, eine „glatte“ Kurve zu zeichnen.

Wenn der Verlauf nicht direkt sichtbar ist, muss man entsprechend weitere Zwischenwerte berechnen.

Im Beispiel merkt man, dass zwischen $x = 0$ und $x = 5$ noch Werte fehlen, um die Kurve „ordentlich“ zeichnen zu können.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

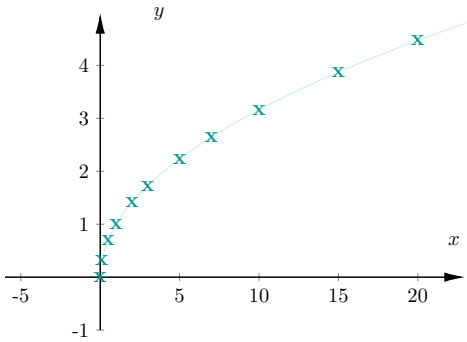
Abbildung 21.10: Beispiel 2

Wertetabelle:

$x =$	0	5	10	15	20	1	2
$f(x) \approx$	0	2,24	3,16	3,87	4,47	1	1,41

$x =$	3	0,5	0,1	7
$f(x) \approx$	1,73	0,71	0,32	2,65

Graphische Darstellung: Siehe rechts, Abbildung 21.10



Quelle: Eigene Darstellung

Beispiel 21.4: Beispiel 3

$$f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = y = \frac{1}{x} \tag{21.14}$$

(Zeichnung von $x = -5$ bis $x = +5$ ausführen!)

Diese Funktion bildet die reellen Zahlen ohne Null auf die Menge der reellen Zahlen ab. Die visuelle Darstellung des Funktionsgraphen ist deswegen eine durchgezogene Linie, die bei $x = 0$ eine Lücke hat. Da die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung ist, genügt es, die Wertetabelle nur für positive (oder nur für negative) Werte von x zu berechnen.

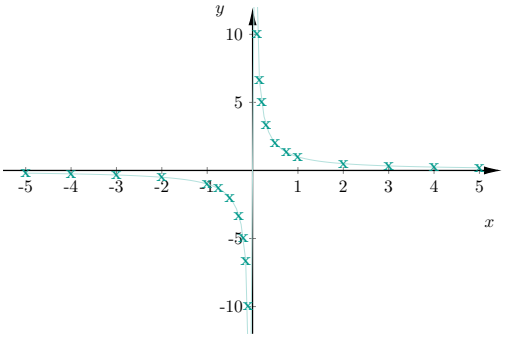
Abbildung 21.11: Beispiel 3

Wertetabelle:

$x = \pm$	5	4	3	2	1	0,75	0,5
$f(x) \approx \pm$	0,2	0,25	0,33	0,5	1	1,33	2

$x = \pm$	0,3	0,2	0,15	0,1
$f(x) \approx \pm$	3,33	5	6,66	10

Graphische Darstellung: Siehe rechts, Abbildung 21.11

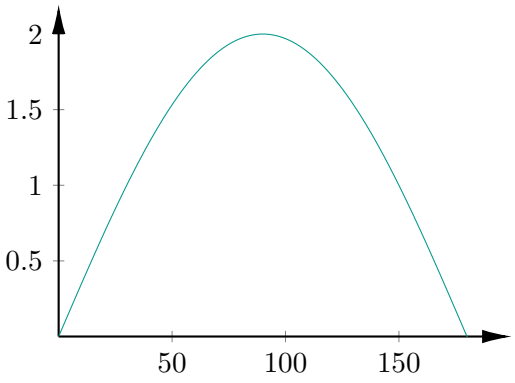


Quelle: Eigene Darstellung

Bei der Visualisierung von Funktionsgraphen hängt die Wahl des verwendeten Koordinatensystems von der konkreten Aufgabenstellung ab. Die Abbildungen 21.13 und 21.12 gibt hierzu ein Beispiel. Die Sinusfunktion wird in Polarkoordinatendarstellung als Kreis dargestellt. Für manche Anwendungsfälle ist das nützlicher als die gewohnte „tildenähnliche“ Form.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Abbildung 21.12: $x-y-$Koordinaten



Quelle: Eigene Darstellung

Beide Diagramme zeigen den Graph der Funktion

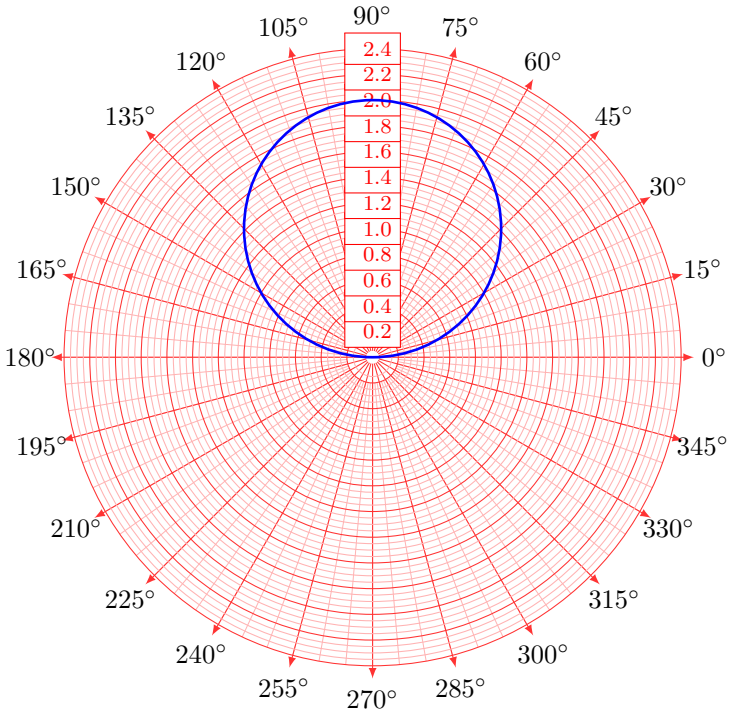
$$f(x) = 2 \cdot \sin(x) \tag{21.15a}$$

bzw.

$$\varrho(\varphi) = 2 \cdot \sin(\varphi) \tag{21.15b}$$

für Funktionsargumente zwischen 0° und 180°.

Abbildung 21.13: Polarkoordinaten



Quelle: Eigene Darstellung

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

21.2.3 Elementare Funktionen

Die **elementaren Funktionen** bezeichnen in der Mathematik immer wieder auftauchende, grundlegende Funktionen, aus denen sich viele andere Funktionen mittels der Grundrechenarten, Verkettung, Differentiation oder Integration bilden lassen.[21.8] Dabei gibt es keine allgemeingültige Definition, wann eine Funktion *elementar* genannt wird und wann nicht.

Die elementaren Funktionen ergeben sich oftmals als Lösungen einer einfachen Differential- oder Funktionalgleichung, und sind deshalb auch für viele Naturwissenschaften wie Physik oder Chemie grundlegend, weil sie immer wieder in den unterschiedlichsten Zusammenhängen auftreten.

Beispielsweise zählt der Hersteller des Computeralgebrasystems Mathematica (die Wolfram Research Inc.) zu den elementaren Funktionen die Folgenden:

- Die Potenzfunktionen
- Die Radizierung bzw. das Wurzelziehen als Umkehrung der Potenzfunktionen
- Die Exponentialfunktion
  1. zur Basis e (der eulerschen Zahl)
  2. zu einer allgemeinen Basis a mit $a^x := \mathrm{e}^{x \cdot \ln a}$
- Der natürliche Logarithmus als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion
- Die trigonometrischen Funktionen
  - Sinus
  - Kosinus
  - Tangens
  - Kotangens
  - Sekans
  - Kosekans
- Die Arkusfunktionen als Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen
  - Arkussinus
  - Arkuskosinus
  - Arkustangens
  - Arkuskotangens
  - Arkussekans
  - Arkuskosekans
- Die hyperbolischen Funktionen
  - Sinus Hyperbolicus

[21.8] https://de.wikipedia.org/wiki/Elementare_Funktion; abgerufen am 2016-08-28

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

  - Kosinus Hyperbolicus
  - Tangens Hyperbolicus
  - Kotangens Hyperbolicus
  - Sekans Hyperbolicus
  - Kosekans Hyperbolicus
- Die Areafunktionen als Umkehrfunktionen der hyperbolischen Funktionen.
  - Areasinus Hyperbolicus
  - Areakosinus Hyperbolicus
  - Areatangens Hyperbolicus
  - Areakotangens Hyperbolicus
  - Areasekans Hyperbolicus
  - Areakosekans Hyperbolicus
- Die min- und max-Funktion
- Die Lambertsche W-Funktion, auch Produktlogarithmus genannt

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

21.2.3.1 Die konstante Funktion

Konstante Funktionen weisen jedem Element der Definitionsmenge die gleiche Zahl C zu, also

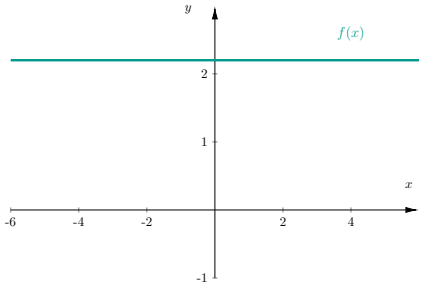
$$f : D \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = C \tag{21.16}$$

Beispiel: $f(x) = y = 2{,}2$

$x =$	-6	-3	0	3	6
$f(x) = y =$	2,2	2,2	2,2	2,2	2,2

Graphische Darstellung: Siehe rechts, Abbildung 21.14

Abbildung 21.14: Beispiel 2



Quelle: Eigene Darstellung

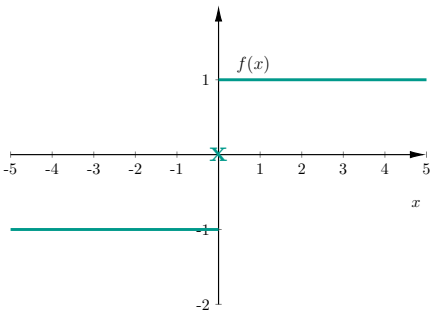
21.2.3.2 Die Vorzeichenfunktion sgn

Die Funktion $\operatorname{sgn}(x)$ weist einer Zahl x ihr Vorzeichen zu.

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases} \tag{21.17}$$

Graphische Darstellung: Siehe rechts, Abbildung 21.15

Abbildung 21.15:
Die Signum-Funktion



Quelle: Eigene Darstellung

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

21.2.3.3 Die Betragsfunktion | ... |

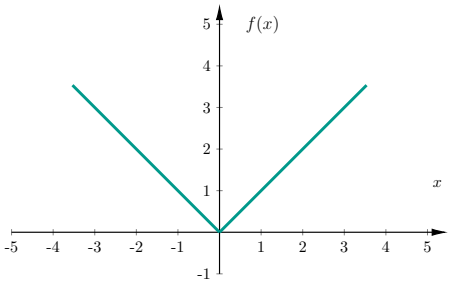
Die Betragsfunktion weist einer Zahl x ihren vorzeichenlosen (stets positiven) Wert zu:

$$|x| = \begin{cases} +x & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases} \tag{21.18}$$

Es gilt: $|x| = x \cdot \operatorname{sgn}(x)$ (21.19)

Graphische Darstellung: Siehe rechts, Abbildung 21.16

Abbildung 21.16:
Die Betrags-Funktion



Quelle: Eigene Darstellung

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

21.2.3.4 Die Gaußklammer-Funktion $\lfloor\ \rfloor$

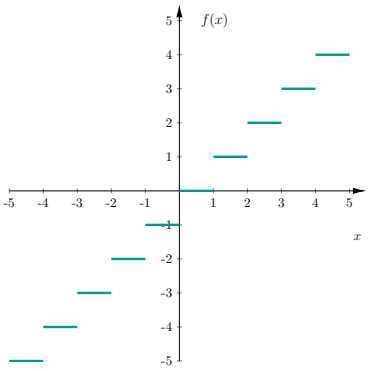
Die Gaußklammerfunktion weist einer Zahl x ihre abgerundete Zahl z zu. Sie ist also eine Funktion von $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$. Man schreibt:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, x \mapsto \lfloor x \rfloor \tag{21.20}$$

Graphische Darstellung: Siehe rechts, Abbildung 21.17
Analog dazu gibt es auch eine „Aufrunden“-Funktion:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, x \mapsto \lceil x \rceil \tag{21.21}$$

Abbildung 21.17: Die Gaußklammer-Funktion



Quelle: Eigene Darstellung

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

21.2.3.5 Die lineare Funktion

Lineare Funktionen sind vom Typ:

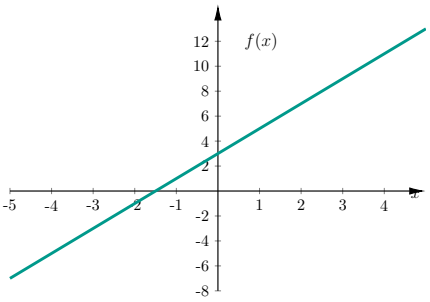
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = y = m \cdot x + b \qquad (21.22)$$

Sie werden **linear** genannt, weil die Darstellung ihrer Graphen in einem kartesischen Koordinatensystem eine Gerade ergibt.

Beispiel: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = y = 2 \cdot x + 3$

Rechts ist diese Funktion in Abbildung 21.18 skizziert.

Abbildung 21.18:
Die lineare Funktion

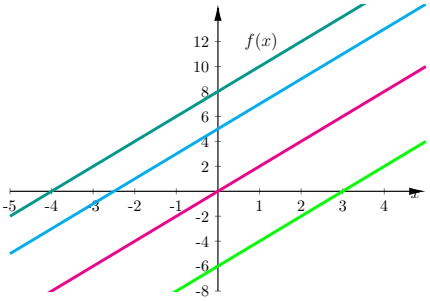


Quelle: Eigene Darstellung

Variiert man bei der linearen Funktion $y = m \cdot x + b$ den Parameter b, dann erhält man in der Darstellung der Graphen parallel verschobene Geraden.

Das Beispiel in Abbildung 21.19 zeigt die lineare Funktion mit dem Parameter b (von oben nach unten):
$b_1 = 8$ (dunkelgrün);
$b_2 = 5$ (cyan);
$b_3 = 0$ (magenta);
$b_4 = -6$ (hellgrün).

Abbildung 21.19:
Unterschiedliche Achsenabschnitte b



Quelle: Eigene Darstellung

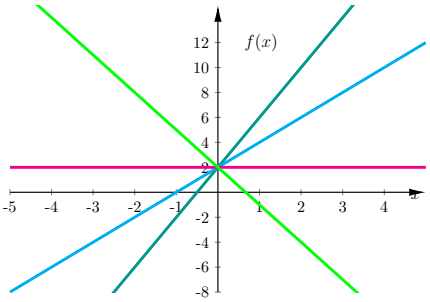
Man erkennt, dass der Parameter b die y-Koordinate bestimmt, an der die jeweilige Gerade die y-Achse schneidet. Man nennt b deswegen auch den **Achsenabschnitt**.

Variiert man bei der linearen Funktion $y = m \cdot x + b$ den Parameter m, dann erhält man in der Darstellung der Graphen unterschiedlich steil verlaufende Geraden, die sich alle im Punkt $(0|b)$ schneiden.

Das Beispiel in Abbildung 21.20 zeigt die lineare Funktion $y = m \cdot x + 2$ mit dem Parameter m:

$m_1 = 4$ (dunkelgrün);
$m_2 = 2$ (cyan);
$m_3 = 0$ (magenta);
$m_4 = -3$ (hellgrün).

Abbildung 21.20:
Unterschiedliche Steigungen m



Quelle: Eigene Darstellung

Man erkennt, dass der Parameter m die **Steigung** der Geraden bestimmt.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

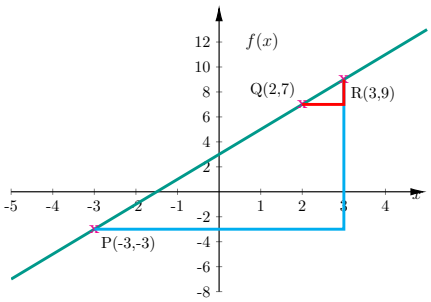
Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Positive m bedeuten dabei auch **positive Steigung**: Man läuft entlang der Geraden in Richtung positive x-Werte und muss dabei in Richtung positiver y-Werte herauf klettern.

Umgekehrt bedeuten negative m **negative Steigung**: Man läuft entlang der Geraden in Richtung positive x-Werte und muss dabei in Richtung negativer y-Werte herab klettern.

Der Begriff der **Steigung einer Kurve in einem Punkt** hat in der Analysis eine fundamentale Bedeutung; wir wollen ihn deswegen hier noch etwas näher betrachten.

Abbildung 21.21: Steigungs-Dreiecke



Quelle: Eigene Darstellung

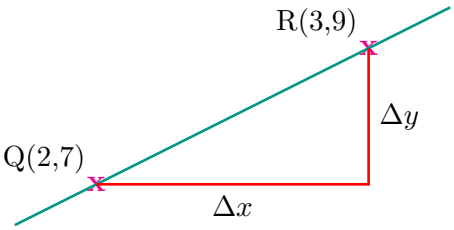
Rechts in der Abbildung 21.21 ist die Funktion $y = 2 \cdot x + 3$ dargestellt. Es sind drei Punkte und zwei **Steigungsdreiecke** eingezeichnet.

Wir betrachten das rot eingezeichnete Steigungsdreieck in der Vergrößerung in der Abbildung 21.22.

Mit dem Differenz-Operator Δ bezeichnet man allgemein eine Differenz. Im Beispiel des roten Steigungsdreiecks bedeutet dies:

$$\Delta x = R_x - Q_x = 3 - 2 = 1 \tag{21.23a}$$
$$\Delta y = R_y - Q_y = 9 - 7 = 2 \tag{21.23b}$$

Abbildung 21.22: Differenz-Operator



Quelle: Eigene Darstellung

Damit errechnen wir für die Steigung m im Intervall $[2, 3]$:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9-7}{3-2} = 2 \tag{21.24}$$

Genauso gut können wir die Steigung der Geraden über die Punkte P und R errechnen:

$$\Delta x = R_x - P_x = 3 - (-3) = 6 \tag{21.25a}$$
$$\Delta y = R_y - P_y = 9 - (-3) = 12 \tag{21.25b}$$
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9-(-3)}{3-(-3)} = \frac{12}{6} = 2 \tag{21.25c}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

21.2.4 Polynomfunktionen

Die oben betrachtete lineare Funktion kann man auch als **Polynomfunktion 1. Grades** bezeichnen.

Definition 21.4:

Die allgemeine Formulierung einer **Polynomfunktion n.-ten Grades** ist:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = y = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_n \cdot x^n \tag{21.26}$$

Wir betrachten im Folgenden getrennt:

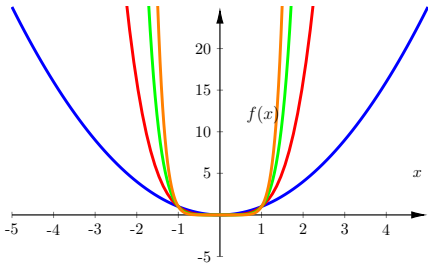
- reine Potenzfunktionen: $y = x^n$
- komplette Polynomfunktionen: $y = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_n \cdot x^n$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

21.2.4.1 Reine Potenzfunktionen

Abbildung 21.23: Gerade Potenzfunktionen



Quelle: Eigene Darstellung

Rechts in der Abbildung 21.23 sind 4 Funktionen dargestellt, die der Funktionalgleichung $y = x^n$ gehorchen, wobei der Exponent n positiv und gerade ist.

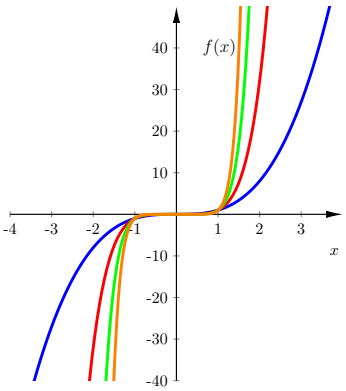
Für den Parameter n gilt hier:

$n_1 = 2$ (blau);
$n_2 = 4$ (rot);
$n_3 = 6$ (grün);
$n_4 = 8$ (orange).

Man erkennt:

1. Die Darstellung der Graphen reiner Potenzfunktionen mit geradzahligen Exponenten sind **spiegelsymmetrisch** bezüglich der y-Achse („**gerade Funktion**“);
2. Je größer der Exponent n, desto
   - „flacher“ der Verlauf der Darstellung des Funktionsgraphen für $|x| < 1$;
   - „steiler“ der Verlauf der Darstellung des Funktionsgraphen für $|x| > 1$.

Abbildung 21.24: Ungerade Potenzfunktionen



Quelle: Eigene Darstellung

Jetzt sind rechts in der Abbildung 21.24 4 Funktionen dargestellt, die der Funktionalgleichung $y = x^n$ gehorchen, wobei der Exponent n positiv und ungerade ist.

Für den Parameter n gilt hier:

$n_1 = 3$ (blau);
$n_2 = 5$ (rot);
$n_3 = 7$ (grün);
$n_4 = 9$ (orange).

Man erkennt:

1. Die Darstellung der Graphen reiner Potenzfunktionen mit ungeradzahligen Exponenten sind **punktsymmetrisch** bezüglich des Ursprungs („**ungerade Funktion**“);
2. Je größer der Exponent n, desto
   - „flacher“ der Verlauf der Darstellung des Funktionsgraphen für $|x| < 1$;
   - „steiler“ der Verlauf der Darstellung des Funktionsgraphen für $|x| > 1$.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

21.2.4.2 Komplette Polynomfunktionen

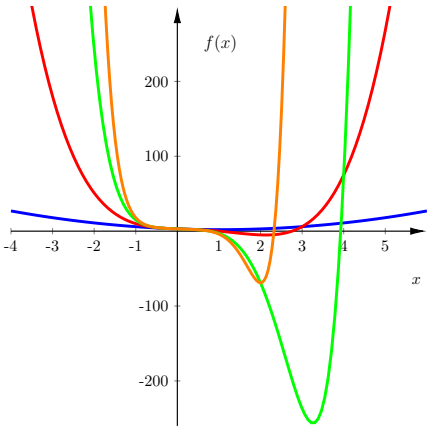
Rechts sind in den Abbildungen 21.25 und 21.26 4 Funktionen dargestellt, die der Funktionalgleichung

$$y = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_n \cdot x^n \qquad (21.27)$$

gehorchen. Hierbei sind:

$a_0 = 3$, $a_1 = -2$, $a_2 = 1$, $a_3 = -3$,
$a_4 = 1$, $a_5 = -4$, $a_6 = 1$, $a_7 = -2$,
$a_8 = 1$.

Abbildung 21.25: Gerade Polynomfunktionen



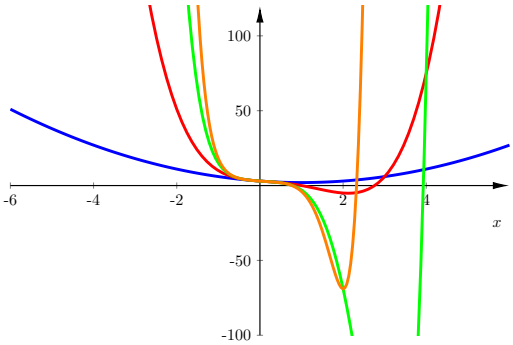
Quelle: Eigene Darstellung

Die Graphen sind in 2 verschiedenen Skalierungen der y-Achse dargestellt. Für den Parameter n gilt:

$n_1 = 2$ (blau);
$n_2 = 4$ (rot);
$n_3 = 6$ (grün);
$n_4 = 8$ (orange).

Man erkennt, dass sich die Graphen für große Beträge des Arguments x immer näher denen der reinen Potenzfunktionen des gleichen Grades annähern, wobei im Bereich kleiner Beträge des Arguments x Schwankungen auftreten können.

Abbildung 21.26: Gerade Polynomfunktionen



Quelle: Eigene Darstellung

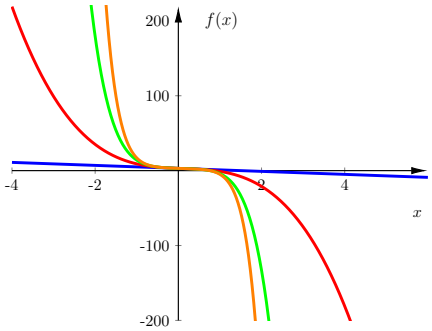
© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Sinngemäß gilt dies auch für Polynomfunktionen, deren Grad ungerade ist. Die Abbildung 21.27 zeigt beispielhaft 4 Funktionen mit den oben angegebenen Parametern für $a_0 \ldots a_8$. Für n gilt hier:

$n_1 = 1$ (blau);
$n_2 = 3$ (rot);
$n_3 = 5$ (grün);
$n_4 = 7$ (orange).

Abbildung 21.27:
Ungerade Polynomfunktionen



Quelle: Eigene Darstellung

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

21.2.5 Exponentialfunktionen

Eine **Exponentialfunktion** ist eine Abbildung der Form $f(x) = a^x$. Exponentialfunktionen werden oft zur Modellierung von Wachstum und Zerfall gebraucht.

Definition 21.5: Exponentialfunktion

Eine Exponentialfunktion f ist definiert als

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = y = a^x \tag{21.28}$$

Dabei ist a eine reelle Zahl mit $a > 0$.

Man kann jede Exponentialfunktion auf eine natürliche Exponentialfunktion zurückführen. Es gilt nämlich:

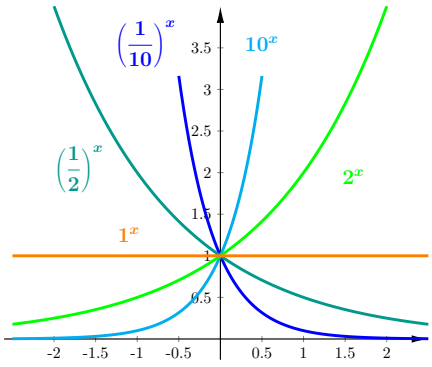
Satz 21.1: Rückführung auf e-Funktion

$$a^x = \mathrm{e}^{\ln(a^x)} = \mathrm{e}^{x \cdot \ln(a)} \tag{21.29}$$

Bezeichnungen:

- a ist die ***Basis***
- x ist der ***Exponent***
- $f(x)$ heißt auch ***Wachstumsfunktion***, falls a größer als 1 ist.
  Liegt a zwischen 0 und 1, wird $f(x)$ ***Zerfallsfunktion*** genannt.

Abbildung 21.28:
Exponentialfunktionen



Quelle: Eigene Darstellung

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Definierende Eigenschaft / Potenzgesetze

Satz 21.2: Definierende Eigenschaft der Exponentialfunktionen

Sei f eine Exponentialfunktion, dann gilt:

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \tag{21.30}$$

Diese Eigenschaft ist sogar **definierend**. Das heißt: Wenn man versucht, eine Funktion mit der obigen Eigenschaft zu konstruieren, würde man genau die Definition von Exponentialfunktionen bekommen.

Ausgehend von der Definition sieht man leicht, dass diese Eigenschaft aufgrund der Potenzgesetze gilt.

Analog gilt auch

Satz 21.3: Weitere Eigenschaft der Exponentialfunktion

Sei f eine Exponentialfunktion, dann gilt:

$$f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)} \tag{21.31}$$

Wertebereich

Exponentialfunktionen nehmen nur positive Werte an, d. h. $a^x > 0$ für alle x und alle $a > 0$.

Nullstellen

Exponentialfunktionen besitzen keine Nullstellen. Dies folgt direkt aus der Tatsache, dass sie einen positiven Wertebereich haben.

Asymptotisches Verhalten

Der Graph einer Exponentialfunktion nähert sich der x-Achse immer mehr an und hat diese somit als waagerechte Asymptote.

Monotonieverhalten

Das Monotonieverhalten einer Exponentialfunktion wird durch die Basis bestimmt.

- Für $0 < a < 1$ ist die Funktion streng monoton fallend;
- für $a = 1$ ist die Funktion konstant;
- für $a > 1$ ist sie streng monoton wachsend.

Insgesamt sind also alle Exponentialfunktionen stets monoton.

Umkehrfunktion

Die Umkehrfunktion einer Exponentialfunktion ist eine Logarithmusfunktion.

Für $f(x) = a^x$ ist die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \log_a x$.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

21.2.6 Trigonometrische Funktionen

Mit **trigonometrischen Funktionen** oder auch **Winkelfunktionen** (seltener: **Kreisfunktionen** oder **goniometrische Funktionen**) bezeichnet man rechnerische Zusammenhänge zwischen Winkel und Seitenverhältnissen (ursprünglich in rechtwinkligen Dreiecken).

Tabellen mit Verhältniswerten für bestimmte Winkel ermöglichen Berechnungen bei Vermessungsaufgaben, die Winkel und Seitenlängen in Dreiecken nutzen.

Die trigonometrischen Funktionen sind außerdem die grundlegenden Funktionen zur Beschreibung periodischer Vorgänge in den Naturwissenschaften und in der Technik.

21.2.6.1 Übersicht über die trigonometrischen Funktionen

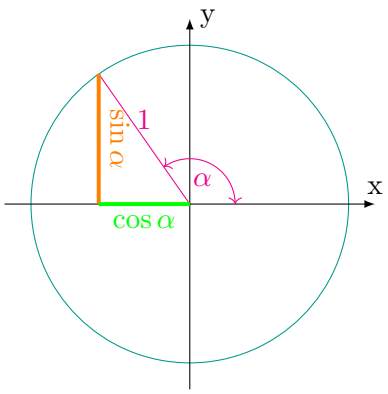
Die elementaren trigonometrischen Funktionen sind:

- die Sinusfunktion (abgekürzt: sin),
- die Kosinusfunktion (abgekürzt: cos),
- die Tangensfunktion (abgekürzt: tan oder tg),

sowie deren Kehrwerte

- Kosekansfunktion (Kehrwert des Sinus: csc),
- Sekansfunktion (Kehrwert des Kosinus: sec),
- Kotangensfunktion (Kehrwert der Tangens: cot).

Abbildung 21.29: Trigonometrische Funktionen 1



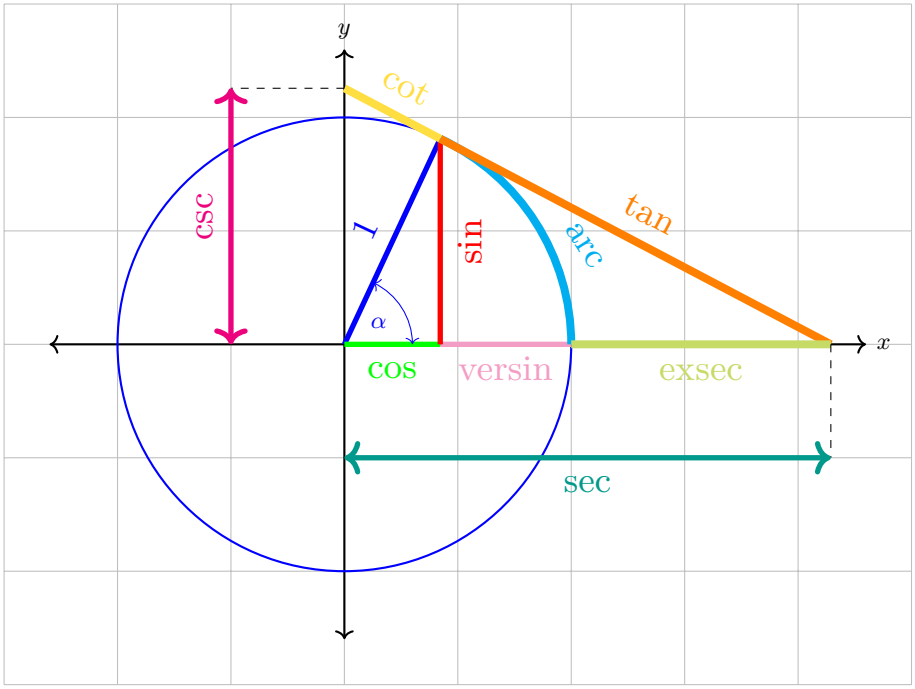
Quelle: Eigene Darstellung

Zwischen diesen Funktionen bestehen enge Zusammenhänge. Genau genommen würde bereits eine der Funktionen ausreichen, um beliebige trigonometrische Probleme lösen zu können.

Die Verwendung mehrerer verschiedener Funktionen ermöglicht jedoch eine Vereinfachung der Rechnungen und Formeln.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Abbildung 21.30: Trigonometrische Funktionen 2

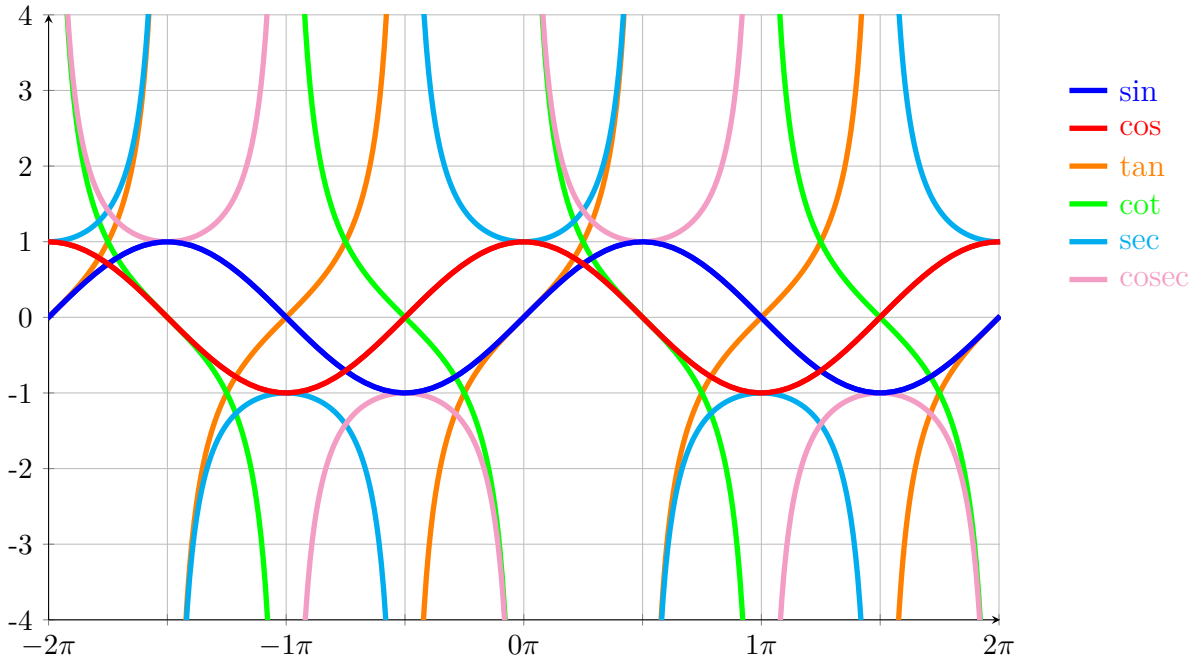


Quelle: Eigene Darstellung

Die Abbildung 21.31 zeigt die 6 grundlegenden Winkelfunktionen in einer Graphik.

Man erkennt, dass alle Funktionen mit π oder $2 \cdot \pi$ **periodisch** sind.

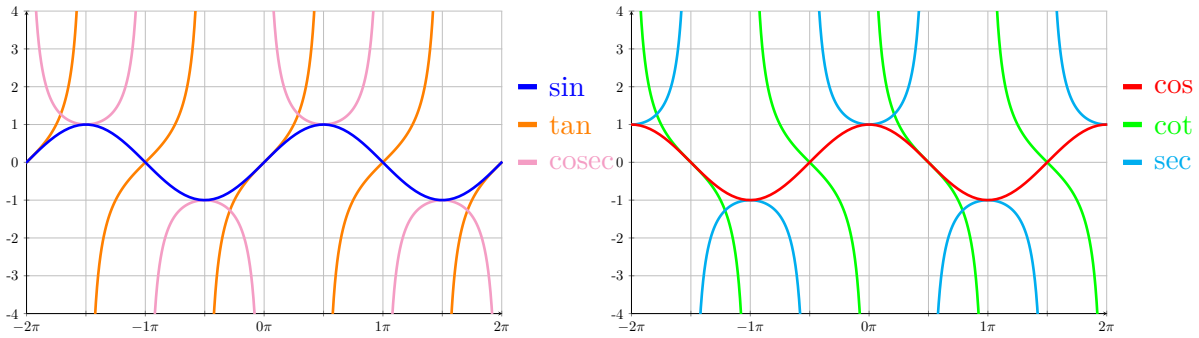
Abbildung 21.31: Div. trigonometrische Fkt.



© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Quelle: Eigene Darstellung



Quelle: Eigene Darstellung

21.2.6.2 Anwendung der trigonometrischen Funktionen

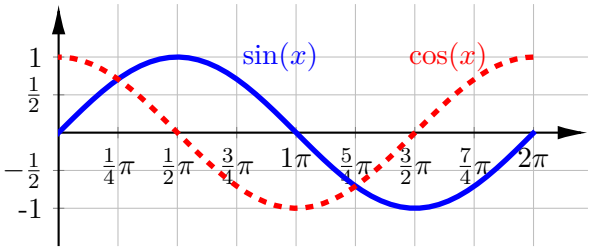
Hauptsächlich werden die trigonometrischen Funktionen im Vermessungswesen genutzt. Formeln zur Berechnung von Größen am Dreieck → Dreiecksgeometrie.

Weiterhin sind sie in der Analysis und bei vielen Anwendungen in Physik und Technik wichtig. Es besteht eine enge Beziehung zur Exponentialfunktion, die besonders bei Funktionen komplexer Zahlen und in der Taylorreihe der Funktionen sichtbar wird.

21.2.6.3 Sinus und Cosinus

Sinus und Kosinus werden unter anderem in der Geometrie für Dreiecksberechnungen in der ebenen und sphärischen Trigonometrie benötigt. Auch in der Analysis sind sie wichtig. Wellen wie Schallwellen, Wasserwellen und elektromagnetische Wellen lassen sich als aus Sinus- und Kosinuswellen zusammengesetzt beschreiben, sodass die Funktionen auch in der Physik als harmonische Schwingungen allgegenwärtig sind.

Abbildung 21.32: sin, cos



Quelle: Eigene Darstellung

Definition als Lösung einer Funktionalgleichung

Sinus und Kosinus kann als Lösung einer Funktionalgleichung definiert werden, die im Wesentlichen aus den **Additionstheoremen** besteht: Gesucht ist ein Paar stetiger Funktionen $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, das für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Gleichungen

$$\sin(x+y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y) \tag{21.32a}$$
$$\cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) + \sin(x) \cdot \sin(y) \tag{21.32b}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

erfüllt. Die Lösung sin definiert dann den Sinus, die Lösung cos den Kosinus. Um Eindeutigkeit zu erreichen, sind einige Zusatzbedingungen zu erfüllen. In Heuser, Lehrbuch der Analysis, Teil 1 wird zusätzlich gefordert, dass

- $\sin(x)$ eine ungerade Funktion,
- $\cos(x)$ eine gerade Funktion,
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, und
- $\cos(0) = 1$

ist. Bei diesem Zugang wird offensichtlich die Differenzierbarkeit des Sinus in 0 vorausgesetzt; π wird in weiterer Folge analytisch als das doppelte der kleinsten positiven Nullstelle des Kosinus definiert.

Verwendet man den Zugang von Leopold Vietoris[21.9] und berechnet die Ableitung des Sinus aus den Additionstheoremen, so ist es zweckmäßiger, π auf geeignete Weise analytisch (beispielsweise als Hälfte des Grenzwerts des Umfangs des dem Einheitskreis eingeschriebenen 2^n-Ecks) zu definieren und dann die Differenzierbarkeit der Lösung dieser Funktionalgleichung zu beweisen.

Als Zusatzbedingung zu den Additionstheoremen fordert man dann beispielsweise

- $\sin(\pi/2) = 1$,
- $\cos(\pi/2) = 0$, und
- $\cos(\pi/(2 \cdot n)) \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$.

Unter den gewählten Voraussetzungen ist die Eindeutigkeit der Lösung der Funktionalgleichung relativ einfach zu zeigen; die geometrisch definierten Funktionen Sinus und Kosinus lösen auch die Funktionalgleichung.

Die Existenz einer Lösung lässt sich analytisch beispielsweise durch die Taylorreihen von Sinus und Kosinus nachweisen.

[21.9] Leopold Vietoris (* 4. Juni 1891 in Bad Radkersburg, Steiermark; † 9. April 2002 in Innsbruck) war ein österreichischer Mathematiker und Supercentenarian – er starb im Alter von 110 Jahren und 10 Monaten. Er und seine Frau Maria Josefa Vincentia Vietoris, geb. Riccabona von Reichenfels (* 18. Juli 1901; † 24. März 2002) gehörten zu den ältesten Ehepaaren der Welt.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

21.2.6.4 Tangens und Cotangens

Periodizität

Periodenlänge π (halbe Drehung):

$$\tan(x+\pi) = \tan(x) \tag{21.33}$$

Monotonie

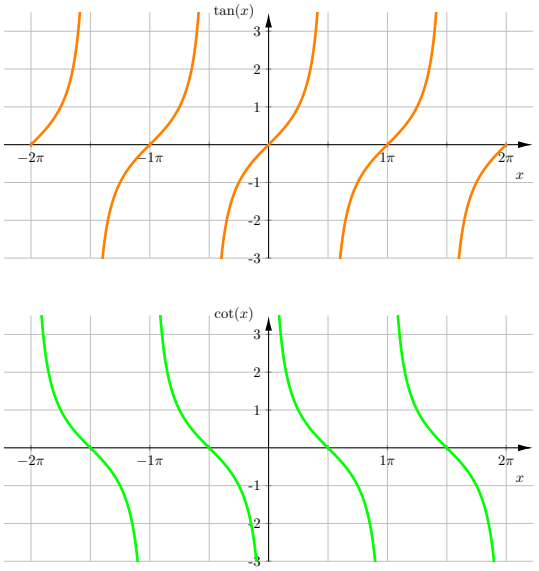
Tangens: Im jeweiligen Intervall streng monoton steigend.
Kotangens: Im jeweiligen Intervall streng monoton fallend.

Symmetrien

Punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung:

$$\tan(-x) = -\tan(x) \tag{21.34a}$$
$$\cot(-x) = -\cot(x) \tag{21.34b}$$

Abbildung 21.33: tan, cot



Quelle: Eigene Darstellung

Nullstellen

Tangens: $x_0 = n \cdot \pi; \quad n \in \mathbb{Z}$ (21.35a)

Cotangens: $x_0 = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi; \quad n \in \mathbb{Z}$ (21.35b)

Polstellen

Tangens: $x_p = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi; \quad n \in \mathbb{Z}$ (21.36a)

Cotangens: $x_p = n\pi; \quad n \in \mathbb{Z}$ (21.36b)

Wendestellen

Tangens: $x_w = n \cdot \pi; \quad n \in \mathbb{Z}$ (21.37a)

Cotangens: $x_w = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi; \quad n \in \mathbb{Z}$ (21.37b)

Sowohl die Tangensfunktion als auch die Kotangensfunktion haben Asymptoten, aber keine Sprungstellen oder Extrema.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

21.2.7 Goniometrische Gleichungen

Goniometrische Gleichungen sind Gleichungen, bei denen die gesuchte Unbekannte in Winkelfunktionen vorkommt. Zum Auflösen solcher Gleichungen benötigt man einige Tricks und Kenntnisse der grundlegenden Operationen mit trigonometrischen Funktionen.

Beispielhaft seien hier exemplarisch einige derartige Operationen aufgeführt:

Gegenseitige Darstellung:	$\sin(x)$	$= \sqrt{1-\cos^2(x)}$	(21.38a)
Additionstheoreme:	$\sin(x \pm y)$	$= \sin(x)\cdot\cos(y) \pm \cos(x)\cdot\sin(y)$	(21.38b)
Doppelwinkelformeln:	$\sin(2\cdot x)$	$= 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)$	(21.38c)
Halbwinkelformeln:	$\sin\left(\frac{x}{2}\right)$	$= \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$	(21.38d)
Produktformeln:	$\sin(x)\cdot\sin(y)$	$= \frac{1}{2}\cdot(\cos(x-y)-\cos(x+y))$	(21.38e)
...	...	...	

Sie finden in jeder guten Formelsammlung entsprechende, umfangreiche Tabellen - oder auch hier: https://de.wikipedia.org/wiki/Formelsammlung_Trigonometrie (zuletzt geprüft am 2025-07-31).

Mit Hilfe dieser Formeln lassen sich goniometrische Gleichungen lösen:

Beispiel 21.5: Goniometrische Gleichung

Aufgabe: Lösen Sie $\sin(2x) - \cos(x) = 0$ für x im Intervall $[0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned} \sin(2x) - \cos(x) &= 0 \\ \Rightarrow 2\sin(x)\cos(x) &= \cos(x) \\ \Rightarrow \cos(x)(2\sin(x) - 1) &= 0 \\ \Rightarrow \cos(x) = 0 \quad \text{oder} \quad \sin(x) &= \frac{1}{2} \\ \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} & \end{aligned}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

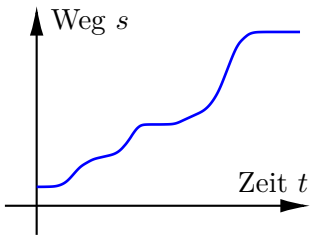
22 Grundzüge der Differentialrechnung

22.1 Einführung

Wir betrachten eine PKW-Fahrt durch eine Großstadt.

Phasen einer Fahrt mit konstantem Tempo wechseln sich ab mit Halts an roten Ampeln, Fahrten durch Tempo-30-Zonen, usw.

Im Ergebnis könnte z. B. ein Zeit-Weg-Profil wie rechts skizziert herauskommen.



Die Fahrt beginnt im Zeitpunkt t_1 beim Kilometerstand s_1; im Zeitpunkt t_2 sind wir am Ziel mit Kilometerstand s_2 angekommen.

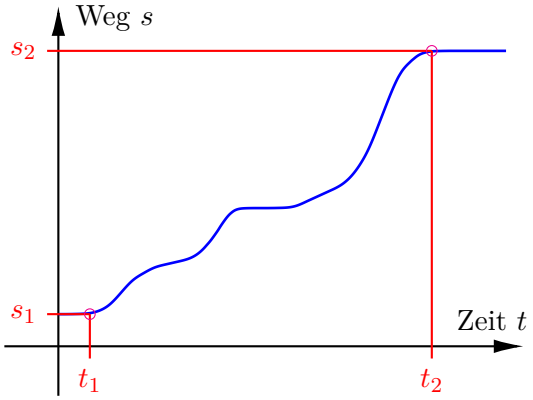
Wenn wir unsere durchschnittliche Geschwindigkeit wissen möchten, rechnen wir:

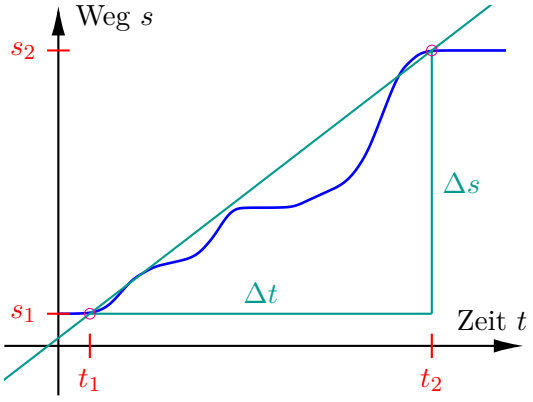
$$v_{\varnothing} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \tag{22.1}$$

Dies entspricht dem bekannten Steigungsdreieck: Wir legen durch den Start- und den Zielpunkt unseres Weg-Zeit-Profils eine Gerade und berechnen deren Steigung.

Wenn unsere Fahrt bsp. $\Delta t = 6\,\text{min}$ gedauert hat und $\Delta s = 5\,\text{km}$ lang war, betrug unsere Durchschnittsgeschwindigkeit:

$$v_{\varnothing} = \frac{5\,\text{km}}{6\,\text{min}} = 50\,\text{km}\,\text{h}^{-1} \tag{22.2}$$





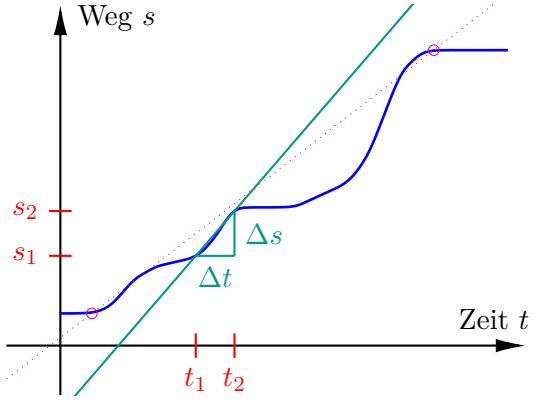
© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Auf den ersten Blick i. O. - kein Geschwindigkeitsverstoß.

Schaut man genauer hin, dann entdeckt man Abschnitte, in denen die lokale Durchschnittsgeschwindigkeit deutlich höher als die totale Durchschnittsgeschwindigkeit ist.

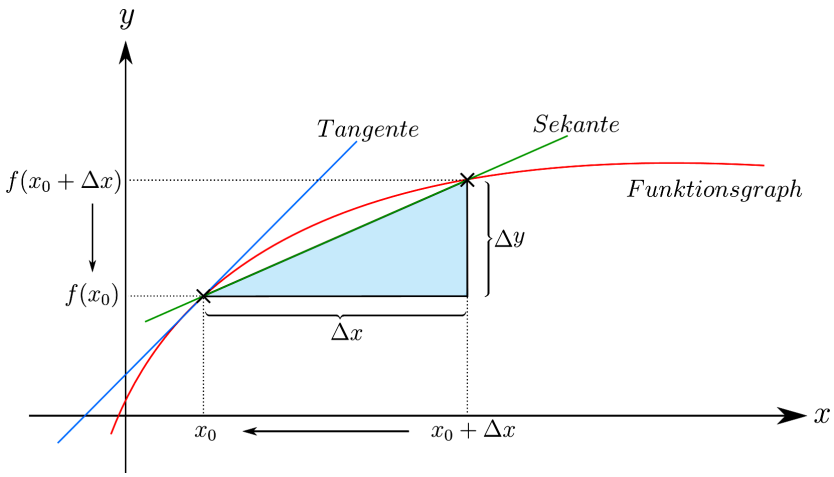
im Beispiel rechts äußert sich das dadurch, dass die Steigung der eingezeichneten Sekante größer ist, als die Steigung der „totalen Durchschnitt-Sekante“.



22.2 Differentialrechnung mit einer Variablen

Die erste Ableitung einer Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x_0 ist die Steigung der Funktion an dieser Stelle, also die Steigung der Tangente am Punkt $(x_0|f(x_0))$. Für die Berechnung dieser Steigung nähert man die Tangente durch eine Sekante an, also durch eine Gerade, welche durch die beiden Punkte $(x_0|f(x_0))$ und $(x_0 + \Delta x|f(x_0 + \Delta x))$ geht.

Abbildung 22.1: Zum Differenzenquotient



Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Differentialrechnung; Abruf am 2017-08-01.

Wenn man Δx gegen Null gehen lässt, wird diese Sekante immer mehr zur Tangente.

Man schreibt für den Grenzübergang $\Delta x \to 0$:

$$y' = f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x} := \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right)$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{22.3}$$

Beim Grenzübergang $\Delta x \to 0$ nähern sich natürlich sowohl Δy als auch Δx immer mehr der 0 an, ohne sie jemals zu erreichen. Man spricht deswegen auch von „infinitesimal kleinen“ Größen und deutet dies in der Formelschreibweise durch den Übergang des Differenzoperators Δ hin zum **Differentialoperator** d an[22.1].

[22.1] Gemäß der Regeln für die Formelschreibweise wird das d im Differential dx in Steilschrift geschrieben.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beispiel 22.1:

$$\begin{aligned} f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{(x^2 + 2 \cdot x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{(2 \cdot x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} (2 \cdot x + \Delta x) = 2 \cdot x \end{aligned} \tag{22.4}$$

Wenn man diesen Limes für einige Grundfunktionen ausrechnet, erhält man eine Tabelle von **Ableitungsfunktionen**:

Tabelle 22.1: Einige Ableitungsfunktionen

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$k \cdot x$	k	$\mathrm{e}^{k \cdot x}$	$k \cdot \mathrm{e}^{k \cdot x}$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	a^x	$a^x \cdot \ln(a)$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n \cdot (\sqrt[n]{x})^{n-1}}$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$2 \cdot \sqrt{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)} = -\left(1 + \cot^2(x)\right)$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{x^2+1}$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$	$\coth(x)$	$-\frac{1}{\sinh^2(x)} = 1 - \coth^2(x)$
$\operatorname{arsinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{artanh}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

22.3 Rechenregeln für das Differenzieren

Konstante Funktion $f(x) = a \;\rightarrow\; f'(x) = 0$

Faktorregel $\big(a \cdot f(x)\big)' = a \cdot f'(x)$

Summenregel $\big(g(x) \pm h(x)\big)' = g'(x) \pm h'(x)$

Produktregel $\big(g(x) \cdot h(x)\big)' = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

Quotientenregel $\left(\dfrac{g(x)}{h(x)}\right)' = \dfrac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h^2(x)}$

Daraus folgt die Reziprokenregel: $\left(\dfrac{1}{h(x)}\right)' = -\dfrac{h'(x)}{h^2(x)}$

Potenzregel $\big(x^n\big)' = n \cdot x^{n-1}$

Kettenregel
$$\big(g(x) \circ h(x)\big)' = \left(\underbrace{g\Big(\underbrace{(h(x)}_{\text{innere Funktion}}\Big)}_{\text{äußere Funktion}}\right)' = \underbrace{g'(h(x))}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{h'(x)}_{\text{innere Ableitung}}$$

Beispiel 22.2: Beispiel für die Kettenregel:

$$\big(\sin(2 \cdot x)\big)' = \underbrace{\cos(2 \cdot x)}_{\text{äußere Ableitung}} \underbrace{\cdot 2}_{\text{innere Ableitung}} \tag{22.5}$$

Beispiel 22.3:

Beispiel für die Kettenregel:

$$\left(\mathrm{e}^{(x^2)}\right)' = \underbrace{\mathrm{e}^{(x^2)}}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{2 \cdot x}_{\text{innere Ableitung}} \tag{22.6}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beispiel 22.4: Beispiel für die Quotientenregel:

$$\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)' = \frac{(\sin(x))' \cdot x - (\sin(x)) \cdot (x)'}{x^2} = \frac{x \cdot \cos(x) - \sin(x)}{x^2} \tag{22.7}$$

Beispiel 22.5: Beispiel für die zweifache Anwendung der Kettenregel:

$$\left(\cos\left(\mathrm{e}^{3\cdot x}\right)\right)' = -\sin\left(\mathrm{e}^{3\cdot x}\right) \cdot \left(\mathrm{e}^{3\cdot x}\right)' = -\sin\left(\mathrm{e}^{3\cdot x}\right) \cdot \mathrm{e}^{3\cdot x} \cdot 3 \tag{22.8}$$

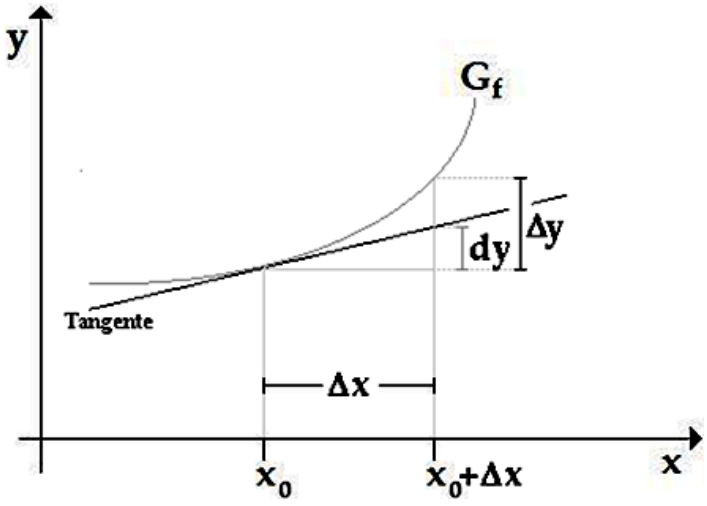
In der Nähe einer Stelle x_0 (also z. B. bei $x_0 + \Delta x$) kann die absolute Änderung der Funktionswerte Δy durch $\mathrm{d}y$ angenähert werden.

$\mathrm{d}y$ wird das **Differential** von f in x_0 genannt:

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x_0) \tag{22.9}$$

Damit kann man eine Näherungsformel für das Abschätzen eines Wertes angeben, der nahe an einem bekannten Wert liegt:

Abbildung 22.2: Zum Differenzial



Quelle: Scheitler, G. (2017)

$$f(x_0) = y_0 \Rightarrow f(x_0 + \mathrm{d}x) = y_0 + \mathrm{d}x \cdot f'(x_0) \tag{22.10}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beispiel 22.6: Anwendung des Differentials

$$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot x^2 \tag{22.11a}$$

Bekannt sei der Funktionswert $f(2) = 2^3 = 8$.
Dann ergibt sich für den Funktionswert $f(2{,}2)$ näherungsweise:

$$f(2{,}2) \approx f(2) + (2{,}2 - 2) \cdot 3 \cdot 2^2 \approx 8 + 0{,}2 \cdot 3 \cdot 4 \approx 8 + 2{,}4 \approx 10{,}4 \tag{22.11b}$$

Zum Vergleich der genaue, gerechnete Wert: $2{,}2^3 = 10{,}648$.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

22.3.1 Mehrfache Ableitungen

Wenn die Ableitungsfunktion selber auch wieder differenzierbar ist, kann man mehrfache Ableitungen definieren. Man schreibt dafür:

$$\ddot{y} = f''(x) = f^{(2)}(x) = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} \tag{22.12}$$

$$\dddot{y} = f'''(x) = f^{(3)}(x) = \frac{\mathrm{d}^3 f(x)}{\mathrm{d}x^3} \tag{22.13}$$

... und so weiter.

Beispiel 22.7:

$$f(x) = 4 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 5 \tag{22.14a}$$

$$f'(x) = 12 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 5 \tag{22.14b}$$

$$f''(x) = 24 \cdot x - 4 \tag{22.14c}$$

$$f'''(x) = 24 \tag{22.14d}$$

$$f^{(4)}(x) = 0 \tag{22.14e}$$

Diese Themen werden in der Mathematik-Vorlesung sehr intensiv vertieft.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

22.4 Mehrere Variablen

Hat man eine Funktion mehrerer Variablen, dann lassen sich nach jeder Variablen **partielle Ableitungen** berechnen. Dabei werden die Variablen, nach denen gerade nicht abgeleitet wird, als Konstanten betrachtet und die üblichen Ableitungsregeln angewendet.

Definition 22.1:

∂ ist der partielle Differential-Operator.

Er ersetzt bei der Ableitung partieller Funktionen den Differential-Operator d.

Beispiel 22.8:

$$f(x,y,z) = 3\cdot x^3\cdot z^2 + 5\cdot x\cdot y^2\cdot z + 7 \tag{22.15a}$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 9\cdot x^2\cdot z^2 + 5\cdot y^2 \qquad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = 10\cdot x\cdot y \qquad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 6\cdot x^3\cdot z + 5\cdot x\cdot y^2 \tag{22.15b}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} = 18\cdot x\cdot z^2 \qquad \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2} = 10\cdot x \qquad \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2} = 6\cdot x^3 \tag{22.15c}$$

$$\frac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x^3} = 18\cdot z^2 \qquad \frac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial y^3} = 0 \qquad \frac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial z^3} = 0 \tag{22.15d}$$

$$\frac{\partial^4 f(x,y,z)}{\partial x^4} = 0 \qquad \frac{\partial^4 f(x,y,z)}{\partial y^4} = 0 \qquad \frac{\partial^4 f(x,y,z)}{\partial z^4} = 0 \tag{22.15e}$$

Diese Themen werden in der Mathematik-Vorlesung sehr intensiv vertieft.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

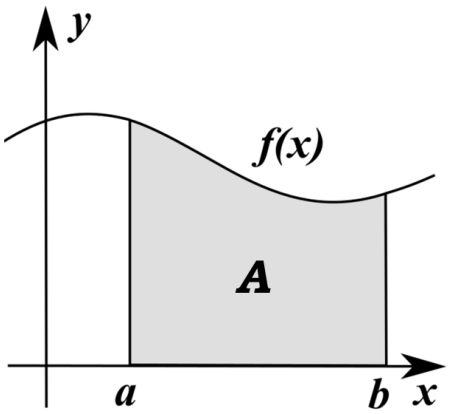
23 Grundzüge der Integralrechnung

23.1 Einfach-Integrale

Um die Fläche A zwischen dem Graphen einer Funktion $f(x)$ und der Abszisse (x-Achse) im Intervall $[a\ b]$ berechnen zu können, benötigt man Integrale.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, um sich dem Integralbegriff mathematisch korrekt zu nähern. Besonders anschaulich ist die Vorgehensweise nach Riemann[23.1]. Dabei wird die Fläche durch eine Treppenfunktion mit konstanter Treppenbreite angenähert. Hierbei hat man eine obere (orange plus lila) und eine untere (nur orange) Treppenfunktion, abhängig davon, ob man den Funktionswert am Anfang oder am Ende der Treppenstufe her nimmt.

Abbildung 23.1: Fläche unter einer Funktion

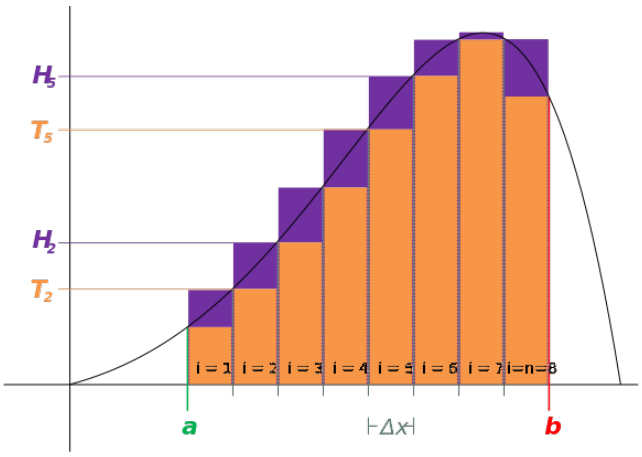


Quelle:
http://calculointegral15.blogspot.de;
abgerufen am 2017-08-01

Die gesuchte Fläche liegt offensichtlich zwischen der Fläche der unteren (orange) und der Fläche der oberen (orange + lila) Treppenfunktion. Die Fläche der Treppenfunktion lässt sich einfach durch Addition der Fläche der einzelnen Treppenstufen approximieren (Höhe mal Breite).

Wenn n die Anzahl der Treppenstufen ist, dann ist $\frac{b-a}{n}$ die Breite einer Treppenstufe. Damit erhält man für die Höhe der Treppenstufen den Ausdruck:

Abbildung 23.2: Zum Integralbegriff nach Riemann



Quelle:
https://de.wikipedia.org/wiki/Riemannsches_Integral;
abgerufen am 2017-08-01

[23.1] Georg Friedrich Bernhard Riemann (* 17. September 1826 in Breselenz bei Dannenberg (Elbe); † 20. Juli 1866 in Selasca bei Verbania am Lago Maggiore) war ein deutscher Mathematiker, der trotz seines relativ kurzen Lebens auf vielen Gebieten der Analysis, Differentialgeometrie, mathematischen Physik und der analytischen Zahlentheorie bahnbrechend wirkte. Er gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Für die i-te obere Treppenstufe:

$$h_{i\ \text{oben}} = f\left(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right) \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \tag{23.1a}$$

Für die i-te untere Treppenstufe:

$$h_{i\ \text{unten}} = f\left(a + (i-1) \cdot \frac{b-a}{n}\right) \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{23.1b}$$

Damit erhält man für die Fläche der beiden Treppen:

Für die obere Treppe (orange + lila):

$$A_{\text{oben}} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{b-a}{n} \cdot f\left(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right)\right) \tag{23.2a}$$

Für die untere Treppe (orange):

$$A_{\text{unten}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b-a}{n} \cdot f\left(a + (i-1) \cdot \frac{b-a}{n}\right)\right) \tag{23.2b}$$

Wenn man jetzt n erhöht, dann werden die Treppenstufen immer mehr, dafür schmaler und niedriger, und man nähert sich der tatsächlichen Fläche A „von oben“ bzw. „von unten“ immer mehr an.

Lässt man nun im Gedanken n gegen Unendlich laufen, dann verschwindet der Unterschied zwischen der unteren und der oberen Treppe, und man erhält den exakten Wert für die Fläche A.

Riemann hat gezeigt, dass die Werte der Flächen der unteren und der oberen Treppenfunktion bei diesem Übergang $n \to \infty$ für **integrierbare Funktionen** identisch gleich sind. Für diesen Grenzübergang definiert man das Integralzeichen $\int$ und schreibt:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}x &:= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{b-a}{n} \cdot f\left(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b-a}{n} \cdot f\left(a + (i-1) \cdot \frac{b-a}{n}\right)\right)\end{aligned} \tag{23.3}$$

Das Integralzeichen $\int$ symbolisiert also eine unendliche Summe, und das Differential $\mathrm{d}x$[23.2] symbolisiert die Breite einer Treppenstufe. Diese geht mit $n \to \infty$ gegen Null, ohne die Null jemals zu erreichen. Man sagt dazu, die Breite sei „infinitesimal schmal“.

Leibniz[23.3] formulierte den **Fundamentalsatz der Analysis**:

[23.2] Gemäß der Regeln für die Formelschreibweise wird das d im Differential $\mathrm{d}x$ in Steilschrift geschrieben

[23.3] Gottfried Wilhelm Leibniz (* 21. Juni (jul.)/ 1. Juli 1646 (greg.) in Leipzig; † 14. November 1716 in Hannover) war ein deutscher Philosoph, Mathematiker, Diplomat, Historiker und politischer Berater der frühen Aufklärung. Er gilt als der universale Geist seiner Zeit und war einer der bedeutendsten Philosophen des ausgehenden 17. und beginnenden 18. Jahrhunderts sowie einer der wichtigsten Vordenker der Aufklärung.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Regel 23.1: Fundamentalsatz der Analysis

Differenzieren und Integrieren sind zueinander inverse Operationen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\cdot\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\cdot\mathrm{d}x = f(x) \tag{23.4}$$

Allerdings ist die Integration (anders als die Differentiation) keine eindeutige mathematische Operation. Gemäß des Fundamentalsatzes der Analysis kann bei einem **unbestimmten Integral** (ohne Angabe der Grenzen (a, b)) eine beliebige Konstante C addiert werden.

Beispiel 23.1: Beispiel

$$(2\cdot x+5)' = (2\cdot x+10)' = (2\cdot x+C)' = 2 \Rightarrow \int 2\cdot\mathrm{d}x = 2\cdot x + C \quad \text{mit } C\in\mathbb{R} \tag{23.5}$$

Man schreibt:

$$F(x) = \int f(x)\cdot\mathrm{d}x + C \tag{23.6}$$

... und tabelliert in Integraltafeln nur die **Integralfunktion** $F(x)$ mit der Konstante $C = 0$; diese Funktion nennt man **Stammfunktion**.

Hier eine kleine Tabelle von Stammfunktionen:

Tabelle 23.1: Einige Stammfunktionen

$f(x)$	$F(x) = \int f(x)\cdot\mathrm{d}x$	$f(x)$	$F(x) = \int f(x)\cdot\mathrm{d}x$
k	$k\cdot x$	$\mathrm{e}^{k\cdot x}$	$\frac{1}{k}\cdot\mathrm{e}^{k\cdot x}$
x^n	$\frac{1}{n-1}\cdot x^{n+1}$	a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x\cdot\ln(a)}$	$\log_a(x)$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1}\cdot(\sqrt[n]{x})^{n+1}$ (für $n\neq -1$)	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}$	$\cos(x)$	$\sin(x)$

Weitere Beispiele erhält man, wenn man die weiter oben stehende Tabelle der Ableitungsfunktionen von rechts nach links liest.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

23.2 Rechenregeln für das Integrieren

Regel 23.2: 1. Integrieren ist eine lineare mathematische Operation

Für alle $f, g : D \to \mathbb{R}$ und konstante $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int (a \cdot f(x) \pm b \cdot g(x)) \cdot \mathrm{d}x = a \cdot \int f(x) \cdot \mathrm{d}x \pm b \cdot \int g(x) \cdot \mathrm{d}x \tag{23.7}$$

Hierfür schreibt man in Formelsammlungen auch kürzer:

$$\int (a \cdot f \pm b \cdot g) = a \cdot \int f \pm b \cdot \int g \tag{23.8}$$

→ Man integriert eine Summe gliedweise; konstante Faktoren dürfen vor das Integralzeichen gezogen werden.

Regel 23.3: 2. Regeln für die Integrationsgrenzen

$$\int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a) \tag{23.9}$$

$$\int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}x = \int_a^c f(x) \cdot \mathrm{d}x + \int_c^b f(x) \cdot \mathrm{d}x \tag{23.10}$$

$$\int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}x = -\int_b^a f(x) \cdot \mathrm{d}x \tag{23.11}$$

$$\int_a^a f(x) \cdot \mathrm{d}x = 0 \tag{23.12}$$

Beispiel 23.2: Elementares Integrieren

$$\int_3^5 (4 \cdot x + 3 \cdot x^2) \cdot \mathrm{d}x = \int_3^5 4 \cdot x \cdot \mathrm{d}x + \int_3^5 3 \cdot x^2 \cdot \mathrm{d}x \tag{23.13a}$$

$$= 4 \cdot \int_3^5 x \cdot \mathrm{d}x + 3 \cdot \int_3^5 x^2 \cdot \mathrm{d}x \tag{23.13b}$$

$$= 4 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_3^5 + 3 \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_3^5 = 2 \cdot x^2\Big|_3^5 + x^3\Big|_3^5 \tag{23.13c}$$

$$= 2 \cdot (5^2 - 3^2) + 5^3 - 3^3 = 50 - 18 + 125 - 27 = 130 \tag{23.13d}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

23.2.1 Tricks beim Integrieren

Integrieren mit Hilfe der Substitutionsmethode

Regel 23.4: Substitutionsregel

Wenn man beide Seiten der Kettenregel des Differenzierens integriert (das ist eine Äquivalenzumformung!) und etwas umformt, erhält man die **Substitutionsregel**:

$$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \qquad \text{(Kettenregel)} \quad (23.14a)$$

$$\Leftrightarrow \int \Big(f\big(g(x)\big)\Big)' \cdot \mathrm{d}x = \int f'(g(x)) \cdot g'(x) \cdot \mathrm{d}x \qquad \text{(Hauptsatz, } \rightleftarrows\text{)} \quad (23.14b)$$

$$\Leftrightarrow \int f'(g(x)) \cdot g'(x) \cdot \mathrm{d}x = f(g(x)) + C \qquad (23.14c)$$

Man substituiert (ersetzt):

$$u = g(x) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g'(x) \Leftrightarrow \mathrm{d}u = g'(x) \cdot \mathrm{d}x \qquad (23.14d)$$

$$\Rightarrow \int f'(g(x)) \cdot g'(x) \cdot \mathrm{d}x = \int f(u) \cdot \mathrm{d}u \qquad (23.14e)$$

Damit haben wir anstatt der Funktionsverkettung nur noch ein einfaches Integral zu lösen. Man muß allerdings die Integrationsgrenzen ebenfalls substituieren; tut man das, erhält man final die **Substitutionsregel:**

$$\int_a^b f\big(g\,(x)\big) \cdot g'\,(x) \cdot \mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \cdot \mathrm{d}u \qquad (23.14f)$$

Die Anwendung dieser Regel erfordert allerdings ein wenig Erfahrung. Man muß „sehen“, wie man geschickterweise so substituiert, daß sich eine signifikante Vereinfachung der Rechnung ergibt. Das erreicht man nur durch Üben, Üben, Üben ...

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Beispiel 23.3:

$$\int \sqrt{4 \cdot x + 5} \cdot \mathrm{d}x = ? \tag{23.15a}$$

Substitution:

$$u = 4 \cdot x + 5 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 4 \Leftrightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{4} \tag{23.15b}$$

Einsetzen der Substitution:

$$\int \sqrt{4 \cdot x + 5} \cdot \mathrm{d}x \to \int u^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{4} = \frac{1}{4} \cdot \int u^{\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{d}u = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{6} \cdot u^{\frac{3}{2}} + C \tag{23.15c}$$

Die gesuchte Stammfunktion ergibt sich jetzt durch **Rücksubstitution**:

$$\int \sqrt{4 \cdot x + 5} \cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{6} \cdot (4 \cdot x + 5)^{\frac{3}{2}} + C \tag{23.15d}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

Partielles Integrieren

Regel 23.5: Partielles Integrieren

Man geht von der Produktregel des Differenzierens aus: Beide Seiten werden integriert und umgeformt.

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \Leftrightarrow \int (u \cdot v)' = \int u' \cdot v + \int u \cdot v'$$
$$\Leftrightarrow u \cdot v = \int u' \cdot v + \int u \cdot v' \tag{23.16a}$$

Eine letzte Äquivalenzumformung führt auf die Regel für das partielle Integrieren:

$$\Leftrightarrow \int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v \tag{23.16b}$$

Die Anwendung dieser Regel erfordert ebenfalls ein wenig Erfahrung. Man muß „sehen“, wie man u und v' so zuordnet, daß sich eine signifikante Vereinfachung der Rechnung ergibt (wenn man es falsch herum macht, wird die Berechnung sehr viel komplizierter statt einfacher!). Auch das erreicht man nur durch Üben, Üben, Üben ...

Beispiel 23.4:

$$\int x \cdot \cos(x) \cdot \mathrm{d}x = ? \tag{23.17a}$$

Man wählt hier zweckmäßig $u = x$; $v' = \cos(x)$ und erhält somit $u' = 1$ und $v = \sin(x)$. Einsetzen:

$$\int x \cdot \cos(x) \cdot \mathrm{d}x = x \cdot \sin(x) - \int 1 \cdot \sin(x) \cdot \mathrm{d}x = x \cdot \sin(x) + \cos(x) + C \tag{23.17b}$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

23.3 Mehrfach-Integrale

Mehrfachintegrale kommen vor allem in der analytischen Geometrie (Differentialgeometrie) und in der theoretischen Elektrotechnik häufig vor.

Beispielsweise kann man sich bei Kenntnis der Grundlagen recht einfach die Formeln für Flächen oder Rauminhalte herleiten. Dabei werden Mehrfachintegrale schrittweise „von innen nach außen“ aufgelöst.

Beispiel 23.5: Flächeninhalt eines Kreises

Gegeben sei ein Kreis mit dem Radius R. Wir rechnen in Polarkoordinaten (r, φ). Das infinitesimale Flächenelement in Polarkoordinaten ist $\mathrm{d}A = r \cdot \mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}\varphi$. Damit ergibt sich der Flächeninhalt des Kreises zu

$$\begin{aligned} A_{\text{Kreis}} &= \int_0^{2\cdot\pi} \cdot \int_0^{R} r \cdot \mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\cdot\pi} \left(\frac{r^2}{2} \Big|_0^R \right) \cdot \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\cdot\pi} \frac{R^2}{2} \cdot \mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{R^2}{2} \cdot \int_0^{2\cdot\pi} \mathrm{d}\varphi = \frac{R^2}{2} \cdot \varphi \Big|_0^{2\cdot\pi} = \frac{R^2}{2} \cdot (2 \cdot \pi - 0) = R^2 \cdot \pi \end{aligned} \tag{23.18}$$

Beispiel 23.6: Volumen eines Zylinders

Gegeben sei ein Zylinder mit dem Durchmesser D und der Länge bzw. Höhe L. Wir rechnen in Zylinderkoordinaten (ϱ, ϑ, z). Das infinitesimale Volumenelement in Zylinderkoordinaten ist $\mathrm{d}V = \varrho \cdot \mathrm{d}\varrho \cdot \mathrm{d}\vartheta \cdot \mathrm{d}z$. Damit ergibt sich das Volumen des Zylinders zu[23.4]

$$\begin{aligned} V_{\text{Zylinder}} &= \int_0^{L} \int_0^{2\cdot\pi} \int_0^{\frac{D}{2}} \varrho \cdot \mathrm{d}\varrho \cdot \mathrm{d}\vartheta \cdot \mathrm{d}z = \int_0^{L} \int_0^{2\cdot\pi} \left(\frac{\varrho^2}{2} \Big|_0^{\frac{D^2}{2}} \right) \cdot \mathrm{d}\vartheta \cdot \mathrm{d}z \\ &= \int_0^{L} \int_0^{2\cdot\pi} \left(\frac{D^2}{8} \right) \cdot \mathrm{d}\vartheta \cdot \mathrm{d}z = \frac{D^2}{8} \cdot \int_0^{L} \int_0^{2\cdot\pi} \mathrm{d}\vartheta \cdot \mathrm{d}z = \frac{D^2}{8} \cdot \int_0^{L} \left(|_0^{2\cdot\pi} \right) \cdot \mathrm{d}z \\ &= \frac{D^2}{8} \cdot \int_0^{L} 2 \cdot \pi \cdot \mathrm{d}z = \frac{D^2 \cdot \pi}{4} \cdot \int_0^{L} \mathrm{d}z = \frac{D^2 \cdot \pi}{4} \cdot z|_0^L = \frac{D^2 \cdot \pi \cdot L}{4} \end{aligned} \tag{23.19}$$

[23.4] Wir lassen hier die Integration längs der Radialkomponente ϱ von 0 bis $\frac{D}{2}$ und die Integration längs der Polkomponente ϑ von 0 bis $2 \cdot \pi$ laufen. Alternativ kann man natürlich auch ϱ von 0 bis D und ϑ von 0 bis π integrieren, was dasselbe Ergebnis liefert.

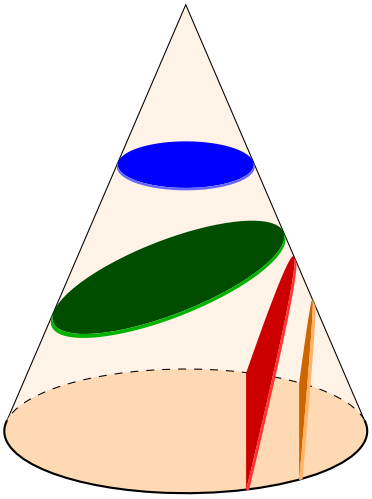
© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

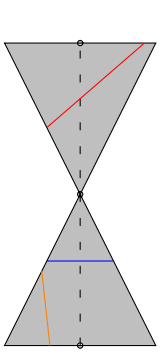
24 Kegelschnitte

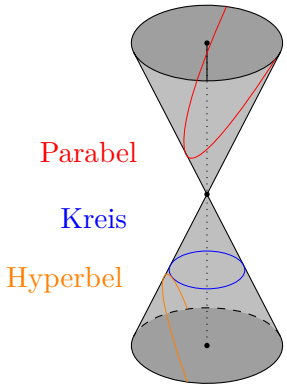
24.1 Ebene Kurven 2. Ordnung

Die ***Kegelschnitte*** sind Kurven 2. Ordnung.



- **Kreis**
- **Ellipse**
- **Parabel**
- **Hyperbel**





Ein Kegelschnitt lässt sich allgemein durch eine ***algebraische Gleichung zweiten Grades*** beschreiben:

$$a \cdot x'^2 + b \cdot x' \cdot y' + c \cdot y'^2 + d \cdot x' + e \cdot y' + f = 0 \tag{24.1}$$

Das gemischte Glied $b \cdot x' \cdot y'$ verkompliziert die weitere Berechnung; man besetigt es (falls vorhanden, d. h. $b \neq 0$) durch eine Dreh-Transformation.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \cdot \cos\alpha - y' \cdot \sin\alpha \\ x' \cdot \sin\alpha - y' \cdot \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ mit } \tan(2 \cdot \alpha) = \frac{b}{a - c} \tag{24.2}$$

und erhält die übliche Form

$$A \cdot x^2 + B \cdot y^2 + C \cdot x + D \cdot y + E = 0 \tag{24.3}$$

Fälle:

1. A = B → Kreis
2. A ≠ B und A · B > 0 → Ellipse
3. A · B < 0 → Hyperbel
4. A = 0 und B ≠ 0 B = 0 A ≠ 0 → Parabel
5. A ≠ 0 und B < 0 und C = D = E = 0 → Sich schneidendes Geradenpaar
6. A ≠ 0 und B = C = D = E = F = 0 → Gerade

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

7. A $\neq 0$ und B $> 0 \rightarrow$ Punkt

24.1.1 Kreis

Definition 24.1: Kreis

Der ***Kreis*** ist die Menge aller Punkte, die einen festen Abstand r von einem gegebenem Punkt $M = (x_M \,|\, y_M)^T$ haben.

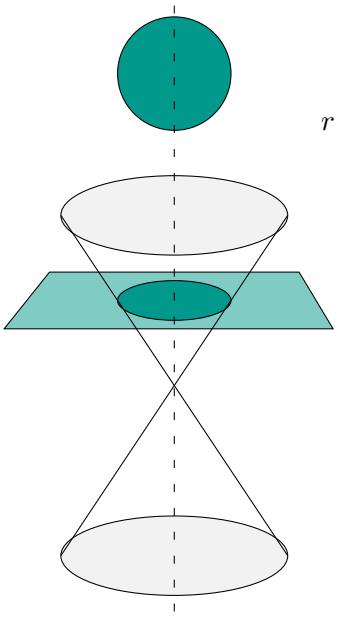
Hauptform:

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2 \tag{24.4a}$$

Parameterdarstellung:

$$\gamma(t) = \left(r \cdot \cos(t) + x_m, r \cdot \sin(t) + y_m\right)^T \tag{24.4b}$$

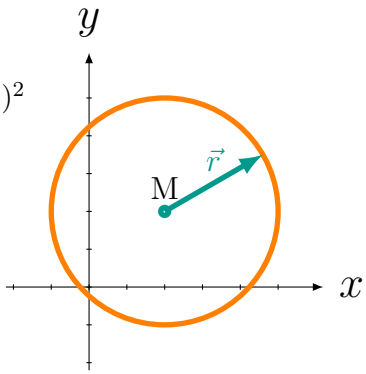
https://mathepedia.de/Kreis.html



$$r = \sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2} \Rightarrow r^2 = (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 \tag{24.5}$$

Beispiel: r=3

$3^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2$



Analytische Darstellung des Kreises im $\mathbb{R}^2$:

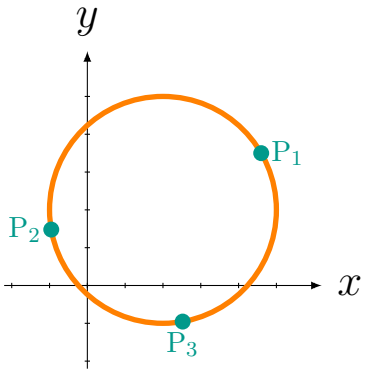
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1M} \\ x_{2M} \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{Im Beispiel} \\ r = 3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \tag{24.6}$$

Drei-Punkte-Form des Kreises im $\mathbb{R}^2$:

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

$$r^2 = (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 \Leftrightarrow \tag{24.7}$$
$$r^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot x_M + x_M^2 + y^2 - 2 \cdot y \cdot y_M + y_M^2 \Leftrightarrow$$
$$\underbrace{x_M^2 + y_M^2 - r^2}_{A} \underbrace{-2 \cdot x_M \cdot x}_{-B \cdot x} \underbrace{-2 \cdot y_M \cdot y}_{-C \cdot y} = -(x^2 + y^2)$$



Die Substitutionen

$$A = x_M^2 + y_M^2 - r^2; \quad B = 2 \cdot x_M; \quad C = 2 \cdot y_M \tag{24.8}$$
$$\Rightarrow r = \sqrt{(x_M^2 + y_M^2 - A}; \quad x_M = \frac{B}{2}; \quad y_M = \frac{C}{2}$$

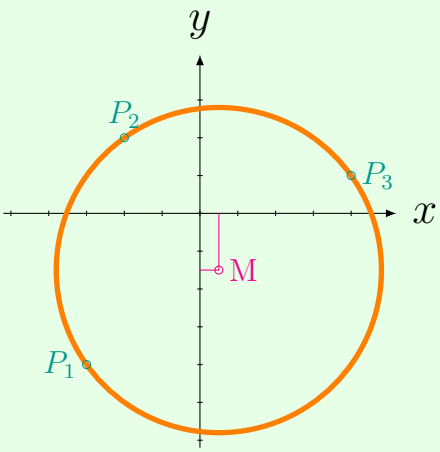
helfen dabei, den Überblick zu erhalten. Mit den Koordinaten $(x_1 \,|\, y_1)$, $(x_2 \,|\, y_2)$ und $(x_3 \,|\, y_3)$ der drei gegebenen Punkte P_1, P_2 und P_3 erhalten wir ein LGS in den drei Unbekannten A, B, und C:

$$A - x_1 \cdot B - y_1 \cdot C = -(x_1^2 + y_1^2) \tag{24.9}$$
$$A - x_2 \cdot B - y_2 \cdot C = -(x_2^2 + y_2^2) \tag{24.10}$$
$$A - x_3 \cdot B - y_3 \cdot C = -(x_3^2 + y_3^2) \tag{24.11}$$

Den gesuchten Mittelpunkt und Radius erhält man durch Rücksubstitution und Ausrechnen.

Beispiel

Gesucht ist die Parameterdarstellung des ebenen Kreises, der durch die drei Punkte $P_1(-3 \,|\, -4), P_2(-2 \,|\, 2)$ und $P_3(4 \,|\, 1)$ geht.



Lösung

$$A - (-3) \cdot B - (-4) \cdot C = -((-3)^2 + (-4)^2)$$
$$A - (-2) \cdot B - 2 \cdot C = -((-2)^2 + 2^2)$$
$$A - 4 \cdot B - 1 \cdot C = -(4^2 + 1^2)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & -25 \\ 1 & 2 & -2 & -8 \\ 1 & -4 & -1 & -17 \end{array}\right)$$

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & -25 \\ 0 & -1 & -6 & 17 \\ 0 & -7 & -5 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -14 & 26 \\ 0 & -1 & -6 & -17 \\ 0 & 0 & 37 & -111 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

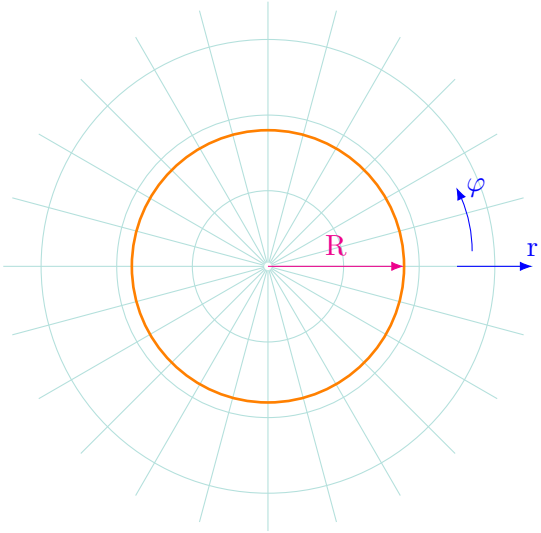
Rücksubstitution:
$$x_M = \frac{B}{2} = 0{,}5$$
$$y_M = \frac{C}{2} = -1{,}5$$

$r = \sqrt{0{,}5^2 + (-1{,}5)^2 - (-16)} = \sqrt{18{,}5} \approx 4{,}301$

Kreis in Polarkoordinaten

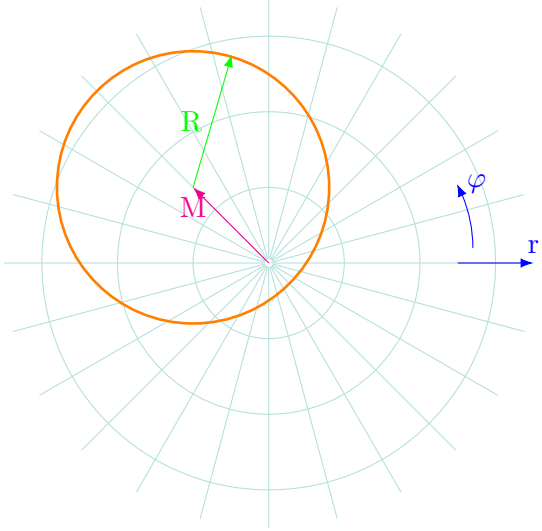
Kreis um den Nullpunkt:

$r = R$ (exakter: $r_\varphi = R$)



Verschobener Nullpunkt (Nullpunktkoordinaten kartesisch)

$r_\varphi = x_M \cdot \cos\varphi + y_M \cdot \sin\varphi + \sqrt{R^2 - (x_M \cdot \cos\varphi)^2}$



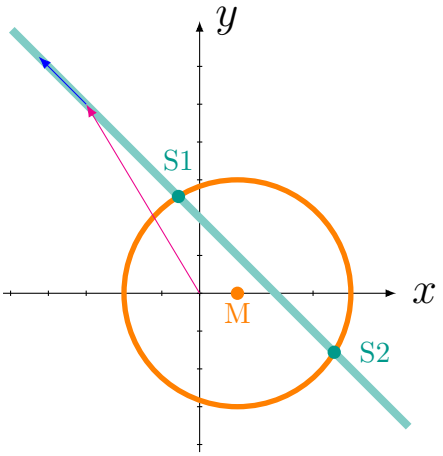
→ Dies ist ein Beispiel dafür, dass man stets zuerst ein geeignetes Bezugssystem auswählen sollte!

Schnittpunkt(e) Kreis / Gerade

Beispiel: Man bestimme (falls vorhanden) den / die Schnittpunkte des Kreises K mit der Geraden g.

$$K: \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix} \quad g: \begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \qquad (24.12)$$

$$K \cap g: \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \qquad (24.13)$$



© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

$$\Rightarrow \begin{matrix} 3\cdot\cos\varphi - \lambda = -4 \\ 3\cdot\sin\varphi + \lambda = 5 \end{matrix} \Rightarrow \cos\varphi + \sin\varphi = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \cos\varphi = \frac{1}{3} - \sin\varphi$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi = \left(\frac{1}{3} - \sin\varphi\right)^2 \Leftrightarrow 1 - \sin^2\varphi = \frac{1}{9} - \frac{2}{3}\cdot\sin\varphi + \sin^2\varphi$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot\sin^2\varphi - \frac{2}{3}\cdot\sin\varphi - \frac{8}{9} = 0 \Rightarrow \sin\varphi = \frac{\frac{2}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4\cdot 2\cdot\left(-\frac{8}{9}\right)}}{2\cdot 2} = \frac{\frac{2\pm\sqrt{68}}{3}}{4} = \frac{1\pm\sqrt{17}}{6}$$

Ausrechnen ergibt: $\varphi_1 \approx 0{,}853\,85$ und $\varphi_2 \approx -0{,}520\,52$.

Damit:

$$S_1 \approx \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix}\cos\left(\arcsin(0{,}853\,85)\right)\\ 0{,}853\,85\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}1-3\cdot 0{,}853\,85\\ 3\cdot 0{,}853\,85\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}0{,}56\\2{,}56\end{pmatrix}$$

$$S_2 \approx \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix}\cos\left(\arcsin(-0{,}520\,52)\right)\\ -0{,}520\,52\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}1-3\cdot 0{,}853\,85\\ -3\cdot -0{,}520\,52\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}3{,}56\\-1{,}56\end{pmatrix}$$

24.1.2 Ellipse

Definition 24.2: Ellipse

Die ***Ellipse*** ist die Menge aller Punkte, die zu zwei vorgegebenen Punkten F_1 und F_2 (genannt ***Brennpunkte***) einen festen Abstand $2\cdot a$ haben.

Hauptform:

$$\frac{(x-x_M)^2}{a^2} + \frac{(y-y_M)^2}{b^2} = 1 \tag{24.14a}$$

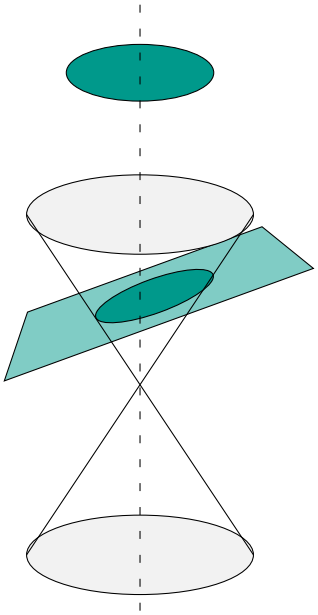
Parameterdarstellung:

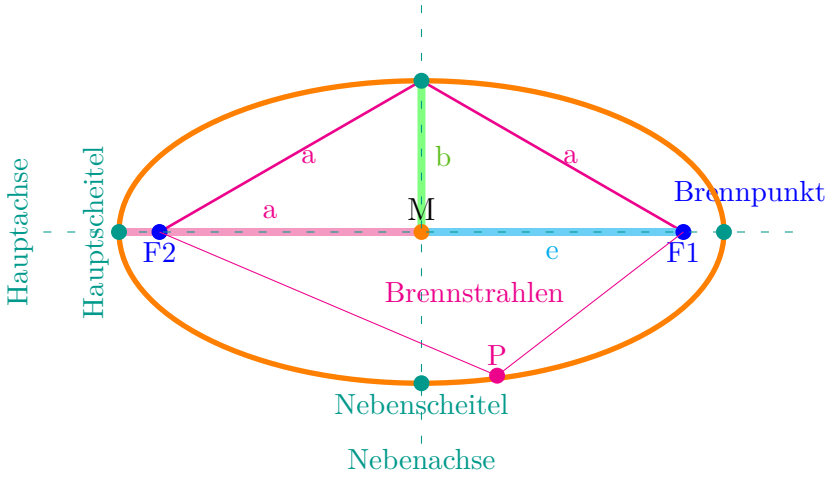
$$\gamma(t) = \left(a\cdot\cos(t) + x_m, b\cdot\sin(t) + y_m\right)^T \tag{24.14b}$$

https://mathepedia.de/Ellipse.html

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.





Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich:

$A = b^2; \quad B = a^2; \quad C = -2 \cdot b^2 \cdot x_0; \quad D = -2 \cdot a^2 \cdot y_0; \quad E = b^2 \cdot x_0 + a^2 \cdot y_0 - a^2 - b^2;$

24.1.3 Parabel

Definition 24.3: Parabel

Die ***Parabel*** ist diejenige Menge von Punkten, die
zu einer Linie und einem Punkt den gleichen Abstand haben.

Hauptform:

$$(y - y_s)^2 = \begin{cases} 2 \cdot p \cdot (x - x_s)^2 & \text{für } x \geq x_s \quad \text{Öffnung nach rechts} \\ -2 \cdot p \cdot (x - x_s)^2 & \text{für } x \leq x_s \quad \text{Öffnung nach links} \end{cases} \tag{24.15a}$$

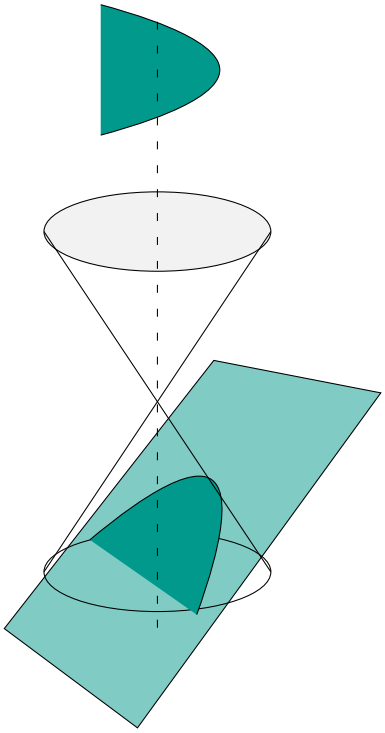
Parameterdarstellung:

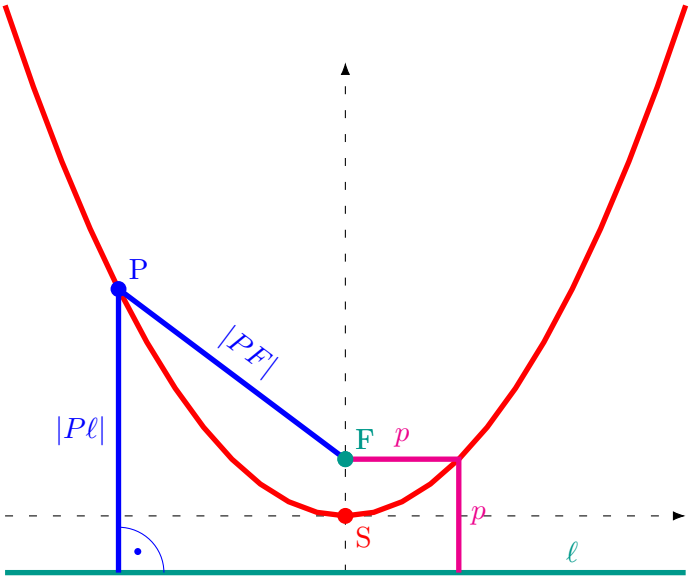
$$\gamma(t) = \left(t^2 + x_s, \sqrt{2 \cdot p \cdot t} + y_s\right)^T \tag{24.15b}$$

https://mathepedia.de/Parabel.html

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.





24.1.4 Hyperbel

Definition 24.4: Hyperbel

Die ***Hyperbel*** ist die Menge aller Punkte, deren Abstands-Differenz zu zwei vorgegebenen Punkten F_1 und F_2 den festen Wert $2 \cdot a$ hat.

Hauptform:

$$\frac{(x - x_M)^2}{a^2} - \frac{(y - y_M)^2}{b^2} = 1 \tag{24.16a}$$

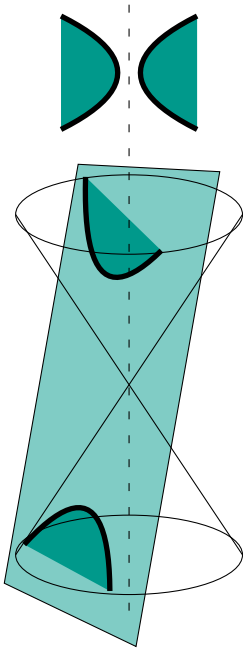
Parameterdarstellung:

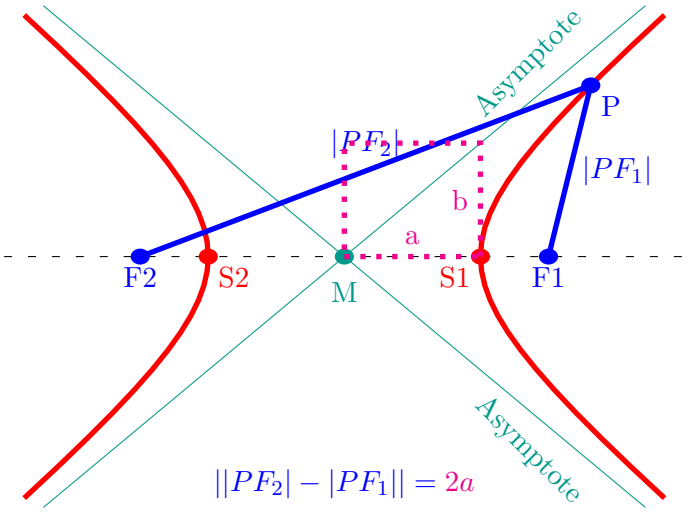
$$\gamma(t) = \left(\frac{a}{\cos(t)}, \pm b \cdot \tan(t) \right)^T \tag{24.16b}$$

https://mathepedia.de/Hyperbel.html

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.



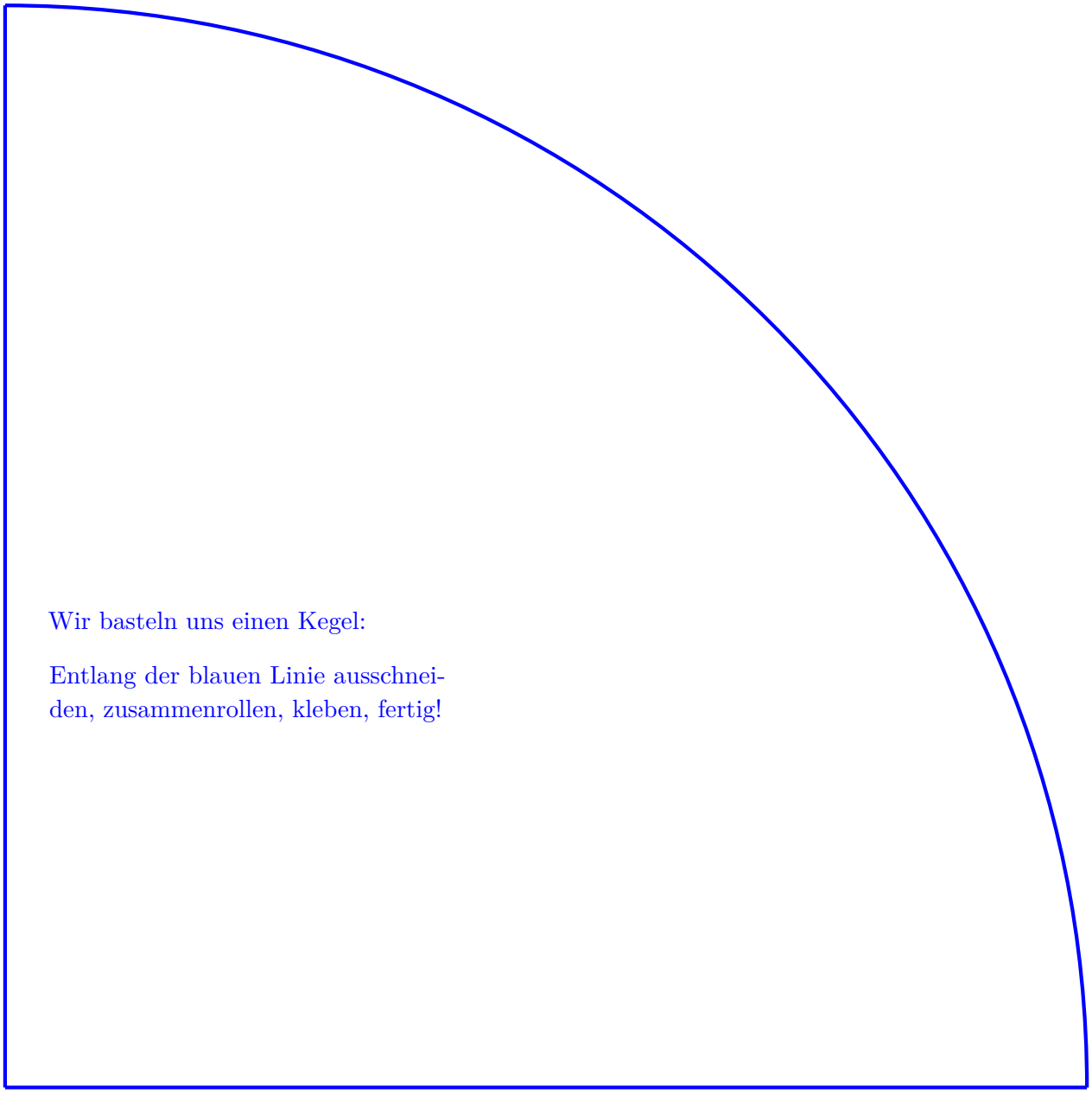


Hier eine interaktive Animation: https://wilhelm.kleppmann.de/Kegelschnitte/Kegelschnitte.html

Hier Weiterführendes: https://www.mathe-online.at/materialien/evelina/files/workshops07_kegelschnitte.pdf

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.



Wir basteln uns einen Kegel:

Entlang der blauen Linie ausschneiden, zusammenrollen, kleben, fertig!

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

25 Lösungsvorschläge zu den Übungsaufgaben

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.

© 2014-2026 iRBD / (2023-2025 IDM Partners)
Alle Rechte vorbehalten

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Es darf ausschließlich zum rein persönlichem Gebrauch im Rahmen des Studiums und der Lehre an der Technischen Hochschule Nürnberg verwendet werden. Jegliche anderweitige Nutzung (wie z. B. Änderungen, Weitergabe an außenstehende Dritte, und dergleichen mehr) ist ohne vorherige schriftliche Genehmigung der Autoren untersagt.